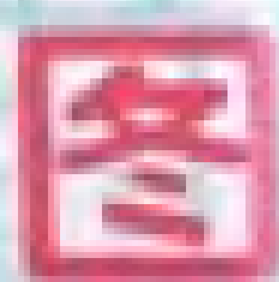


论

（第二版）

图　　论

（第二版）

王朝瑞　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书于1981年初版，1987年出版修订本，此次是修订本的再版。

全书有十四章及三个附录。前十章是图的基础知识和基本理论，包括有关图的基本概念、图的基本性质和有关图论中几个活跃的专题。后四章介绍有向图及其应用。有关图论的应用我们放在附录中加以介绍，以不致于分散精力。

本书是一本图论入门书，着重介绍图论的基本内容和基本方法，对图的矩阵表示做了较为详细的介绍。书中有较多的例题和习题，并附有解答。

本书可供高等院校作为教材之用，也可供有关技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

图论（第二版）/王朝瑞编著. —北京：北京理工大学出版社，2000.5 重印

ISBN 7-81045-245-2

Ⅰ.图… Ⅱ.王… Ⅲ.图论 Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第01407号

北京理工大学出版社出版发行

（北京市海淀区白石桥路7号）

邮政编码 100081　电话(010)68912824

各地新华书店经售

北京市房山先锋印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米　32开本　12.875印张　304千字

1997年6月第2版　2000年5月第3次印刷

印数：14001—17000册　定价：15.00元

※图书印装有误，可随时与我社退换※

序

图论是近二十年来发展十分迅速，应用比较广泛的一个新兴的数学分支，在许多领域，诸如物理学、化学、运筹学、计算机科学、信息论、控制论、网络理论、社会科学以及经济管理各方面都有广泛的应用。因此受到世界数学界和工程技术界越来越广泛的重视。

我国在50年代开始开展图论方面的工作，取得了许多可喜的成果。但是总的来说，图论在我国还不够普及，从事这方面研究和应用的人也还不够多，为了普及图论知识，推广图论的应用，以及为进一步培养专门人材创造条件，我院曾受北京市数学会的委托，举办图论普及班，本书是在为这个普及班编写的讲义的基础上修改而成的。

图论的内容十分丰富，涉及的面也比较广，要想在一本书中包括图论的全部内容几乎是不可能的，为了达到普及和推广的目的，本书所涉及的只是图论中的基础知识，但它们又是工程实际中经常用到的。在叙述上，力求作到对基本概念的阐述通俗易懂，便于初学者掌握，在方法上是以线性代数的基础知识作为研究图的主要工具。

本书共十三章，前八章讨论无向图，内容有：图与子图，E图和H图，通路的集合和最短通路，树，割集，图的连通度，图的矩阵表示，平面图。后五章讨论有向图，包括有向图的概念，有向图的矩阵表示，生成树的生成，网络的流，信号流图。

本书在编写中，承孙树本教授的热忱帮助和指导，并认真

审阅了原稿，在此表示衷心的感谢。还要感谢应用数学所王建方和蔡晨两位老师，他们详细审阅了手稿，提出了许多宝贵意见。

书中有关的 Fortran 语言程序是尤定华老师协助编写的，谨此致谢。

王朝瑞

北京工业学院 1980.5

85年再版序

本书第一版于1981年由人民教育出版社(现高等教育出版社)出版,此次由北京工业学院出版社再版。

这次再版除了对第一版中若干不妥和错误之处做了修正之外,还作了如下修改:

删去了第一版中的割集矩阵的可实现性,图的同调、图的厚度,回路矩阵和割集矩阵的非零大行列式的值、电网络方程等节,增加了匹配与色数两章;在内容的叙述和安排上作了改动;有些章节打上*号,难度较大的定理的证明用*号隔开,如果学时数较少,这些内容可以省略。

上述改动大部是根据读者的反映,我在这里谨向他们表示衷心的感谢。

应广大读者的要求,这次再版增加了习题解答,这部分工作是由孙良、赵光复和王成德三位同志协助完成的,有的习题和解答选自张克民、林国宁和张忠辅三位同志编写的《图论及其应用习题解答》一书,在此一并向他们表示谢意。

王朝瑞

1985.12

96 年再版序

本书此次再版除保留了原书特点之外，在内容安排上做了较大的改动，使内容安排更加合理。

此次再版前六章集中介绍图论的基本知识，在此基础上，接下去的四章介绍图论中的几个专题，它们都是图论中很活跃的研究领域。然后，以最短路和最小树为例，介绍图论的应用。最后三章介绍有向图和以运输网络为例介绍有向图的应用。

根据读者的需要，此次再版增加了有关图论的应用：流图和信号流图；开关网络和电网络，为了不使内容分散和庞杂，这三部分内容均放在附录中加以介绍。

由于讨论开关网络的需要，增加了割集矩阵的可实现性，这部分内容用小号字印刷，此外还有部分内容和难度较大的定理的证明，此次再版均改用小号字。

王朝瑞

1996.6 于北京理工大学

目　　录

第一章　图

本章介绍图与描述图的局部结构的一些基本概念和述语。这一章的名词和概念较多，但它们都是最基本的，是我们进一步讨论的基础。因此希望读者能熟练地掌握这些概念，这对以后的讨论是非常重要的。

1.1　图的概念

1.1.1　引例

图论中所讨论的图与人们通常熟悉的几何图形例如圆、椭圆、函数图形等是不同的。先来看两个例子。

例 1.1.1　有六支甲 *A* 足球队：上海申花队，北京国安队，广东宏远队，大连万达队，广州太阳神队，济南泰山队。这六支球队 1996 年甲 *A* 联赛前七轮的比赛是：

济南泰山队——广州太阳神队(第一轮)
济南泰山队——大连万达队(第二轮)
广州太阳神队——广东宏远队(第三轮)
广东宏远队——济南泰山队(第四轮)
广州太阳神队——上海申花队(第五轮)
济南泰山队——北京国安队(第五轮)
北京国安队——广州太阳神队(第六轮)
广东宏远队——大连万达队(第六轮)
上海申花队——济南泰山队(第七轮)

大连万达队——北京国安队(第七轮)

那么由这六支球队和这六支球队前七轮的比赛组成一个图(graph)。具体地说就是:

六支球队组成一个集合:

V={上海申花队,北京国安队,广东宏远队,大连万达队,
广州太阳神队,济南泰山队}

六支球队前七轮的比赛组成一个集合:

E={(济南泰山队,广州太阳神队),(济南泰山队,大连万达队),
(广州太阳神队,广东宏远队),(广东宏远队,济南泰山队),
(广州太阳神队,上海申花队),(济南泰山队,北京国安队),
(北京国安队,广州太阳神队),(广东宏远队,大连万达队),
(上海申花队,济南泰山队),(大连万达队,北京国安队)}

用(济南泰山队,广州太阳神队)表示这两支球队进行比赛。

那么我们把由集合 V 和集合 E 组成的偶对 (V,E),称为一个图。

例 1.1.2 北京,上海,南京,杭州,西安,郑州,重庆,武汉,长沙,广州十个城市和它们之间的航线构成一个图。具体地说就是:

V={北京,上海,南京,杭州,西安,郑州,重庆,武汉,长沙,广州}

和

E={(北京,西安),(北京,郑州),(北京,南京),
(北京,武汉),(北京,上海),(北京,杭州),
(北京,长沙),(北京,广州),(北京,重庆),
(西安,重庆),(重庆,武汉),(长沙,武汉),
(武汉,南京),(南京,杭州),(杭州,上海),
(广州,杭州),(长沙,广州),(重庆,广州)}

从以上两个例子可以看出,图论中的图是指表示具体事物的集合 V(例 1.1.1 中的球队,例 1.1.2 中的城市)和事物之间的关系的集合(例 1.1.1 中球队进行比赛,例 1.1.2 中两城市间有航线)所组成的偶对。集合 V 中的元素称为图的**顶点**(vertices),集合 E 中的元素称为图的**边**(edges)。因此,一个

图是由表示具体事物的集合和表示事物之间的关系的集合组成的偶对。

假如我们用平面上的几何点表示图的顶点，用直线段或曲线段表示图的边，那么一个图可以用几何图形来表示。

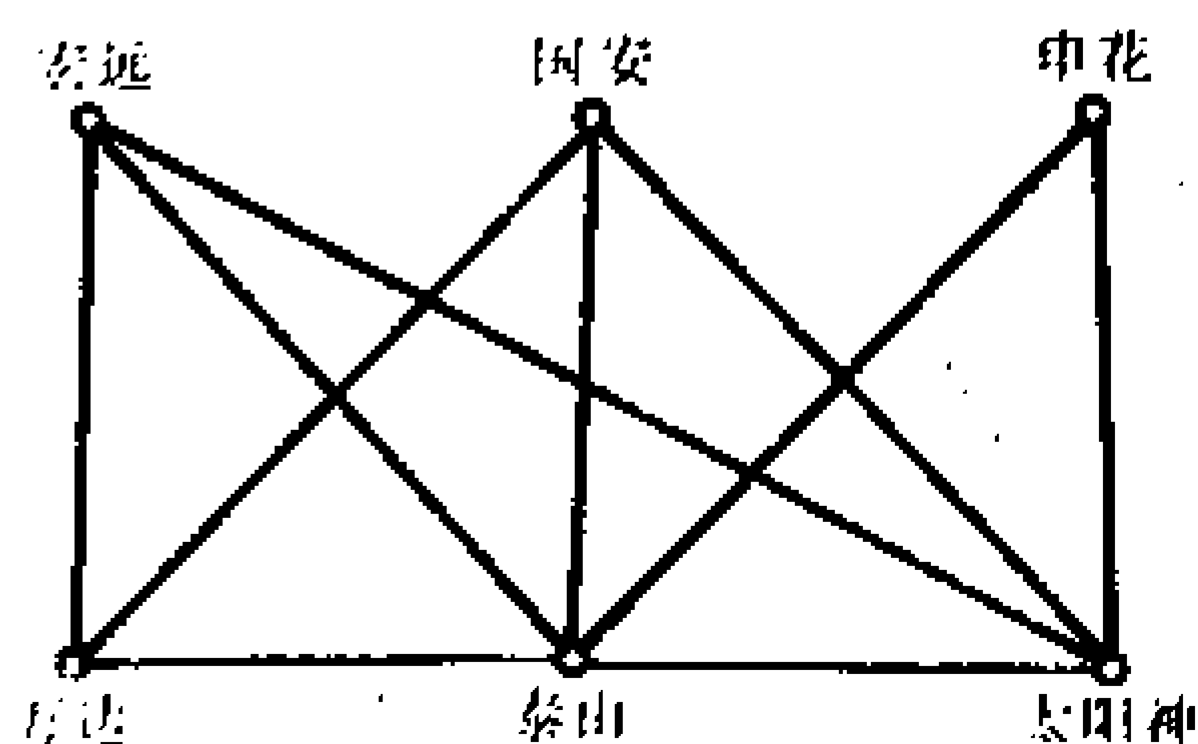


图 1.1-1

图 1.1-1 和图 1.1-2 所示的几何图形就是分别描述例 1.1-1 和例 1.1-2 中的图。

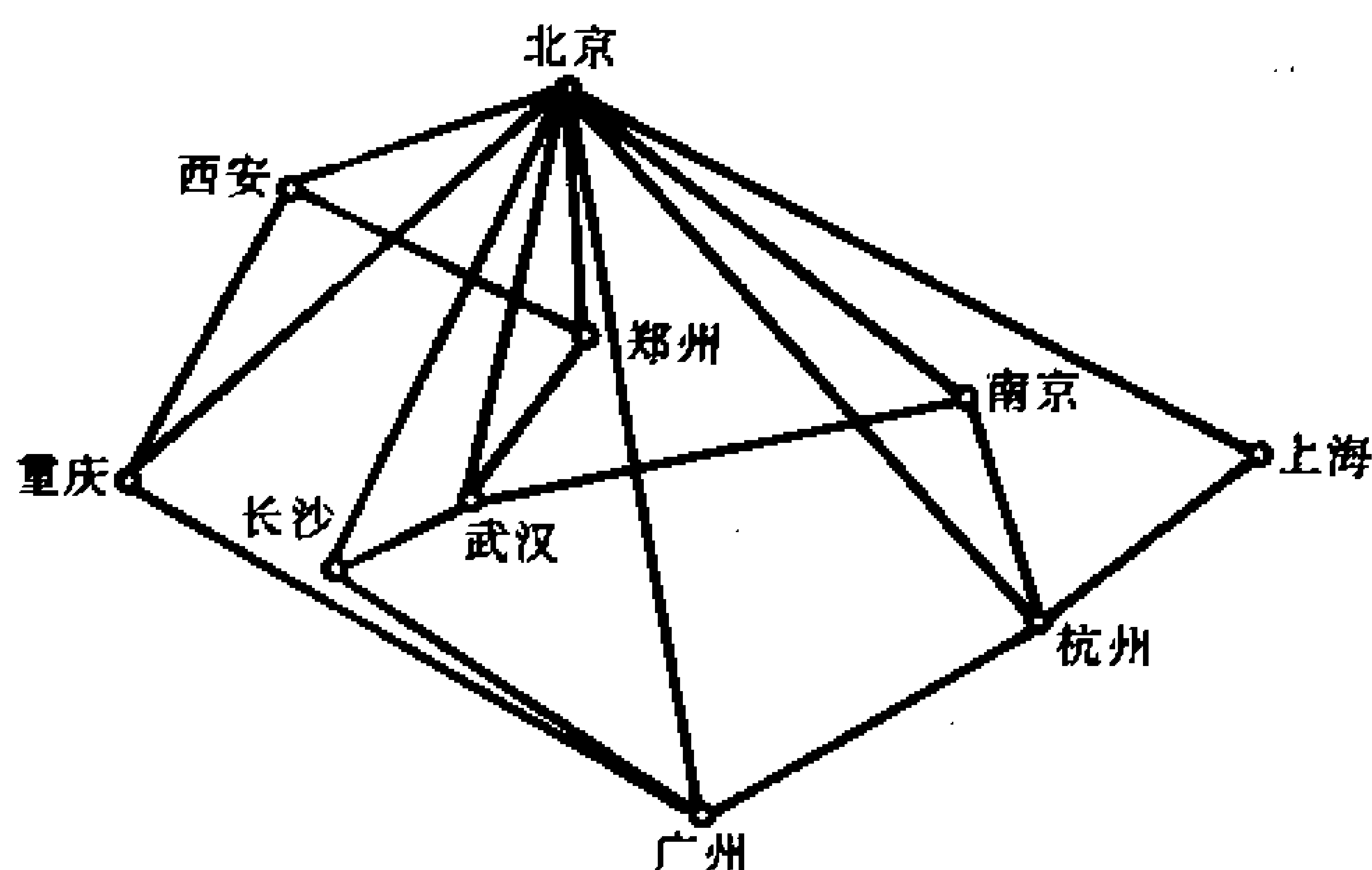


图 1.1-2

图还可以用来表示许多其他结构。譬如，用顶点表示人，边表示人与人之间的关系（例如父子关系），那么亲族关系就可以用一个图来表示。图1.1-3给出这种图的几何图形，称为树。

早期图论与"数学游戏"有密切关系，1736 年欧拉解决了

当时很有名的哥尼斯堡七桥问题。哥尼斯堡城有一条普莱格尔河，河中有两个小岛，有七座桥把普莱格尔河中的两个小岛与河两岸联结起来，如图 1.1-4 所示。

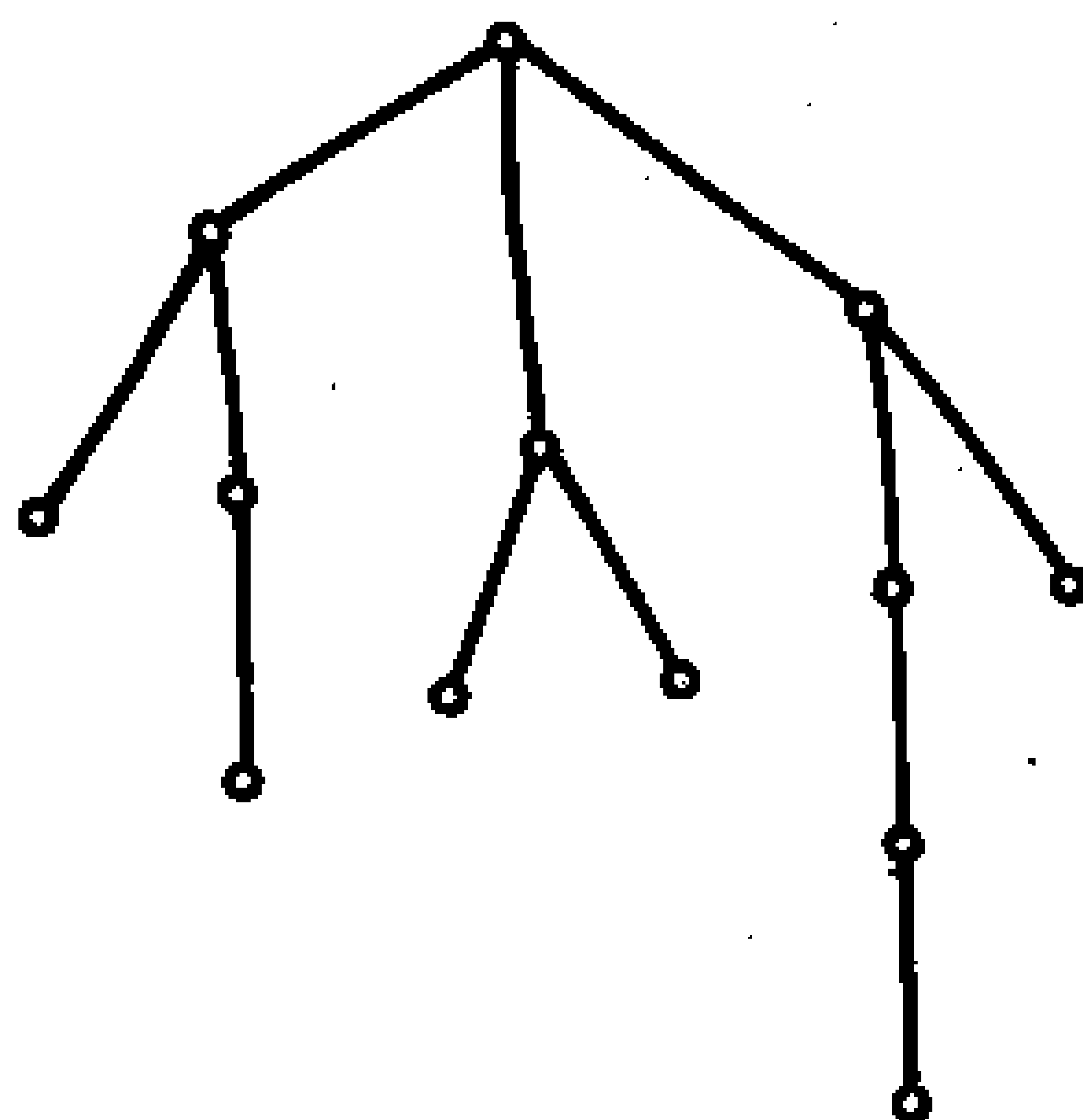


图 1.1-3

有人提出这样一个问题：从河岸或岛上任何一个地方开始，能否通过每一座桥一次

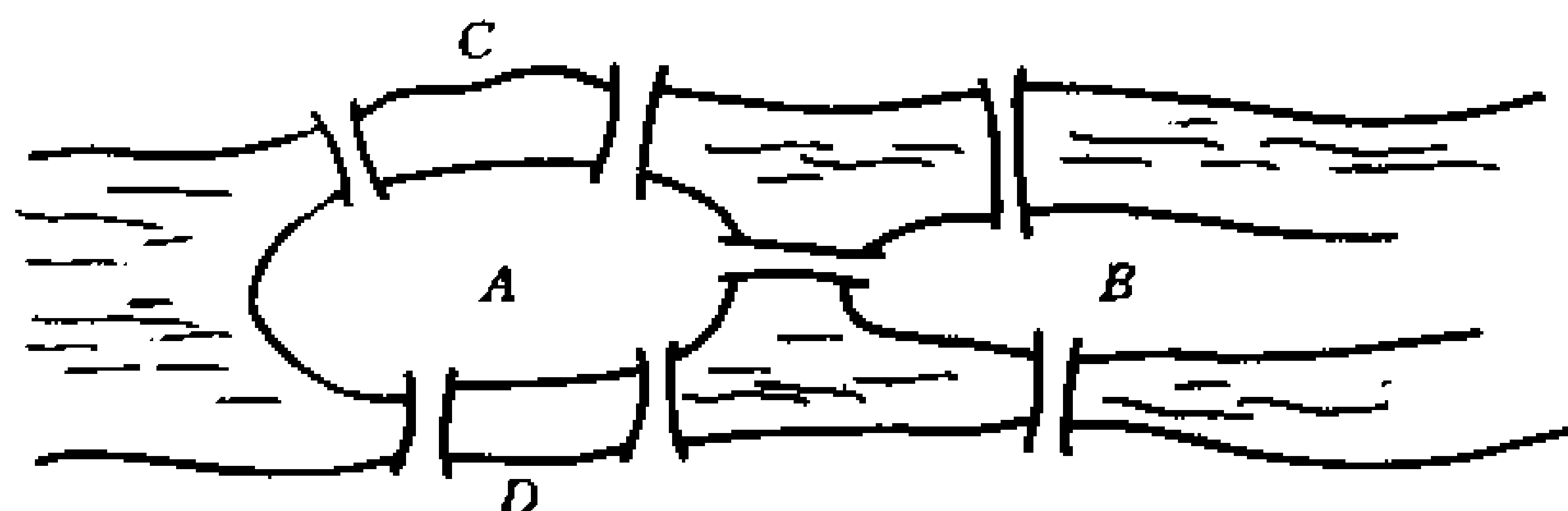


图 1.1-4

且仅一次回到原地？

这个问题虽然是一个游戏，但是它的数学模型却是很有意义的。

欧拉用四个点表示两岸和两个小岛，用两点间的联线表示桥，如图1.1-5所示。

于是问题转化为，在图1.1-5所示的图中，从任何一点出发，能否通过每条边一次且仅一次回到出发点。

直观上不难发现，如要回到原来的地方，必须从一条边进，从另一条边出，只有一进一出才行。这就是说，要求与每个顶点相关联的边均偶数。从图1.1-5中可以看到，这个图所有的点均不与偶数条边相关联，所以七桥问题无解（详细讨论见第三章）。

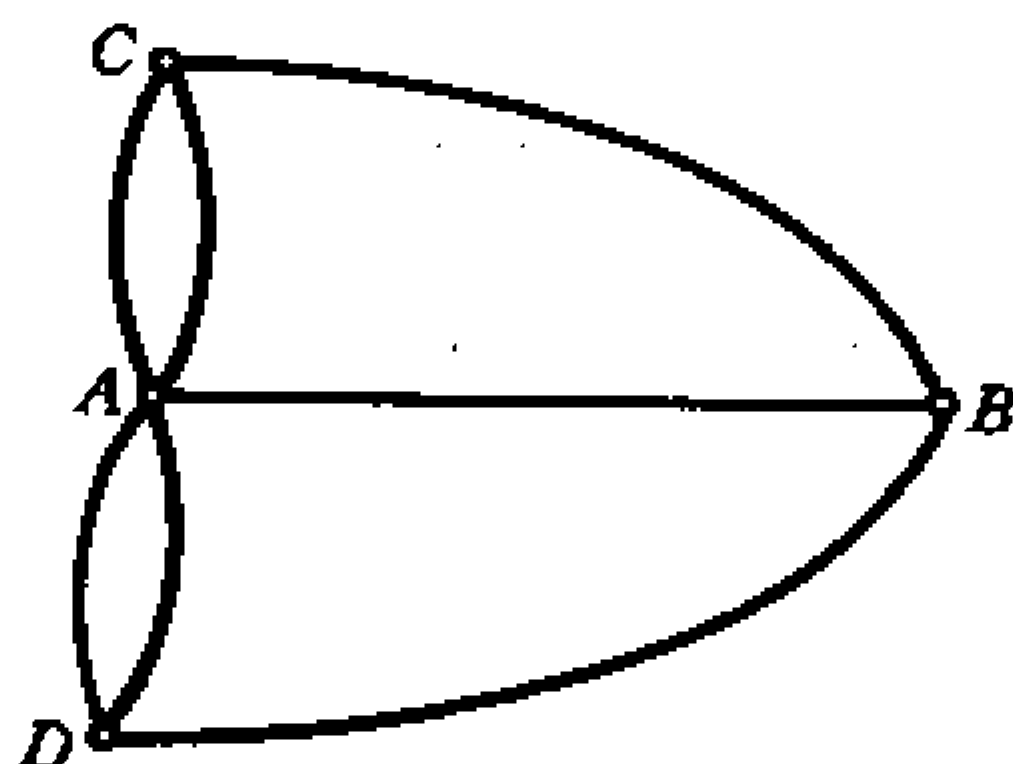


图 1.1-5

我们所以把一个顶点集合和一个边的集合称之为“图”，正是因为它们可以用一个图形来表示。这种图形表示有助于了解有关图的许多性质。但是必须指出，描述一个图的几何图形不是唯一的。一个图的几何图形仅描绘出它的顶点和边之间保持的相互关系，至于顶点的位置以及边的长、短、曲、直都是无关紧要的。

上面我们从直观上阐述了图的概念。从上面的讨论中可以看到，图的本质内容是顶点和边之间的关联关系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线段来表示，则是完全不必要的，换句话说，图的概念可以抽象化。

1.1.2 二元关系

二元关系这个概念在图的抽象定义中起着重要的作用。我们先来讨论集合的积。

两个具体事物 a 和 b，按照一定的次序排列，a 在前，b 在后，记作 (a,b)，则称 (a,b) 为一个**有序对**。

我们常常会遇到有序对的概念。例如，在所有参加乒乓球

比赛的选手中，有序对(a,b)可以表示冠军和亚军。因此，有序对(a,b)和(b,a)是不同的。

设A和B是两个集合。由$a\in A,b\in B$组成的形如(a,b)的所有有序对构成的集合，称为A和B的**笛卡儿积**(cartesian product)，或称为**有序积**，记作$A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$$

定义 1.1.1 有序积$A\times B$的一个子集合，称为A到B的一个**二元关系**(binary relation)

特别地，当$A=B$时，集合A到集合B的二元关系称为**集合A上的一个二元关系**。

例如，设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,d\}$，则

$$\begin{aligned}A\times B&=\{a,b,c\}\times\{a,b,d\}\\&=\{(a,a),(a,b),(a,d),(b,a),(b,b),(b,d),\\&\quad(c,a),(c,b),(c,d)\}\end{aligned}$$

集合$\{a,b,c\}\times\{a,b,d\}$的一个子集，譬如$\{(a,a),(a,b),(b,a),(c,a)\}$是$\{a,b,c\}$到$\{a,b,d\}$的一个二元关系。

集合A到集合B上的一个二元关系，是A中与B中有关系的元素的直观概念的形式化。事实上，如果R是A到B的一个二元关系，并且有序对(a,b)是R中的元素，那么元素a和b有其种关系。

上面我们是针对有序对来讨论的。如果组成偶对的两个事物a和b与次序无关，也就是说偶对(a,b)和偶对(b,a)相同，则这种偶对称为**无序对**。无序对也是经常遇到的一个概念。譬如，在所有参加乒乓球男子双打者中间，偶对(a,b)表示获得冠军的一对选手，那么(a,b)和(b,a)表示同一对选手。

设A,B是两个集合。由$a\in A,b\in B$所组成的无序对构成的集合，称为A和B的**无序积**，记作$A\varnothing B$。

无序积 $A\&B$ 的一个子集，称为 A 和 B 的一个二元关系。当 $A=B$ 时，A 和 B 的二元关系称为 **A 上的二元关系**。

例如，设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，则

$$
\begin{aligned}
A\&A = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
&(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
&(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),\\
&(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

无序积 $A\&A$ 的一个子集

$\{(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,5),(2,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$

是 A 上的一个二元关系。

1.1.3 图的定义

定义 1.1.2 一个图 G 定义为一个偶对 (V,E)，记作 $G=(V,E)$，其中

(1) V 是一个集合，其中的元素称为**顶点**；

(2) E 是无序积 $V\&V$ 中的一个子集合，其元素称为**边**；集合 $V\&V$ 中的元素可在 E 中出现不止一次。

我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集合与边的集合。如果 $V(G)$ 和 $E(G)$ 都是有限集合，则 G 称为**有限图**；否则称为**无限图**。在本书中只限于研究有限图。

一个有 p 个顶点和 q 条边的图称为 (p,q) 图，一个 (p,q) 图，若它的 p 个顶点标以不同的名称，则称为**标定的**，否则称为**非标定的**。如图 1.1-6 中的 G_1 和 G_2 是标定的，而 G_3 是非标的。

没有任何边的图称为**空图**(empty graph)，记作 $\varnothing$。只有一个顶点的图叫做**平凡图**(trivial graph)。

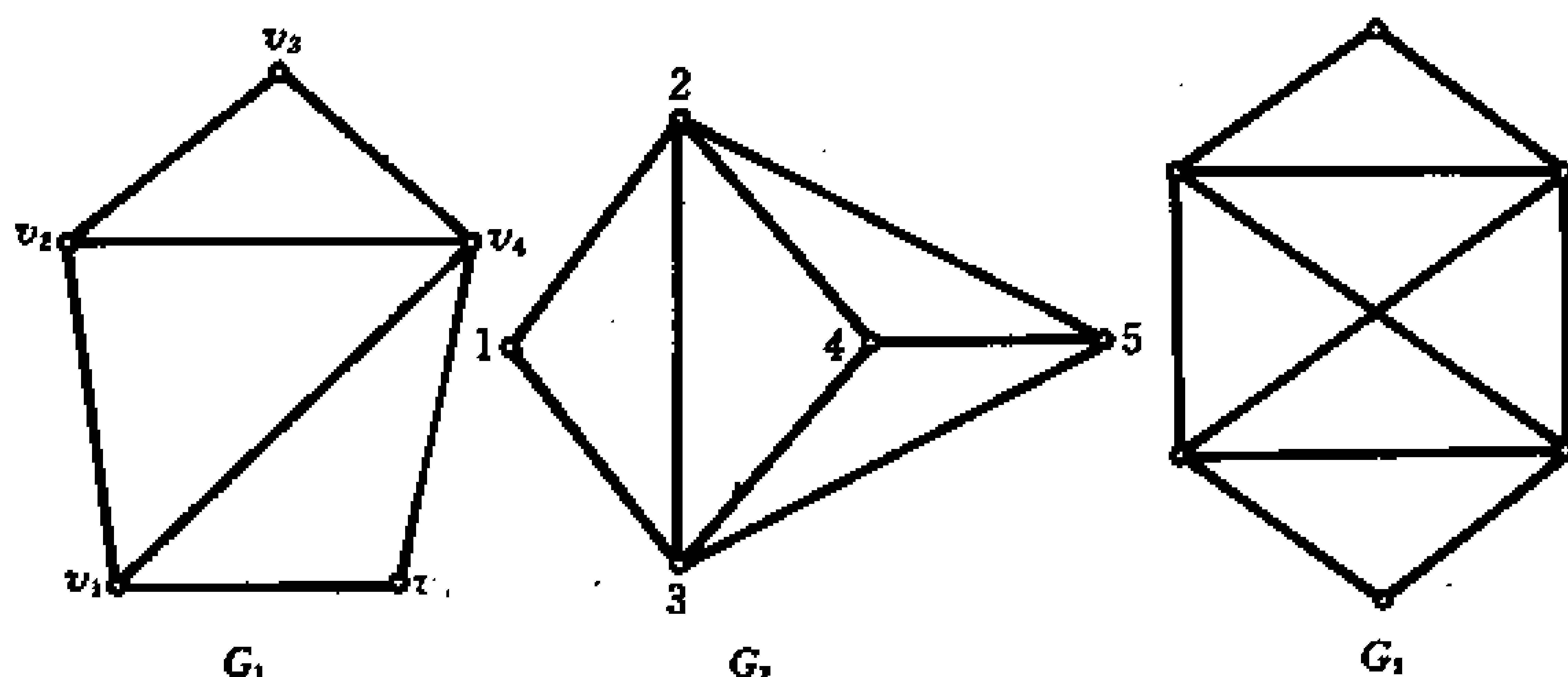


图 1.1-6

图中顶点的个数叫做图的**阶**(order)若连接同一对顶点的边数大于 1,则称这样的边为**多重边**,其边数称边的**重数**(multplicity)。

在本书中如无特殊说明,总是用 p 表示图的阶,用 q 表示图的边数。

在讨论图的概念时曾指出,一个图可以用一个几何图形来描述。在保持图的顶点和边的关系不变的情况下,图形的位置,大小、形状都是无关紧要的。因此,在图的讨论中,我们常常画出图的一个几何图形,并且就把它作为这个图的本身。

图论中大多数定义和概念是根据图的表示形式提出的。一条边的端点称为与这条边**关联**(incident),反之,一条边称为与它的端点关联。与同一条边关联的两个端点称为**邻接**(adjacent)。如果两条边有一个公共的顶点,则称这两条边**邻接**。

假设 v_i 和 v_j 是图 G 的两个顶点,如果 v_i 和 v_j 邻接,则在 v_i 和 v_j 之间有一条边 e,记作 $e=(v_i,v_j)$或简记作 $e=v_iv_j$。

在图 1.1-7 所示的图中，顶点 u 与顶点 v 是邻接的，u 与 w 不邻接；边 e_1 和 e_2 是邻接的，而 e_1 和 e_3 不邻接。需要指出的是，图 1.1-7 所示的图中边 e_2 和 e_3 的交点不是图的顶点。

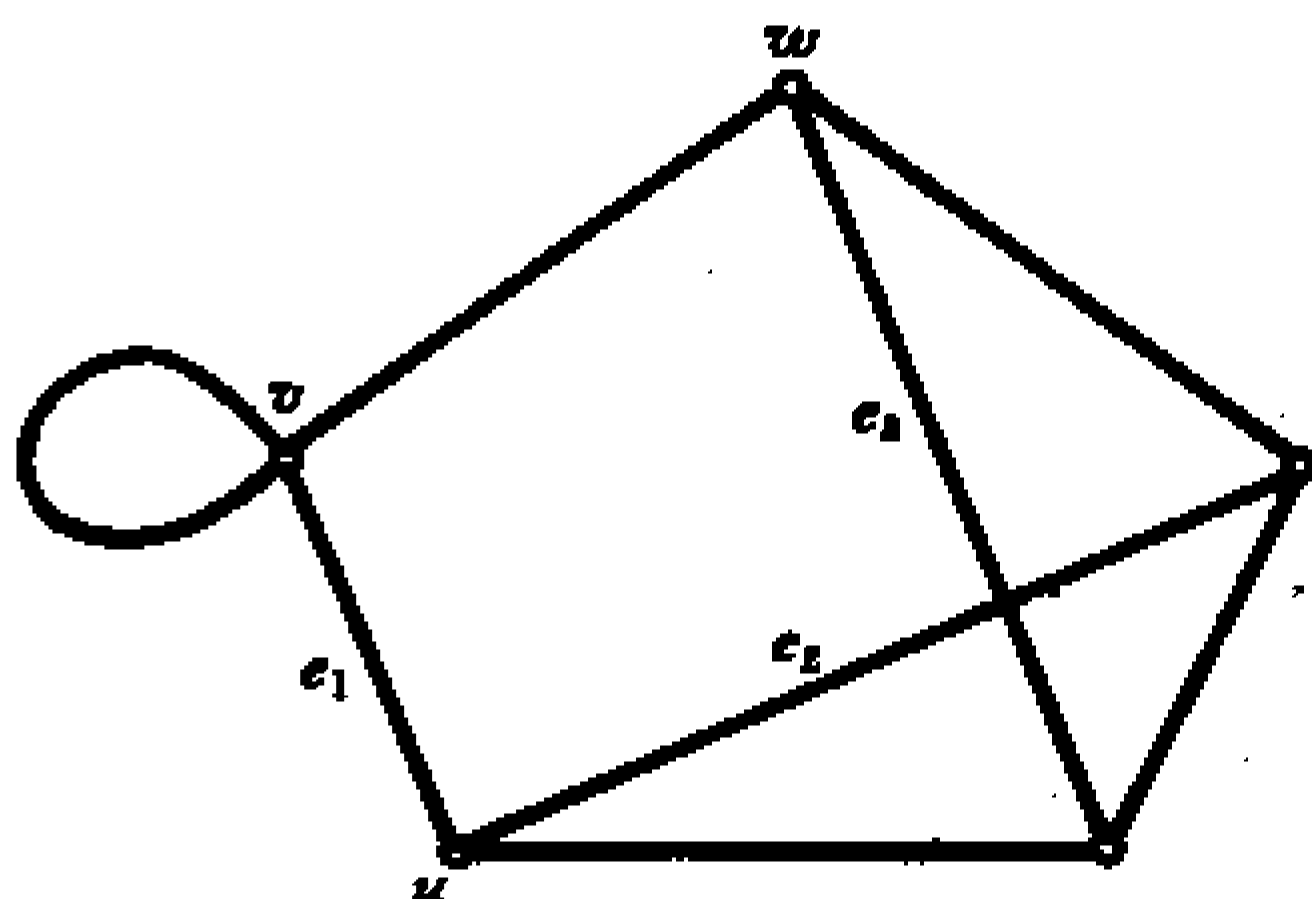


图 1.1-7

图 $G=(V,E)$ 中形如 (v,v) 的边 $(v\in V(G))$ 也就是端点重合为一点的边叫做**环**(Loop)。

没有环及多重边的图称为**简单图**(simple graph)。

从上一节的讨论和图的定义可知，一个集合 V 和 V 上的一个二元关系就是一个图。因此图的最基本的内容实际上就是一个二元关系，也就是顶点和边的关联关系。一个系统或一个结构若具有二元关系便可用图作为数学模型，并且具有直观性和艺术性，这就是图所以被广泛的应用于许多科学领域的原因。

定义 1.1.3 每一对不同的顶点均有一条边相联的简单图称为**完全图**(Complete graph)。n 阶完全图记作 K_n。

显然，n 阶完全图有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边。

定义 1.1.4 设 V_1 和 V_2 是 G 的顶点子集，使 $V_1\cup V_2=V(G)$，$V_1\cap V_2=\varnothing$ 且 G 的每一条边的一个端点在 V_1 中，另一个端点在 V_2 中，则称 G 为**二部图**(bipartite graph)，记作 $G=(V_1,V_2;E)$。

如果 V_1 中的顶点与 V_2 中的每一个顶点都邻接，则称为**完全二部图**。若 $|V_1|=m$，$|V_2|=n$（符号 $|V|$ 表示集合 V 中元素的个数），则完全二部图记作 $K_{m,n}$。图 1.1-8 中分别画出完全图，二部图和完全二部图的图形。

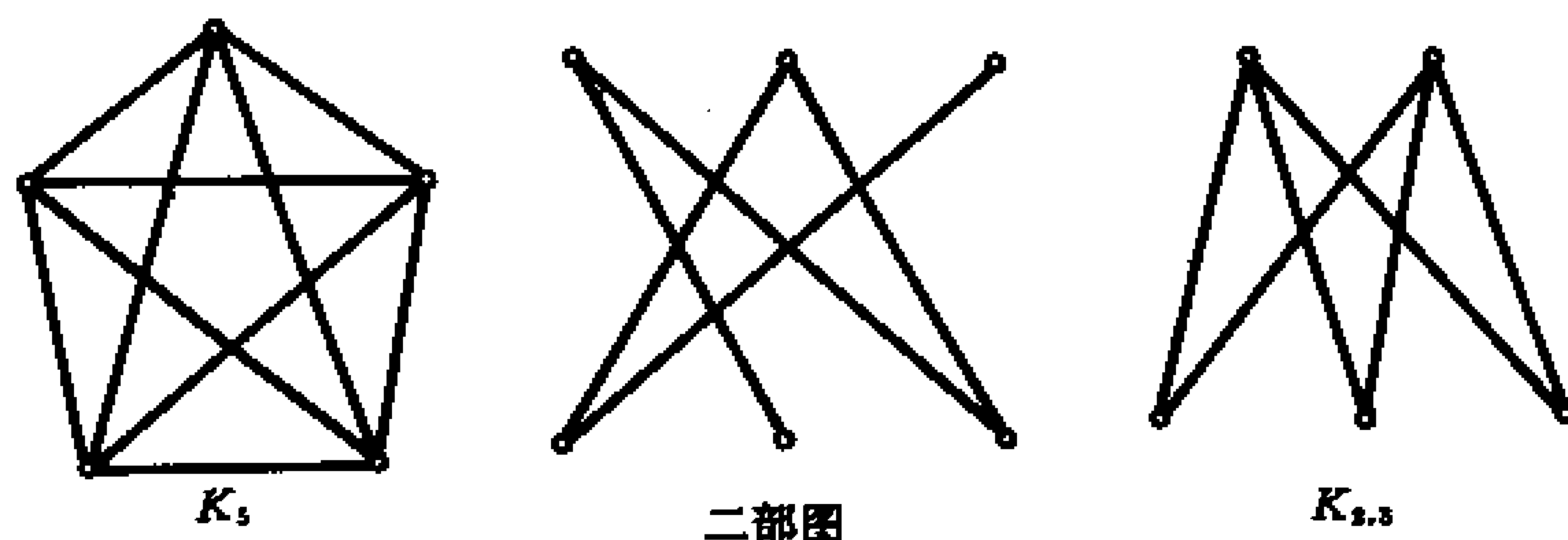


图 1.1-8

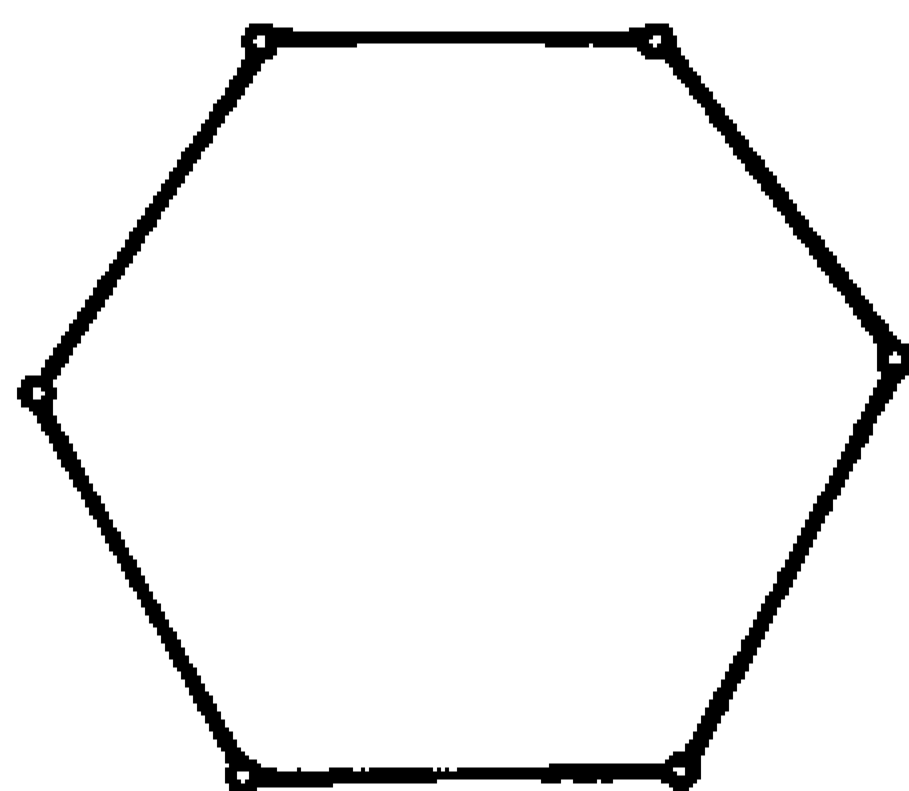
定义 1.1.5 图 G 顶点集合 $V(G)$ 分成子集 V_1 和 V_2（$V_1 \cup V_2=V(G)$，$V_1 \cap V_2=\varnothing$）的分划 (V_1,V_2)，称为 G 的**二分划**(bipartition)。

定义 1.1.6 设 G 为简单图，H 是一个以 $V(G)$ 为顶点集的图，且两个顶点在 H 中邻接当且仅当它们在 G 中不邻接，则称 H 为 G 的**补图**(complement graph)，记作 $H=G^C$ 或 $H=\overline{G}$。

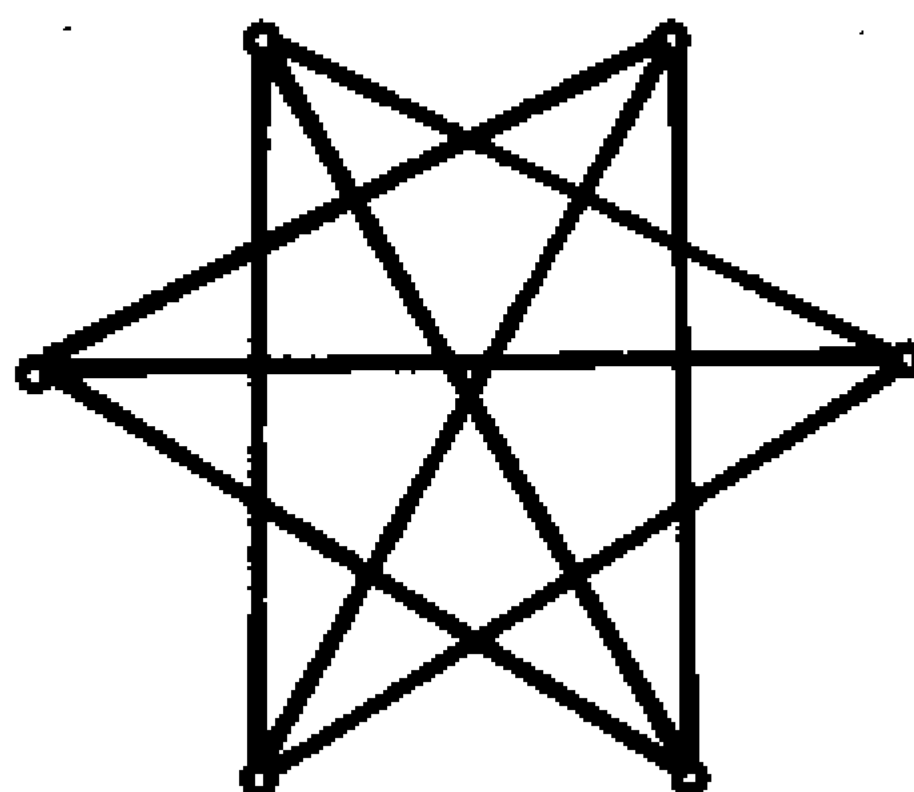
图 1.1-9(b)所示的图是图 1.1-9(a)所示的图的补图。

定义 1.1.7 设有两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$，它们的顶点集间有一一对应关系，便得边之间有如下的关系：设 $u_1 \leftrightarrow u_2$，$v_1 \leftrightarrow v_2$，$u_1,v_1 \in V_1$，$u_2,v_2 \in V_2$。如果 $(u_1,v_1) \in E_1$，那么 $(u_2,v_2) \in E_2$，而且 (u_1,v_1) 的重数与 (u_2,v_2) 的重数相同，这种对应叫做**同构**(isomorphism)，记作 $G_1 \cong G_2$。

图 1.1-10 中所示的图 G_1 和 G_2 在对应 $v_i \leftrightarrow u_i$($i=1,2,3,4,5,6$)下是同构的。

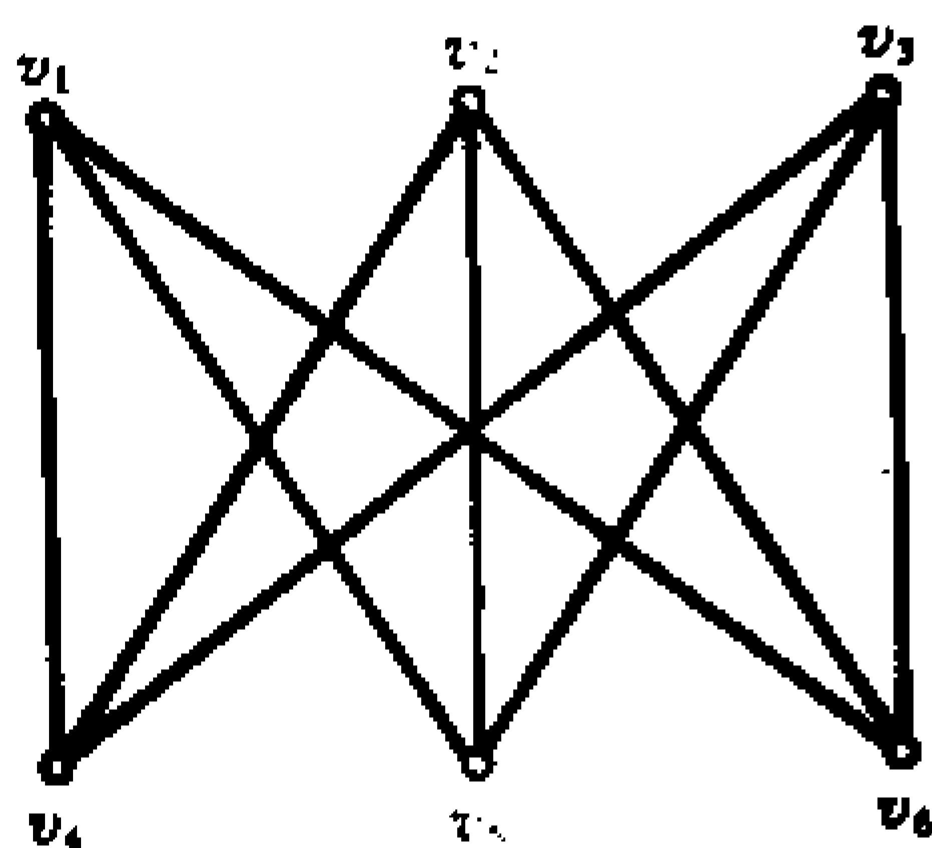


(a) G

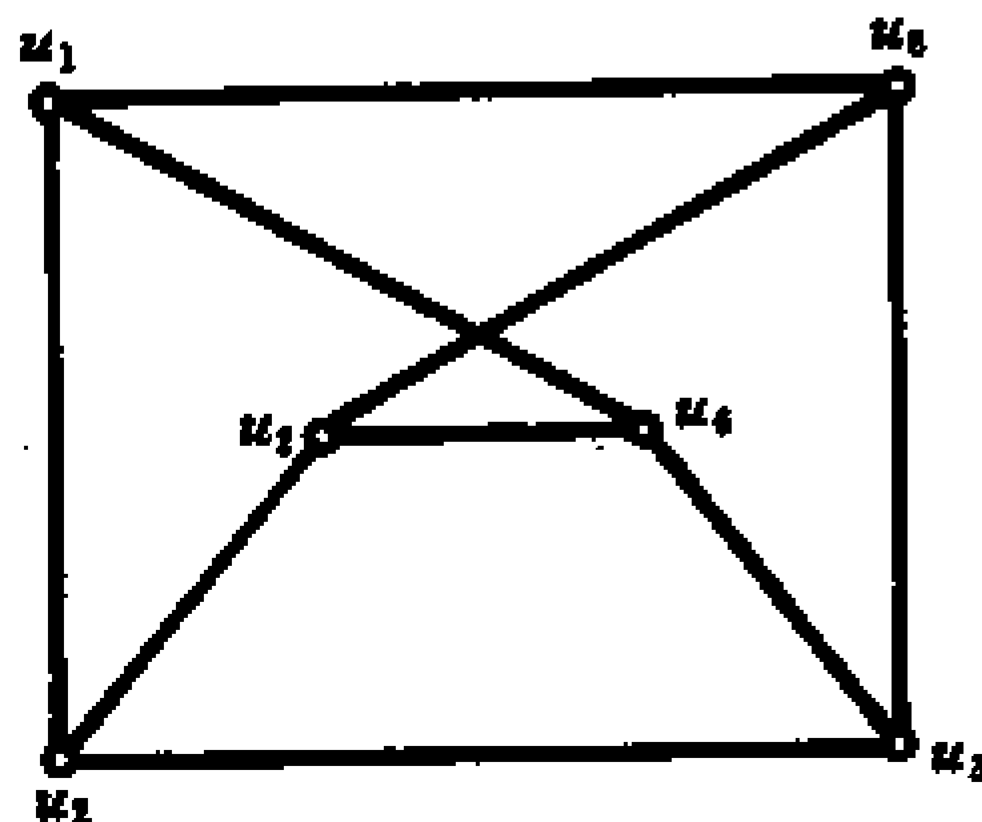


(b) $\overline{G}$

图 1.1-9



G_1



G_2

图 1.1-10

由同构的定义知，两个图有相同的顶点数或相同的边数是同构的必要条件。另外，两个图同构，其对应顶点的边数必须相同，这也是必要的条件之一。

同构关系是一个等价关系。

事实上，

(1) $G \cong G$（反身性）；

(2) 若 $G_1 \cong G_2$，则 $G_2 \cong G_1$（对称性）；

(3) 若 $G_1 \cong G_2, G_2 \cong G_3$，则 $G_1 \cong G_3$（传递性）。

所有图的集合，按照同构关系分划成等价类，每一个这样的等价类称为一个**非标定图**（non-labeled graph）。我们知道，集合 A 的一个等价关系所决定的等价类的集合称为 A 关于这个等价关系的**商集**。所有图的集合，对于图的同构关系构成一个商集，这个商集中的每一个元素是一个非标定图。为区别于非标定图，我们称本节开始时定义的图为**标定图**（labeled graph）。给一个图的顶点和边赋以标记的目的，主要是为了便于称呼它们。例如讨论简单图时，把端点为 u 和 v 的边简称为"边 (u,v)"。一个非标定图可以用属于这个等价类的任何一个标定图的图形来给出，只是不必给顶点和边赋以标记。

今后，主要是讨论标定图，至于是否具体标定要视情况而定。

1.2 子　　图

在研究和描述图的性质以及图的局部结构中，子图的概念占有重要的地位。

定义 1.2.1 H 是图 G 的**子图**（Subgraph），写作 $H \subseteq G$，如果 $V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(G)$，且 H 中边的重数不能超过 G 中对应边的重数。

定义 1.2.2 设 $H \subseteq G$，如果下面的条件至少有一个成立：

(1) $V(H) \subset V(G)$；

(2) $E(H) \subset VE(G)$；

(3) H 中至少有一个边的重数小于 G 中对应边的重数，

则说 H 是 G 的**真子图**（proper Sabgraph）。

下面引进几种重要的子图，这些子图在后面的讨论中经常用到。

定义 1.2.3 设图 $G=(V,E)$。一个满足

(1) $V(H)=V(G)$

(2) $E(H)\subset E(G)$

的真子图，叫做 G 的**生成子图**(Spanning graph)。

定义 1.2.4 设 V' 是图 $G=(V,E)$ 的顶点集的一个非空子集，以 V' 作为顶点集，以两个端均在 V' 中的边的全体为边集的子图，称为由 V' 导出的 G 的子图，记为 $G[V']$，我们说，$G[V']$ 是 G 的**导出子图**(induced Subgraph)。

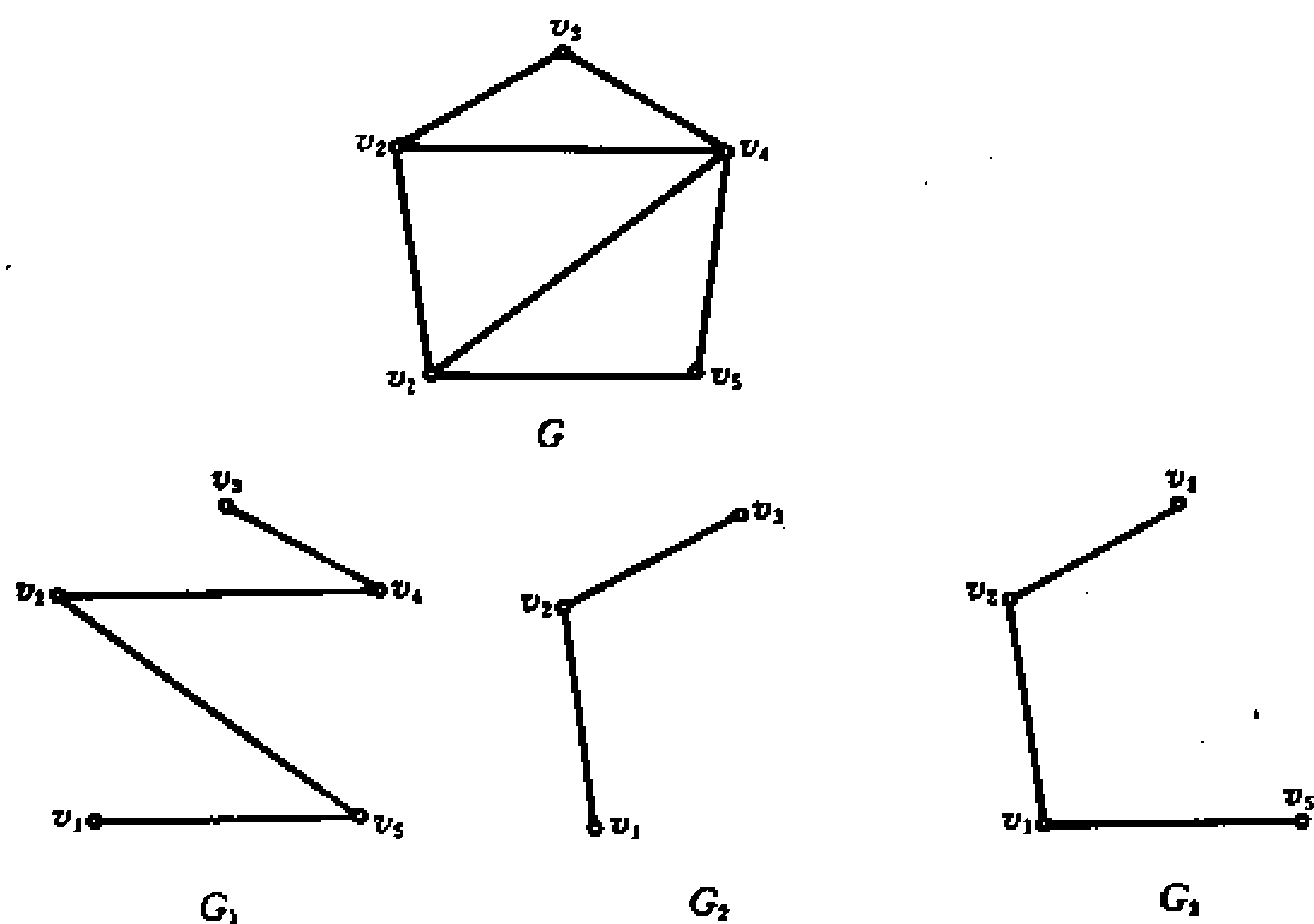
导出子图 $G[V/V']$，记为 $G\text{-}V'$，它是从 G 中去掉 V' 中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图。

特别地，若 $V'=\{v\}$，则把 $G\text{-}\{v\}$ 简记成 $G\text{-}v$，称为**主子图**。

在图 1.2-1 中，G_1 是 G 的生成子图，G_2 是 G 的导出子图 $G_2=G[\{v_1,v_2,v_3\}]$，G_3 是 G 的主子图 $G_3=G-v_4$。

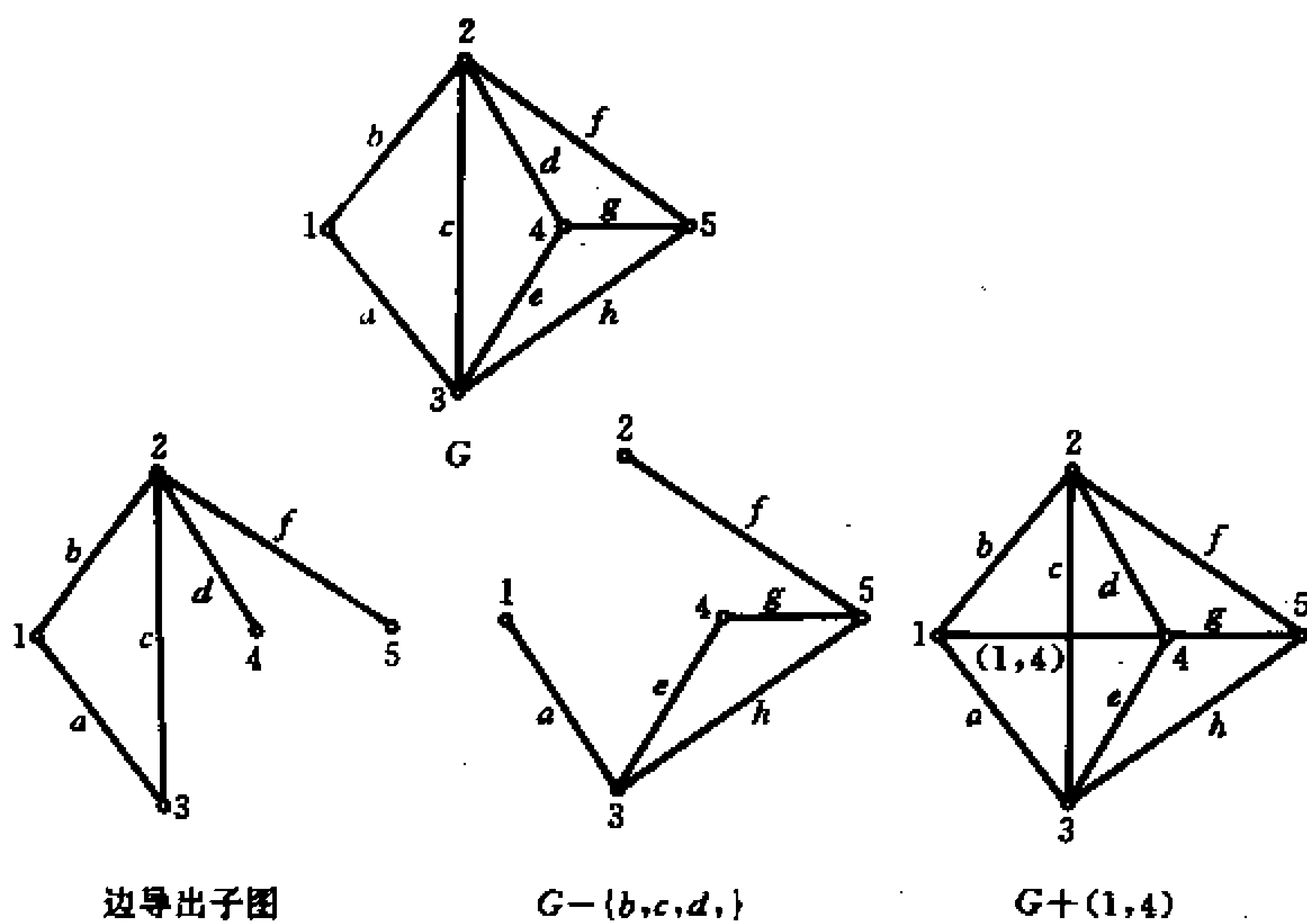
定义 1.2.5 设 E' 是图 $G=(V,E)$ 的边集 $E(G)$ 的非空子集，以 E' 为边集，以 E' 中边的全部顶点为顶点集组成的子图称**边导出子图**。

在边集 $E(G)$ 中删去子集 E' 的全部边得到的 G 的生成子图(注意，删去一条边时，该边的两个顶点仍然保留)，记作 $G\text{-}E'$。类似地，在 G 上增加一个边集 E' 所得到的图记作 $G+E'$。若 $E'=\{e\}$，则分别用 $G-e$ 和 $G+e$ 代替 $G-\{e\}$ 和 $G+\{e\}$。图 1.2-2 给出这些不同类型的子图。



v3
v2
v4
v1
v5
G
v3
v2
v4
v1
v5
G1
v3
v2
v1
G2
v3
v2
v1
v5
G3

图 1.2-1



2
b
f
d
1
c
4
g
5
e
a
h
3
G
边导出子图
G−{b,c,d,}
G+(1,4)
(1,4)

图 1.2-2

1.3 顶点的度

定义 1.3.1 设 $v\in V(G)$,G 中与顶点 v 关联的边的数目,称为 v(在 G 中)的**度**(degree),记作 $\deg_G(v)$或简记作 $\deg(v)$。

例如,在图 1.3-1 所示的图中,deg(1)=2,deg(5)=4。

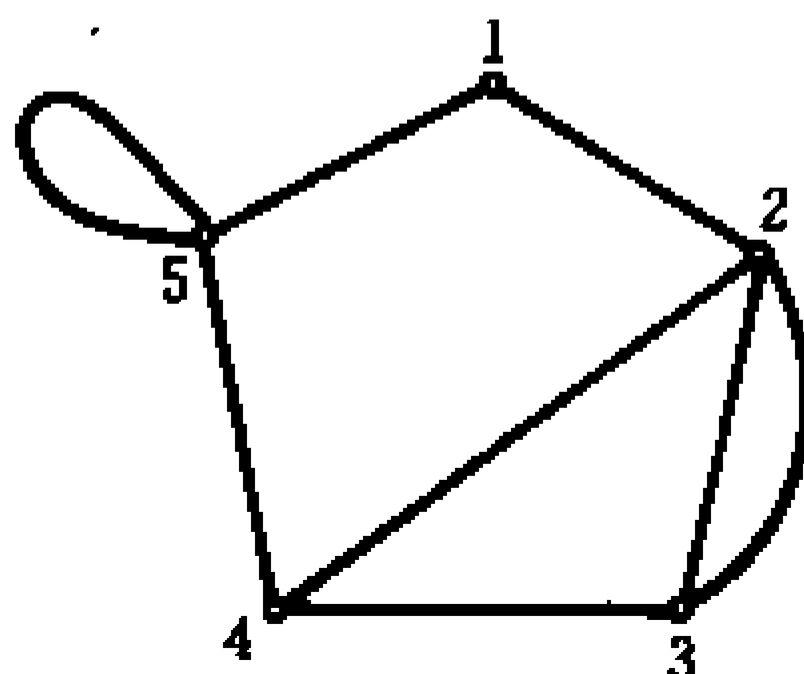


图 1.3-1

注意:在计算有环的顶点的度时,环算作两条边。

定义 1.3.2 如果一个图的每一个顶点都具有相同的度,则称这个图是**正则的**(regular graph)。

每个点的度均为 k 的正则图,称为 **k-正则图**。

为方便起见,称度为零的顶点为**孤立点**(isolated vertices)。度为 1 的顶点称为**悬挂点**(pendant vertices)。

定理 1.3.1 设 G 是一个(p,q)图,那么 G 的各个顶点度的和是边数的两倍

$$\sum_{v_i\in V(G)} \deg v_i = 2q$$

[证明] 因为每一条边与二个顶点关联,所以加上一条边就使得各点度的和增加 2。▌①

推论 1.3.1 在任何一个图 G 中,度为奇数的顶点的数目是偶数。

---

① 符号"▌"表示一个定理或者论断的证明结束。

［证明］ 设 V_1 和 V_2 分别是 G 中度为奇数和偶数的顶点集。由定理 1.3.1，有

$$\sum_{v\in V_1}\deg v + \sum_{v\in V_2}\deg v = \sum_{v\in V}\deg v = 2q$$

由于 $2q$ 和 $\sum_{v\in V_2}\deg v$ 均为偶数，故知 $\sum_{v\in V_1}\deg v$ 也必为偶数，即 $|V_1|$ 为偶数。∎

如果 $\deg(v)$ 是奇数，就说顶点 v 是**奇的**或**奇顶点**；如果 $\deg(v)$ 是偶数，就说顶点 v 是**偶的**或**偶顶点**。

在一个集会中，和奇数个人握手的人的个数是偶数。这是因为，如果用顶点表示人，用边表示互相握手的两个人，于是得到一个图。这个图就是描述集会中握手招呼的数学模型。和奇数个人握手的人相当于图中的奇顶点，由推论 1.3.1 知，和奇数个人握手的人的个数是偶数。

类似地有如下的问题：在一个有限个自然数的集合中与奇数个数字没有公因子的数字个数是偶数。用图来描述就是：每一个数对应一个顶点，两个顶点当且仅当相应的数字没有公因子时有边。由推论 1.3.1 即知上述结论成立。

1.4 道路与连通性

一个图的最基本的性质之一就是它是否连通。在这一节中，我们来阐明连通与非连通的图的基本结构。

定义 1.4.1 一个图 G 的一条途径(way)是一个顶点和边交替序列 $\mu=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{n-1}e_nv_n$，使对 $1\leqslant i\leqslant n$，e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i。v_0 和 v_n 分别称为途径 μ 的**起点**和**终点**，μ 中边的数目 n 称为它的长。

途径 μ 有时也称它为 (v_0,v_n) 途径。如果 $v_0=v_n$，称它为闭

的，否则称为开的。

若 $\mu=v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_n$ 和 $\mu'=v_ne_{n+1}v_{n-1}\cdots v_{m-1}e_mv_m$ 都是途径。把 μ 逆转后得到的途径 $v_ne_nv_{n-1}\cdots v_1e_1v_0$ 记为 μ^{-1}，而在 v_n 处将 μ 和 μ' 衔接在一起所得的途径记为 $\mu\mu'$。

途径 $\mu=v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_n$ 相连项构成的子序列 $v_ie_{i+1}v_{i+1}\cdots v_{j-1}e_jv_j$，称为 μ 的 (v_i,v_j) 节(section)。

若途径 μ 的边 $e_1e_2\cdots,e_n$ 均不同，则称为**链**(chian)。

定义 1.4.2 所有顶点均不相同(从而所有边必然都不相同)的途径称为**道路**(path)。一条闭道路称为**圈**(cycle)。

设 $P=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}$ 是一条道路，则 k 称道路的长，P 也可称为 (v_{i_1},v_{i_k}) 道路。

在图 1.4-1 所示的图中，$v_1e_3v_4e_4v_3e_6v_5e_7v_4$ 是一条途径；$v_1e_1v_2e_2v_3e_5v_6$ 是一条道路；

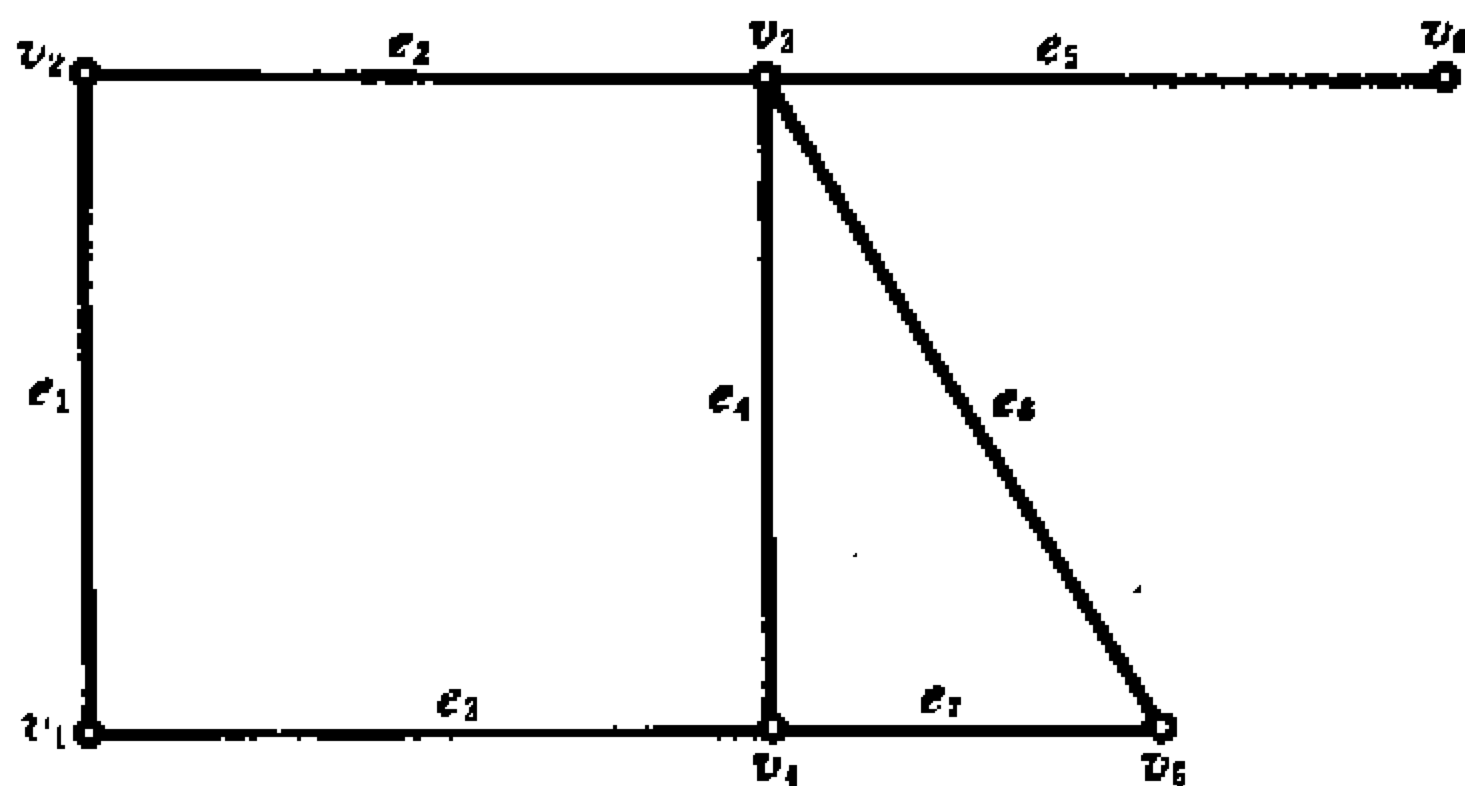


图 1.4-1

$v_1e_1v_2e_2v_3e_4v_4e_3v_1$ 是一个圈。有时为了方便起见我们只用顶点来表示途径、道路和圈。譬如上述的道路可以写成 $v_1v_2v_3v_6$，圈可以写成 $v_1v_2v_3v_4v_1$。

我们用 P_n 记由 n 个顶点构成的道路；用 C_n 记由 n 个顶点构成的圈。C_3 称为**三角形**。如果 n 为奇数则 C_n 称为**奇圈**；

如果 n 为偶数则 C_n 称为**偶圈**。长为 n 的圈称 n **圈**。

定义 1.4.3 设 u,v 是图 G 中的两个顶点，若在 G 中存在一条 (u,v) 道路，则称顶点 u 和 v **是连通的**(connected)。

定义 1.4.4 如果图 G 中每一对不同的顶点 u,v 都有一条 (u,v) 道路，则称图 G **是连通的**。

以 $u\equiv v$ 表示顶点 u 和 v 是连通的，那么这种顶点间的连通关系是一个等价关系，即

1°$u\equiv u$(反身性)；

2°$u\equiv v$，则 $v\equiv u$(对称性)；

3°$u\equiv v$，$v\equiv w$，则 $u\equiv w$(传递性)

这样，等价关系 $u\equiv v$ 便确定顶点集 V 的一个分类，把 V 分成非空子集 $V_1,V_2\cdots,V_k$，便得当且仅当两个顶点 u 和 v 属于同一子集 V_i 时，它们才是连通的，子图 $G[V_1]$，$G[V_2]$，…，$G[V_k]$称为 G 的**连通分支**或简称为**分支**(Compouent)。分支的个数记为 $k(G)$。

分支大于 1 的图称为**分离图**或**非连通图**。

显然，当且仅当 G 只有一个分支时，G 是连通的。图 1.4-2 画出了连通图和分离图。

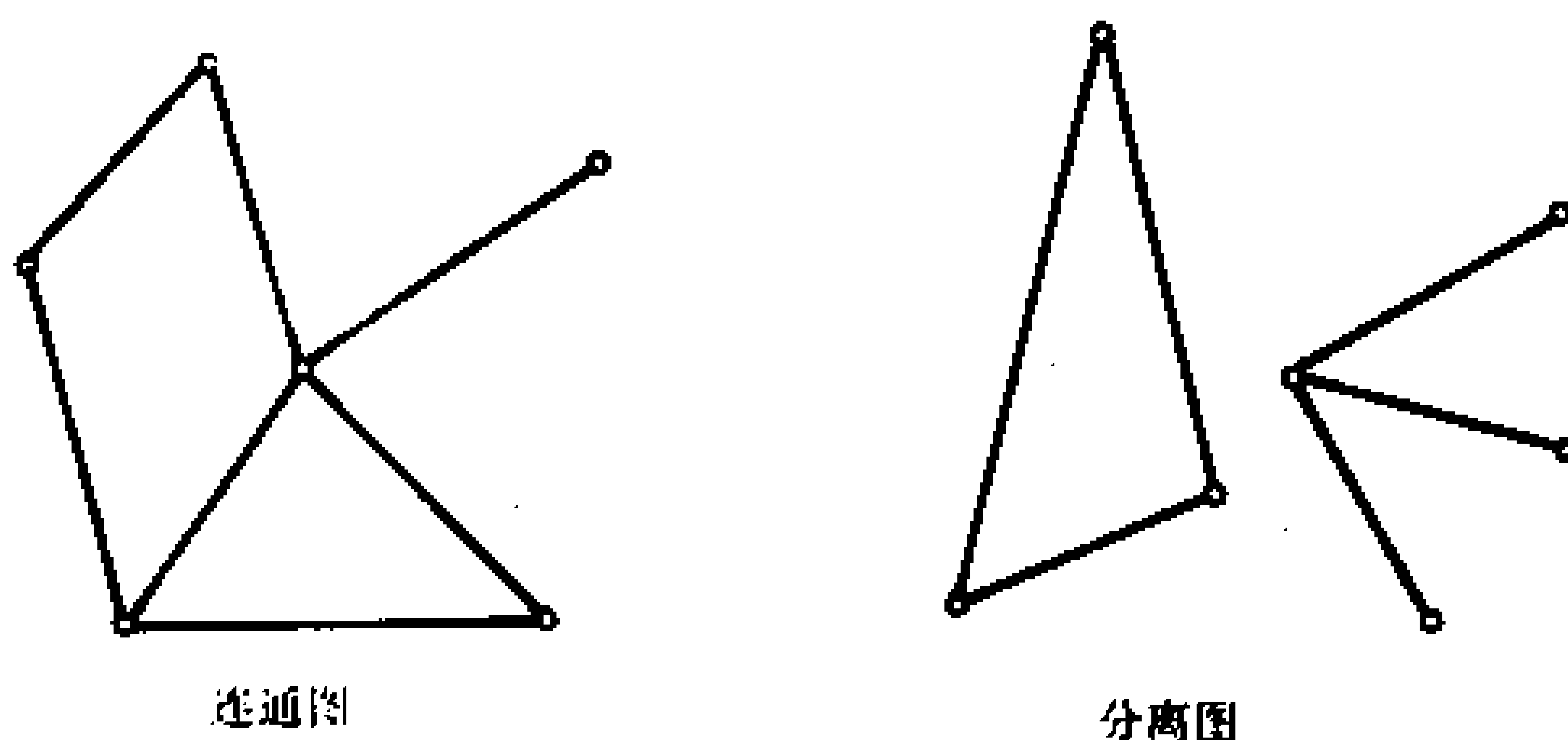


图 1.4-2

定理 1.4.1 若图 G 是非连通的，则 $\overline{G}$ 连通。

［证明］ 设 u，v 是 G 中的任意两个顶点。若 u 和 v 在 G 中不邻接，则在 $\overline{G}$ 中它们邻接。若 u 和 v 在 G 中邻接，它们属于 G 的同一分支。在另一个分支中有一个顶点 w，在 $\overline{G}$ 中 u 和 v 均与 w 邻接，即 uwv 是一条道路。▮

定义 1.4.5 设 $u,v\in V(G)$，当存在联结 u 和 v 的道路时，这种道路中最短的道路称为**测地线**，测地线的长称为 u 与 v 之间的**距离**，记作 $d(u,v)$。如果不存在联结 u,v 的道路，则 $d(u,v)=\infty$。

定理 1.4.2 当且仅当 G 不含奇圈时 G 是二部图。

［证明］ 设 G 是具有二分划 (V_1,V_2) 的二部图，并设 $C=v_0v_1\cdots v_kv_0$ 是 G 的一个圈。不失一般性可认为 $v_0\in V_1$，因为 $v_0v_1\in E$ 且 G 是二部图，所以 $v_1\in V_2$。同理 $v_2\in V_1$。一般来说，$v_{2i}\in v_1$，而 $v_{2i+1}\in V_2$。又因为 $v_0\in V_1$，所以 $v_k\in V_2$，因而对某个 i 有 $k=2i+1$，即 C 是偶圈。

显然，仅对连通图证明逆命题就够了。设 G 是一个不含奇圈的连通图。任选一顶点 u 且定义 V 的一个分划 (V_1,V_2)

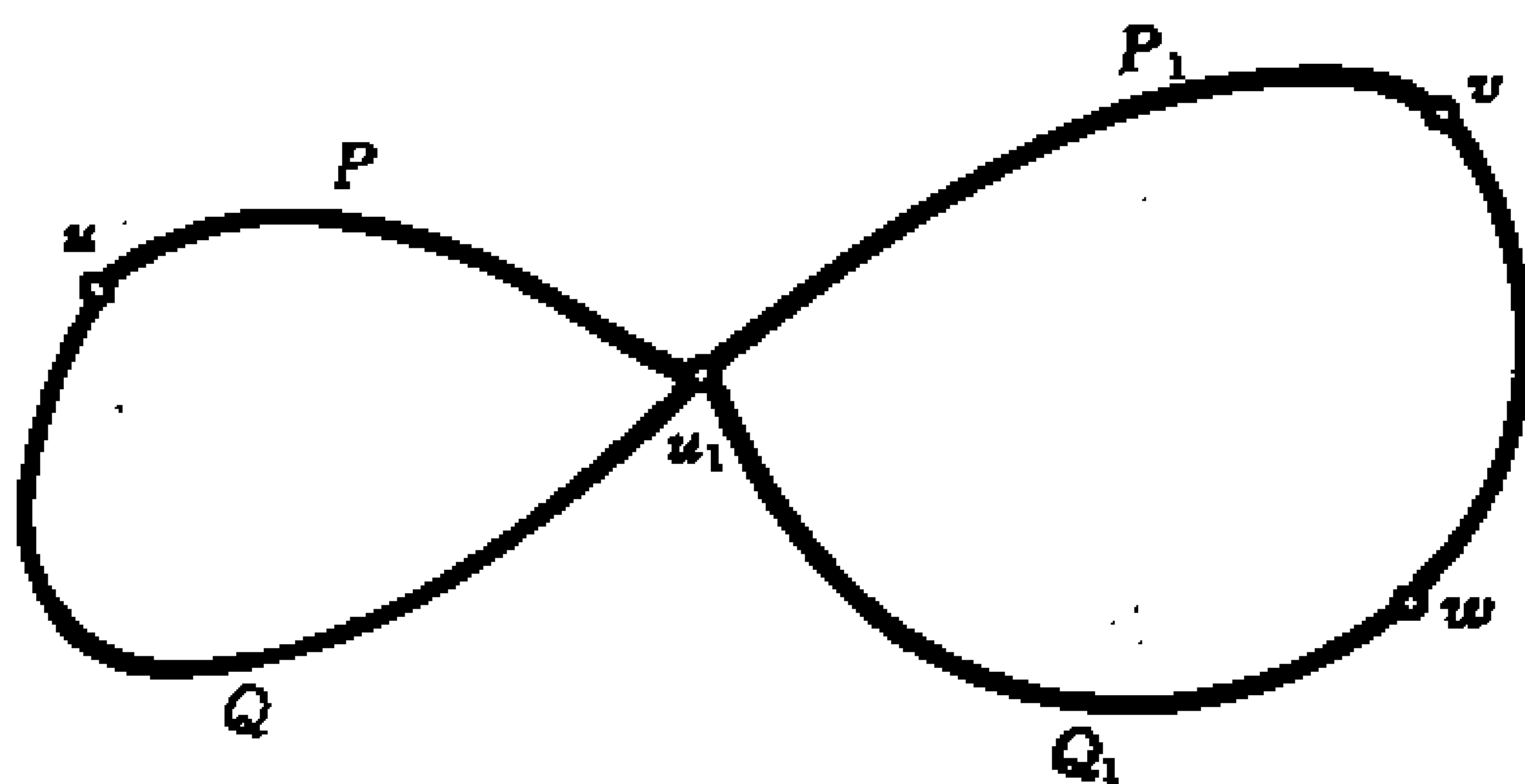


图 1.4-3

如下：

$$V_1 = \{x \in V | d(u,x) \text{ 是偶数}\}$$
$$V_2 = \{y \in V | d(u,y) \text{ 是奇数}\}$$

我们将证明(V_1,V_2)是G的一个二分划。设v和w是V_1的两个顶点，又设P是最短的(u,v)道路，Q是最短的(u,w)道路，以u_1记P和Q的最后一个公共顶点。因为P和Q是最短道路，P和Q两者的(u,u_1)节也是最短的(u,u_1)道路，故有相同的长度。现因P和Q二者的长都是偶数，所以P的(u_1,v)节P_1和Q的(u_1,w)节Q_1有相同的奇偶性。由此可知(v,w)道路$P_1^{-1}Q_1$有偶数长度，若v与w邻接，则$P^{-1}Qwv$是偶圈，此与假设矛盾。故V_1中任意两个顶点均不邻接。同样，V_2中任意两个顶点也不邻接。▮

最后再介绍几个名词。

定义 1.4.5 图G中最短圈的长称为G的**圈长**，记作$g(G)$，G中最长的圈长称为G的**周长**，记作$c(G)$。

定义 1.4.6 一个连通图G中任何一条最长的测地线的长叫做G的直径，记作$d(G)$

1.5 图的运算

设G_1和G_2是两个图，若G_1和G_2无公共顶点，则称它们是**不相交的**(disjoint)；若G_1和G_2无公共边，则称它们是**边不重的**(edge disjoint)。

设G_1和G_2是两个无孤立点的图。

(1) G_1和G_2的**并**(union)，记作$G_1 \cup G_2$：由G_1和G_2中所有边组成的图。

若G_1和G_2是边不重的，则$G_1 \cup G_2$称为G_1和G_2的边不重并。

在构造两个图的并时，必须首先确定 G_1 的哪些顶点可以和 G_2 的顶点等同起来。因为相同的顶点在并中只能出现一次。

(2) G_1 和 G_2 的交(cap)，记作 $G_1 \cap G_2$：由 G_1 和 G_2 的公共边组成的图。

(3) G_1 和 G_2 的差(difference)，记作 $G_1 - G_2$：由 G_1 中去掉 G_2 中的边组成的图。

(4) G_1 和 G_2 的环和(ring sum)，记作 $G_1 \oplus G_2$：在 G_1 和 G_2 的并中去掉 G_1 和 G_2 的交所得到的图，即

$$
\begin{aligned}
G_1 \oplus G_2 &= (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2) \\
&= (G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1)
\end{aligned}
$$

设 G_1 和 G_2 如图 1.5-1 所示，它们的并，交、差及环和分别如图 1.5-2 所示。

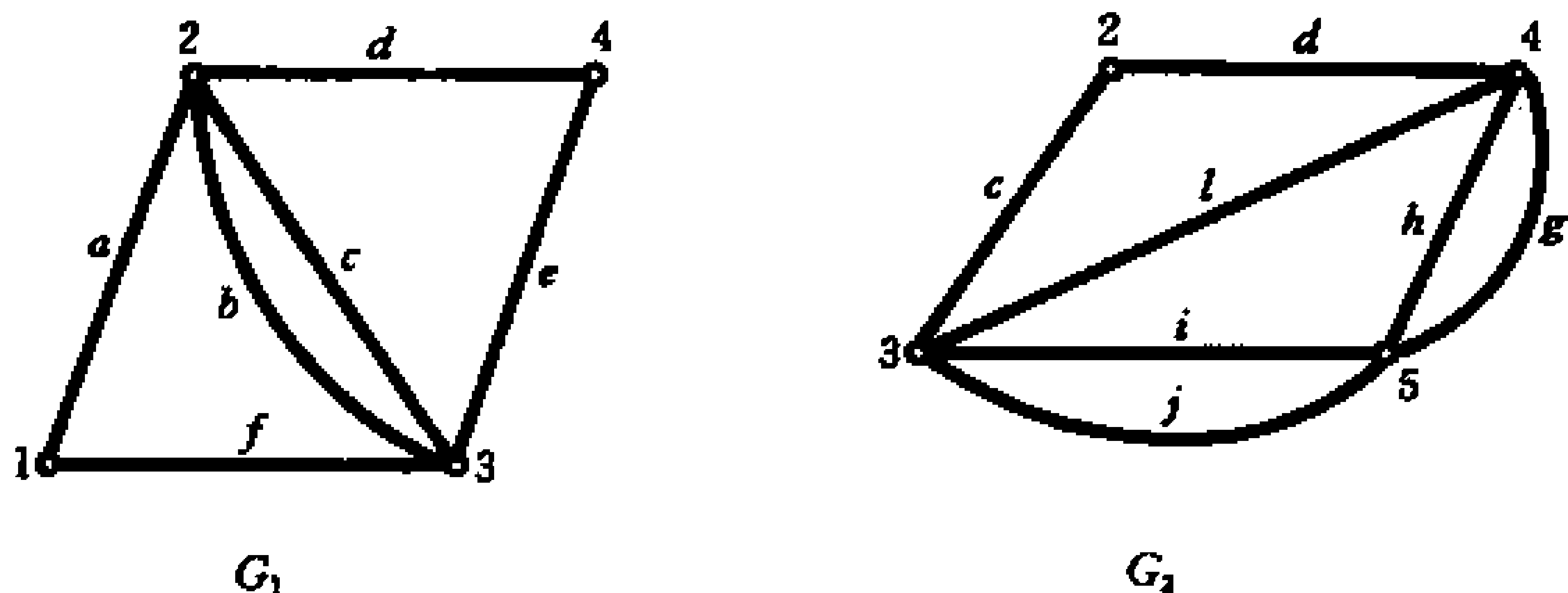


图 1.5-1

不难验证，环和运算满足交换律和结合律

$$G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1;$$

$$G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) = (G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$$

环和运算是图的一种重要运算，实际上是模 2 运算，在后面的讨论中将要经常用到这种运算。

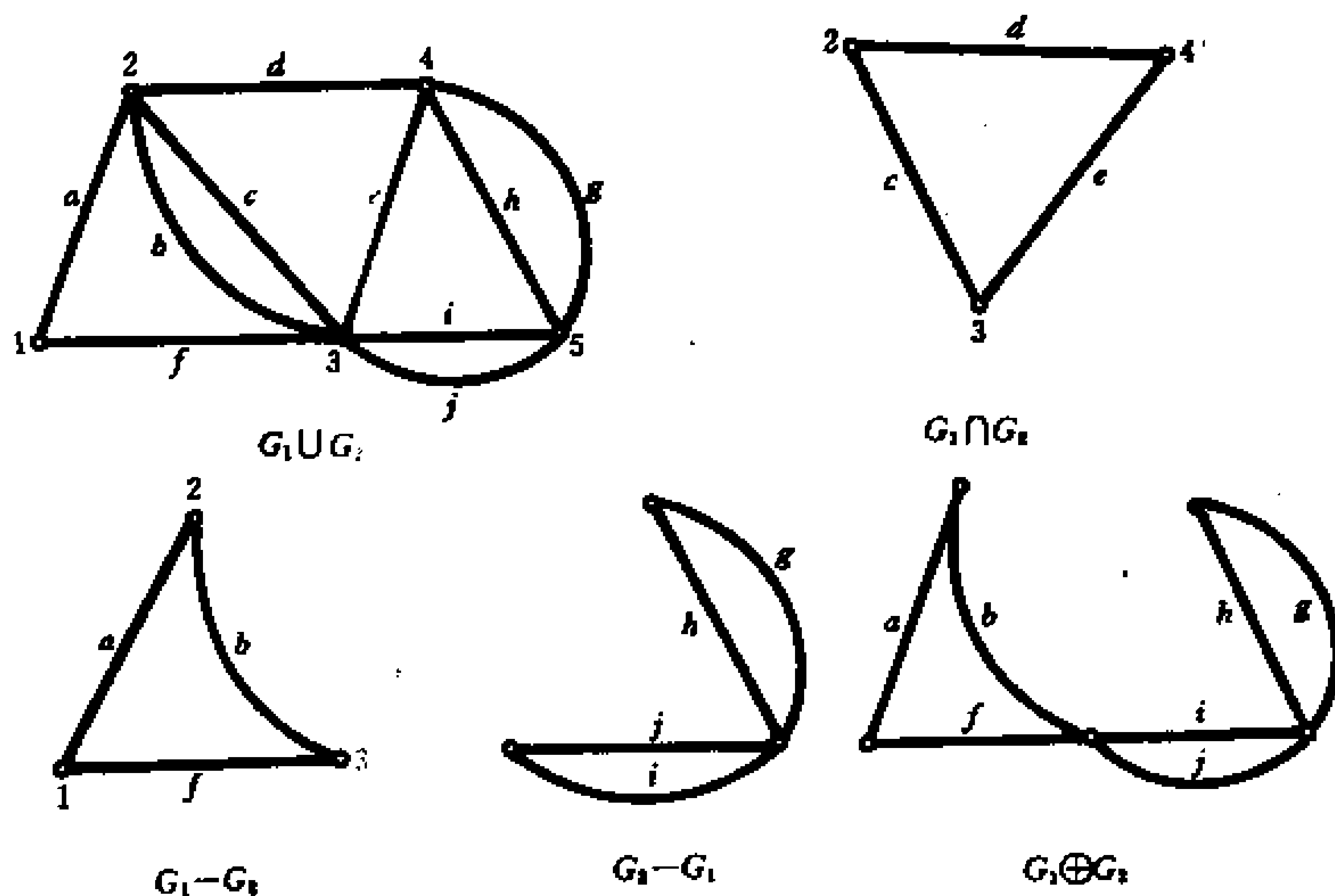


图 1.5-2

设 G 是一个连通图，则 n 个与 G 同构的分支构成的分离图用 nG 表示，于是我们可以将每个图写成 $\cup n_i G_i$ 的形式，其中当 $i \neq j$ 时，G_i 与 G_j 不同。

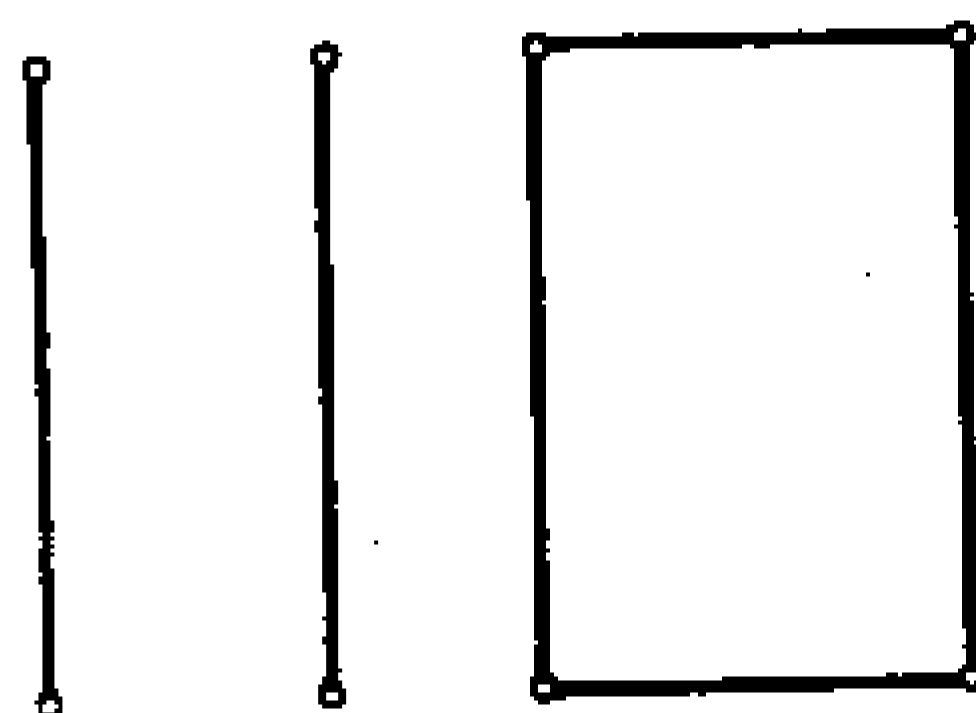


图 1.5-3

例如，图 1.5-3 所示的图 G 可以写成

$$G = 2K_2 \cup C_4$$

当我们沿某一闭链行走时，每一次回到一个顶点就确定一个圈。因此任一闭链必为圈和圈的边不重并。

习 题 一

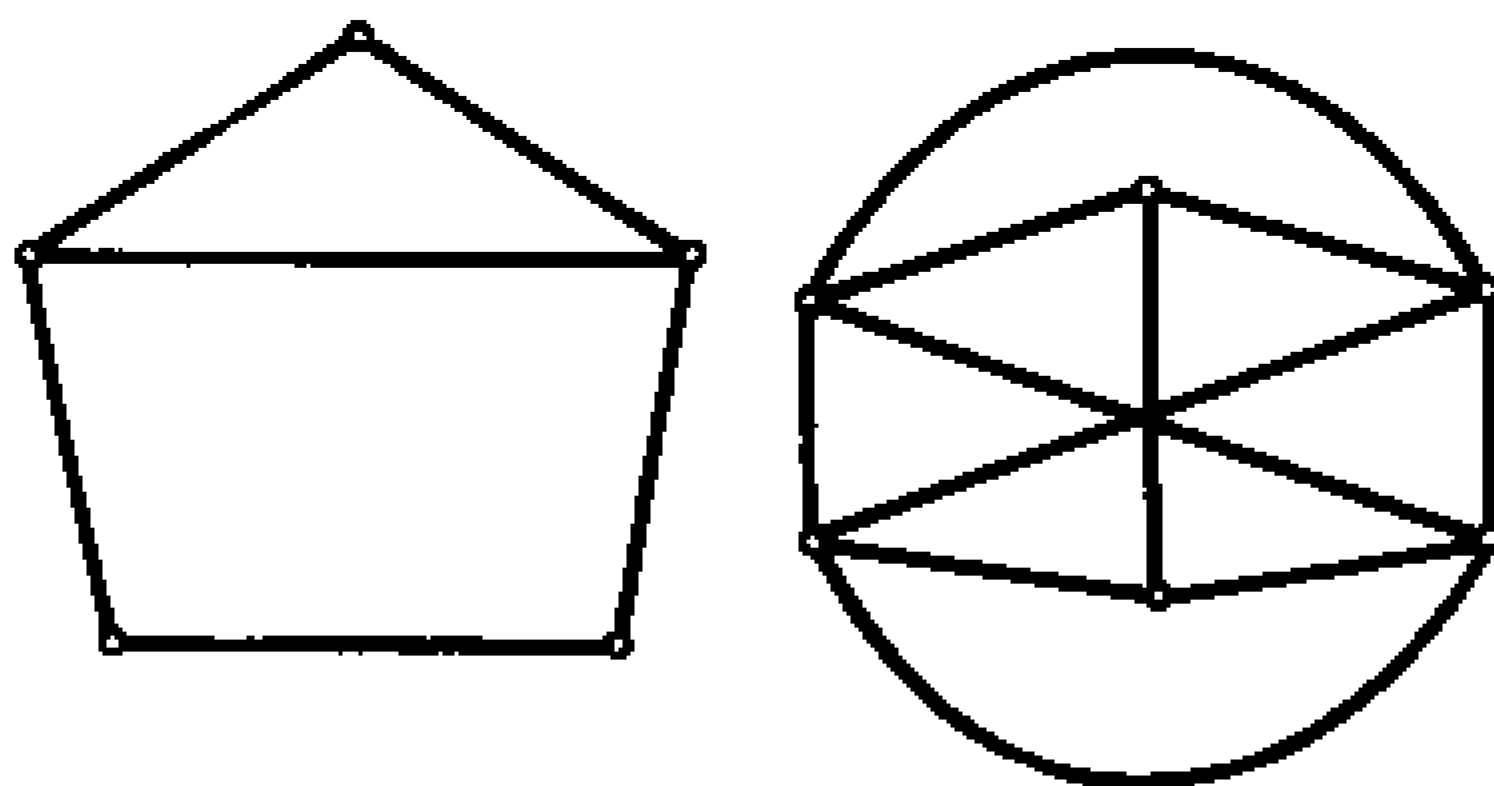
1-1 画一个图，顶点的度是

(1) 2,2,2,2,2,2

(2) 2,3,4,5,6

(3) 3,3,4,5,5,6

1-2 找一链，包含图中所有的边。



题 1-2 图

1-3 证明在 n 阶图连通图中

(1) 至少有 $n-1$ 条边；

(2) 如果边数大于 $n-1$，至少有一个圈；

(3) 如果恰有 $n-1$ 条边，则至少有一个顶点的度为奇数。

1-4 设 G 为 n 阶完全图，试问

(1) 有多少圈？

(2) 包含 G 中某边 e 的圈有多少？

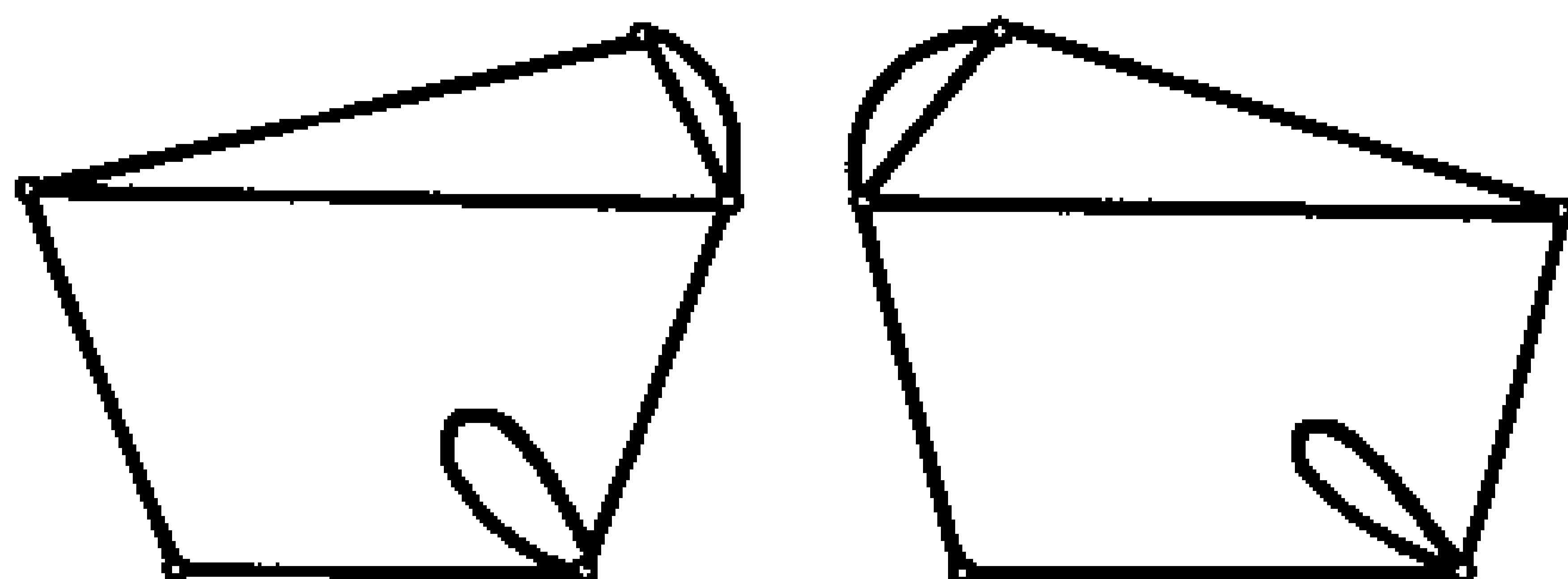
(3) 任意两顶点间有多少道路？

1-5 证明：若边 e 在 G 的某一闭链中，则 e 在 G 的某一圈中。

1-6 证明：若图 G 的顶点度数的最小值 $\geqslant 2$，则 G 有圈。

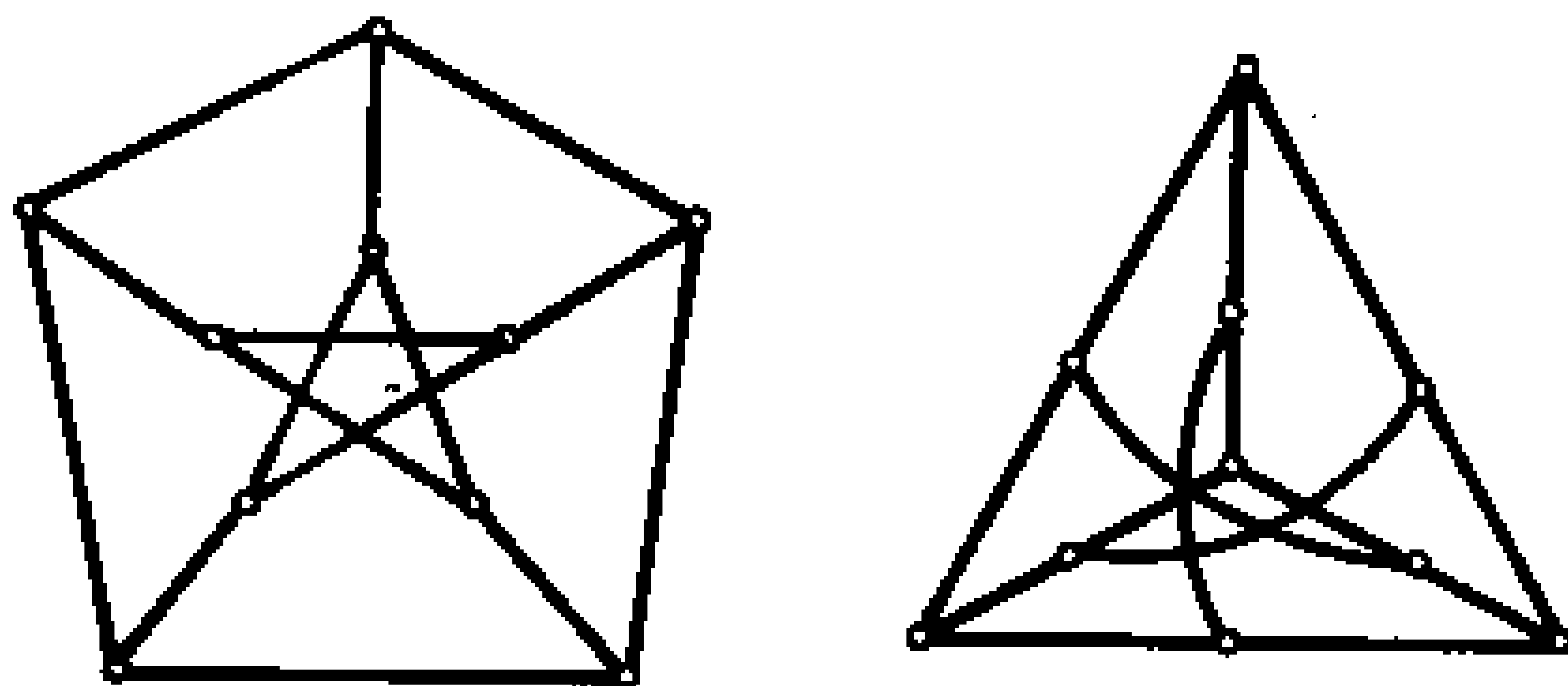
1-7 证明：一个连通图 P 是一条道路，当且仅当 P 中有两个顶点的度为 1，其余顶点的度均为 2。

1-8　证明下面两个图不同构。



题 1-8 图

1-9　证明下面的图是同构的。



题 1-9 图

1-10　证明：完全图的每个导出子图是完全图。

1-11　若 G 是一个 n 阶不完全图，则 G 必同构于 K_n 的一个子图。

1-12　下列各图的所有边，在哪个图中构成一条链？在哪个图中构成一条闭链？

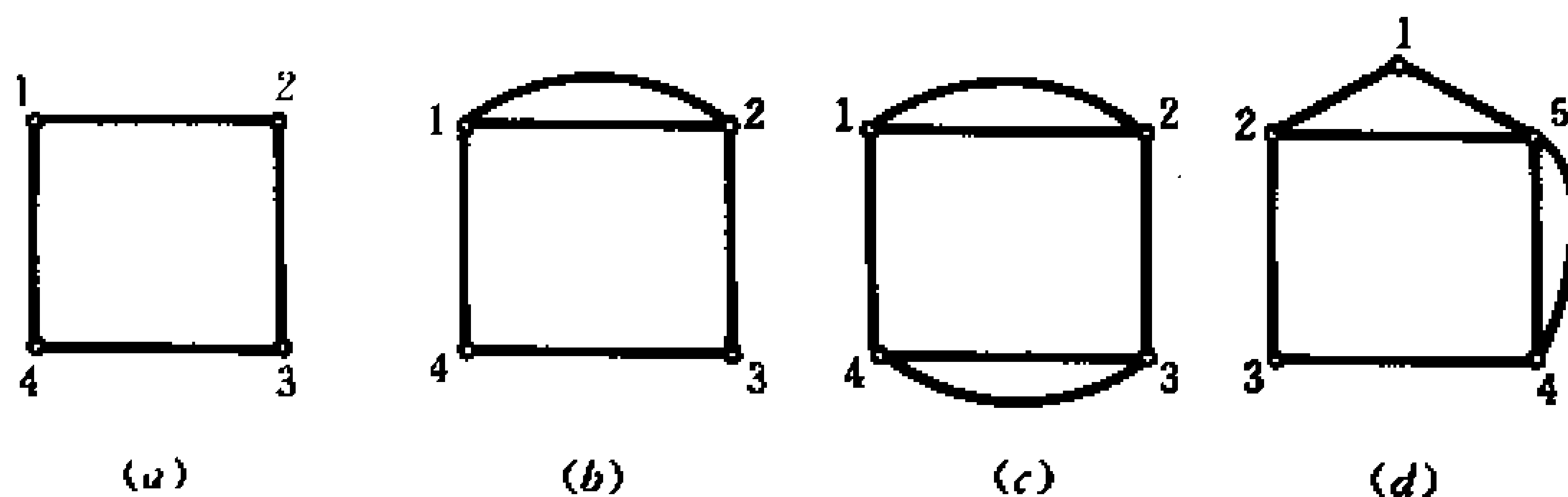
1-13　设 G_1, G_2 为已知二图，试作出它们的并，交与环和。

1-14　设 G 是简单图，证明 $q=\binom{p}{2}$ 成立当且仅当 G 为完全图。

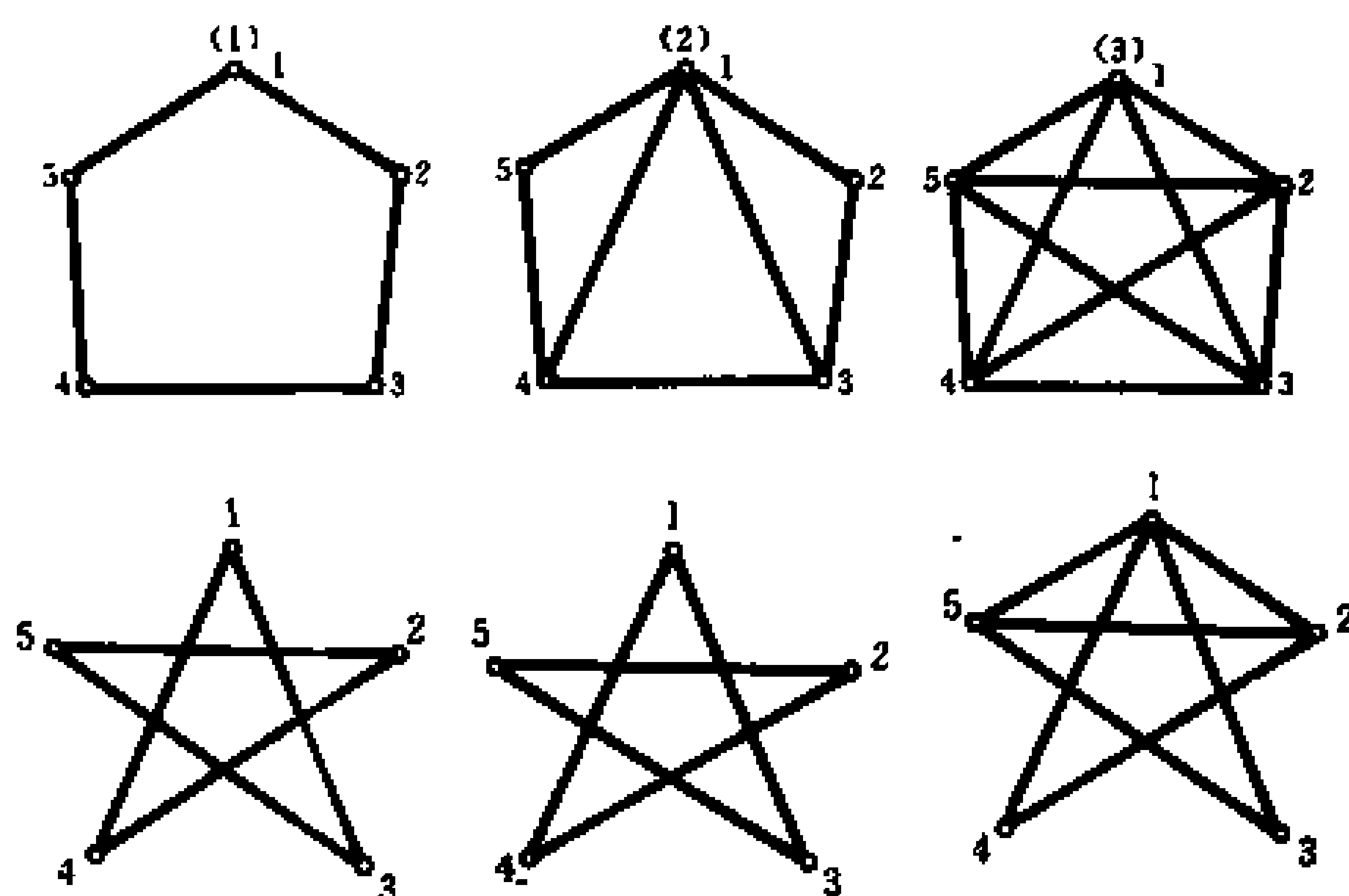
1-15　证明 $|E(K_{m,n})|=mn$；若 G 是二部图，则 $q\leqslant p^2/4$。

1-16　证明：如果 G 中有一条 (u,v) 链，则 G 中也存在一条 (u,v) 道路。

1-17　证明：G 为连通的充要条件是对 $V(G)$ 的每一个分成二个非



题 1-12 图



题 1-13 图

空子集 V_1 和 V_2 的划分，但存在一条边，它的两个端点分别属于 V_1 和 V_2。

1-18　证明：若 G 为简单图，且 $q>\binom{p-1}{2}$，则 G 是连通的。

1-19　证明：若 $e\in E(G)$，则

$$k(G)\leqslant k(G-e)\leqslant k(G)+1$$

1-20　设 G 为连通的简单图，但不是完全图，则存在如下的三个顶点 u、v 和 w，满足 $uv,vw\in E(G)$，$uw\notin E(G)$。

第二章　树

树是图论中一种重要的图类，它是基尔霍夫在解决电路理论中求解联立方程问题时首先提出来的。可惜他的发现超越了时代，因而长期没有引起重视。树与图中其他一些基本概念，如圈、割集等有着密切的联系，是图论中比较活跃的领域。现在树的概念已经越来越广泛地被应用到各个科学领域。本章讨论树、生成树的概念和他们的性质。

2.1　树的特性

定义 2.1.1　不含圈的连通图称为**树**(tree)，每个分支都是树的分离图称为**森林**(forest)，树中的边称为**树枝**(branch)。

图 2.1-1 中画出有 6 个顶点的各种不同的树。

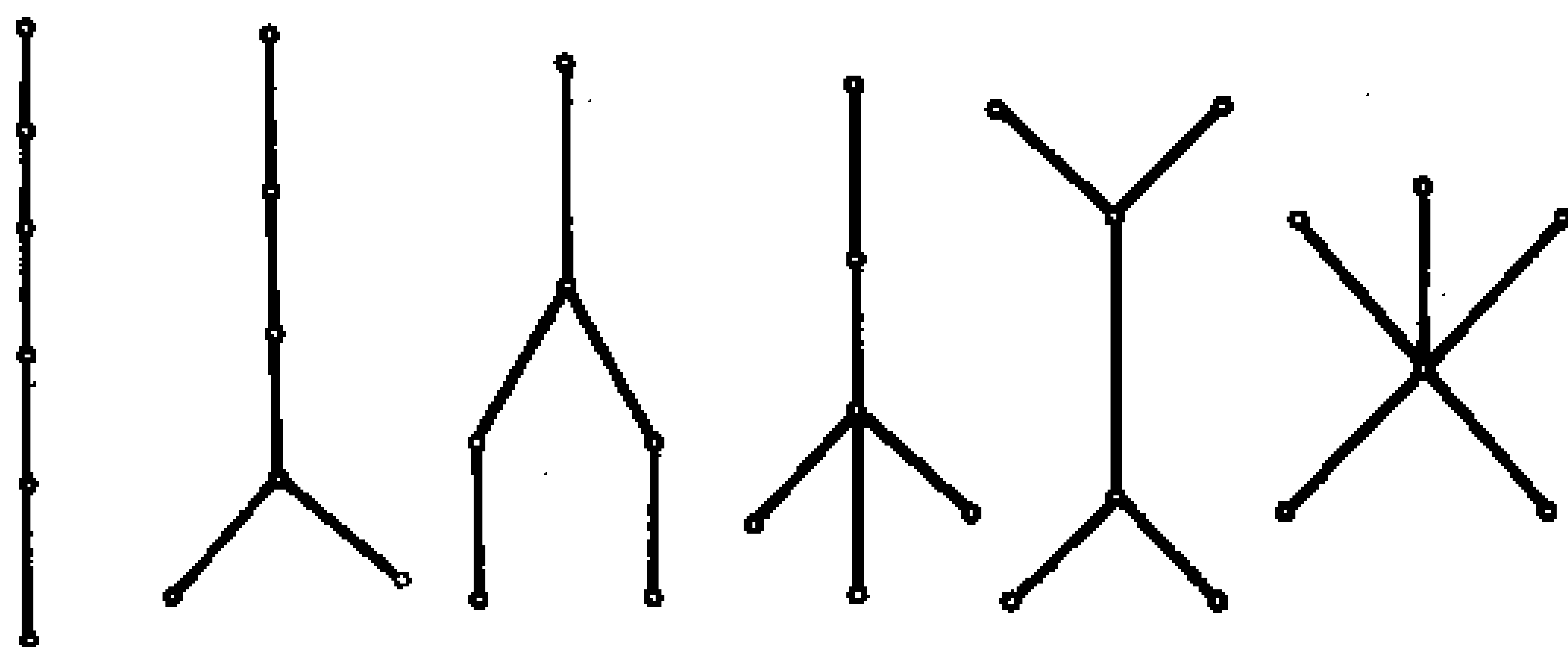


图 2.1-1　有 6 个顶点的树

下面我们来讨论树的性质。

定理 2.1.1 当且仅当简单图 G 中任意两个顶点均由唯一道路连接时，G 才是一棵树。

［证明］ 先证必要性。因为树是连通的，所以树中任意两个顶点之间必有道路。

如果在 G 中存在两条不同的 (u,v) 道路 P_1 和 P_2，因为 $P_1 \neq P_2$，所以存在 P_1 的一条边 $e=(x,y)$，$e \notin P_2$。显然，$(P_1 \cup P_2)-e$ 是连通的，所以它含有一条 (x,y) 道路 P。但这样一来 $P+e$ 将是 G 中的一个圈，这与 G 是树的假设矛盾。

再证充分性。G 是连通的。如果 G 中有一条圈 C，那么 C 上的任意两顶点之间均有两条不同的道路，此与假设矛盾。▮

推论 2.1.1 在树中不相邻的两个顶点间添上一条边，则恰好得到一个圈。

［证明］ 设 u、v 是树 G 中任意两个不相邻的顶点。由定理 2.1.1，有唯一的一条 $(u、v)$ 道路 P，如果添上一条以 u、v 为端点的边 e，那么 $P+e$ 便是 $G+e$ 中唯一的一条圈(图 2.1-2)。▮

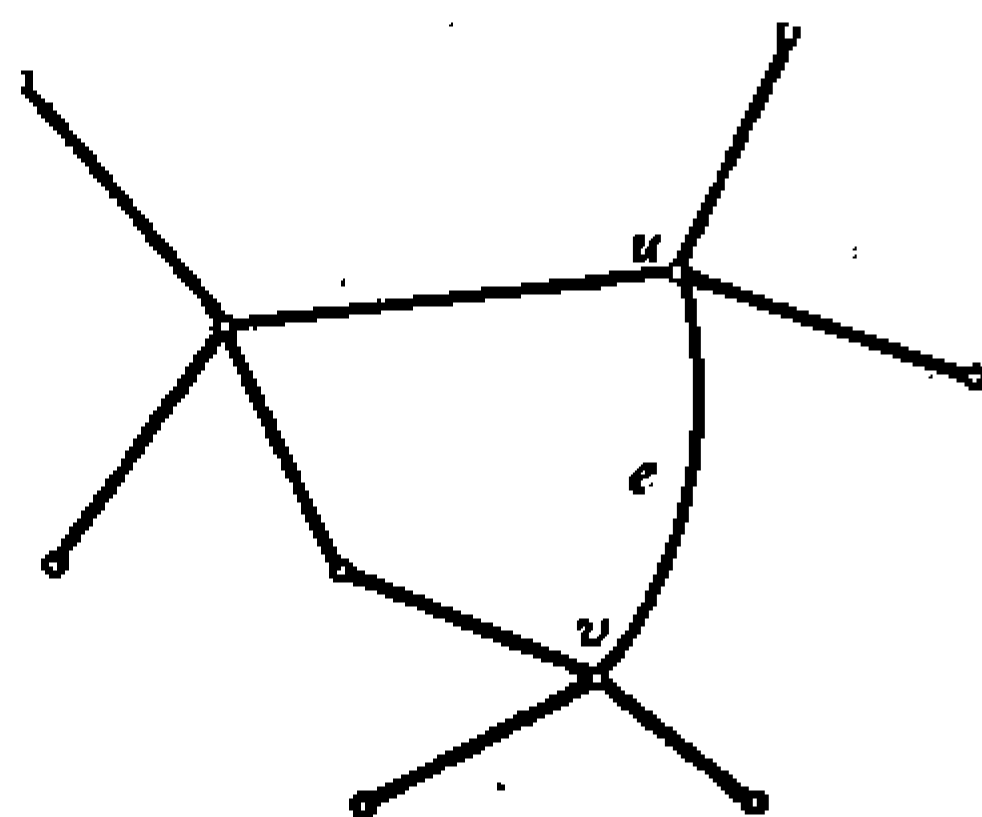


图 2.1-2

定理 2.1.2 p 阶图 G 是一棵树，当且仅当 G 是有 $p-1$ 条边的连通图。

［证明］ 必要性。用归纳法。当 $p=1$ 或 2 时，命题是显然的。假设命题对少于 p 个顶点的所有树均成立。由于树 G 中两顶点间道路的唯一性，移去 G 中的任何一条边，均使其变成有两个分支 G_1 和 G_2 的分离图。设 G_1 与 G_2 的边数和顶

点分别为 q_1, p_1 和 q_2, p_2 由归纳法的假设，有

$$q_1 = p_1 - 1, q_2 = p_2 - 1$$

又 $p_1 + p_2 = p$，故得

$$q = q_1 + q_2 + 1 = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + 1$$
$$= p_1 + p_2 - 1 = p - 1$$

充分性。假设 G 中有一个 n 圈，则这个圈上有 n 个顶点和 n 条边。对于其余 $p-n$ 个不在这个圈上的顶点，每一个顶点有一条关联于它的边且这条边在联结它与圈上的一顶点的最短道路上。每一条这种边都不同，所以 $q \geqslant p$，与假设矛盾。▮

推论 2.1.2 设 G 是有 p 个顶点 k 个分支的森林，那么 G 的边数为 $p-k$。

这是因为森林的每个分支的边数比顶点数少 1，故命题为真。▮

推论 2.1.3 设图 G 的边数为 q，顶点数为 p。如果 G 无圈且 $q=p-1$，则 G 是一棵树。

［证明］ 因为 G 无圈，所以 G 的每个分支都是树。设 G 有 k 个分支，由推论 2.1.2，得 $q=P-k$，按已知条件：$q=p-1$，故有 $k=1$，即图 G 是连通的，再由定理 2.1.2 知，G 是一棵树。▮

推论 2.1.4 在树中至少存在两个度为 1 的顶点。

［证明］ 设树 G 的边数为 q，顶点数为 p，因为

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$$

由定理 2.1.2，有

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2(p-1) = 2p - 2 \qquad (2.1\text{-}1)$$

如果 G 的每个顶点的度均大于或等于 2，那么

$$\sum_{v\in V(G)}\deg(v)\geqslant 2p$$

这与等式(2.1-1)矛盾。为要使等式(2.1-1)成立,故必须至少有两个顶点的度为1。∎

综上所述,关于树有下列的等价命题:

(1) G是一棵树。

(2) G的任意两个顶点由唯一道路联结。

(3) G是连通的,且$q=p-1$。

(4) G是无圈的,且$q=p-1$。

(5) G无圈,且若G的任意两个不邻接的顶点联一条边e,则$G+e$中恰有一个圈。

2.2 割边与割点

在定理2.1.2必要性的证明中曾指树具有这样的性质,即删去其中任何一条边,均可使G变成分离图。反之,具有这种性质的连通图一定是一棵树。下面我们进一步讨论这个问题。

定义2.2.1 如果在图G中删去一条边后,图G的分支数增加,则称此边为G的**割边**(cut-edge)

定义2.2.2 如果在图G中去掉一个顶点(自然同时去掉与该顶点相关联的所有边)后图的分支数增加,则称该顶点为G的**割点**(cut vertex)。

例如在图2.2-1所示的图中,e_1是割边,v_1和v_2均为割点。需要指出的是e_2也是割边。这是因为去掉边e_2后,G变成有一个孤立点u和一个连通分支的分离图。

关于割边和割点,我们有下面的定理。

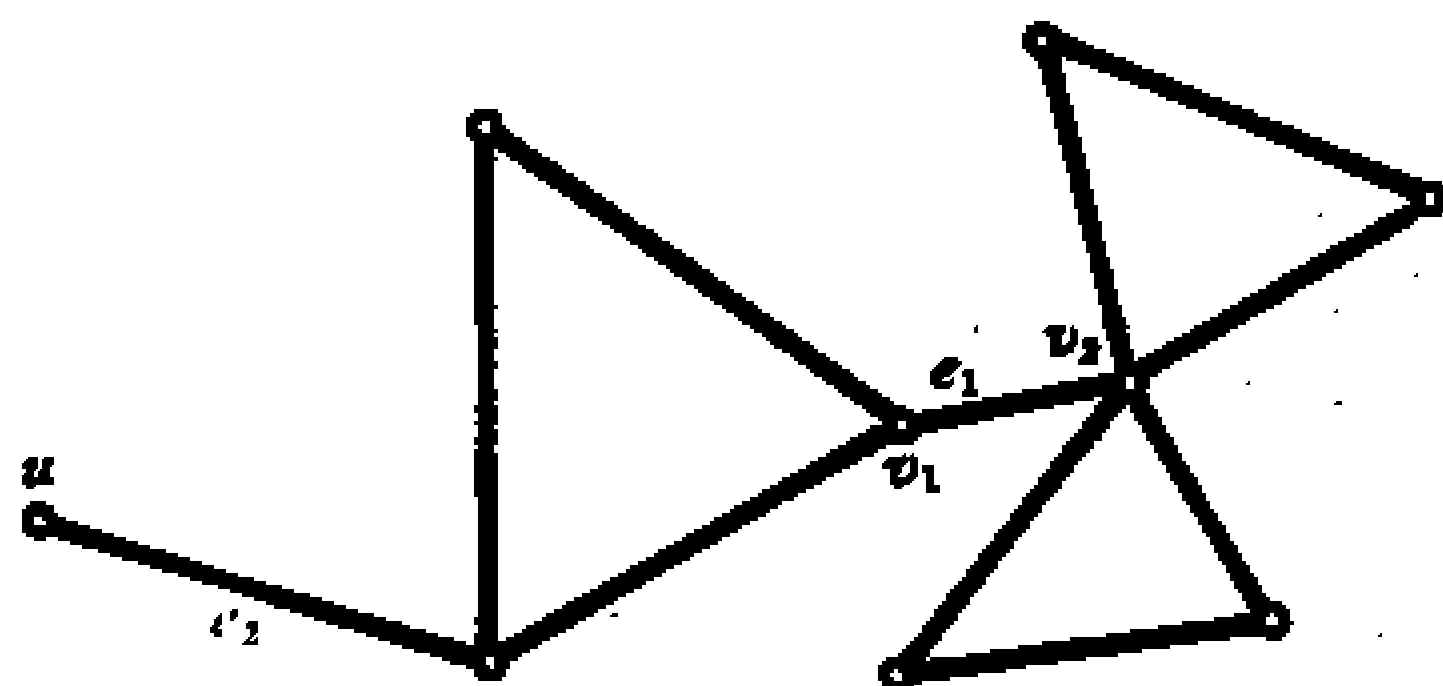


图 2.2-1

定理 2.2.1 当且仅当 G 的一条边 e 不包含在 G 的圈中时，e 才是割边。

[证明] 设 e 是 G 的一条割边。由于 $G-e$ 的分支数大于 G 的分支数，所以在 G 中必然存在顶点 u 和 v，它们在 G 中连通，但在 $G-e$ 中不连通，因此，在 G 中存在某条 $(u、v)$ 道路 P，它必通过 e。设 $e=(x,y)$，且在道路 P 上 x 前于 y。在 $G-e$ 中，P 有一节使 u 与 x 联结，另有一节使 y 与 v 联结（见图 2.2-2）。若 e 在某圈 C 中，则在 $G-e$ 中 x,y 将由道路 $C-e$ 相联结。于是 u 和 v 在 $G-e$ 中成为连通的，此为矛盾。

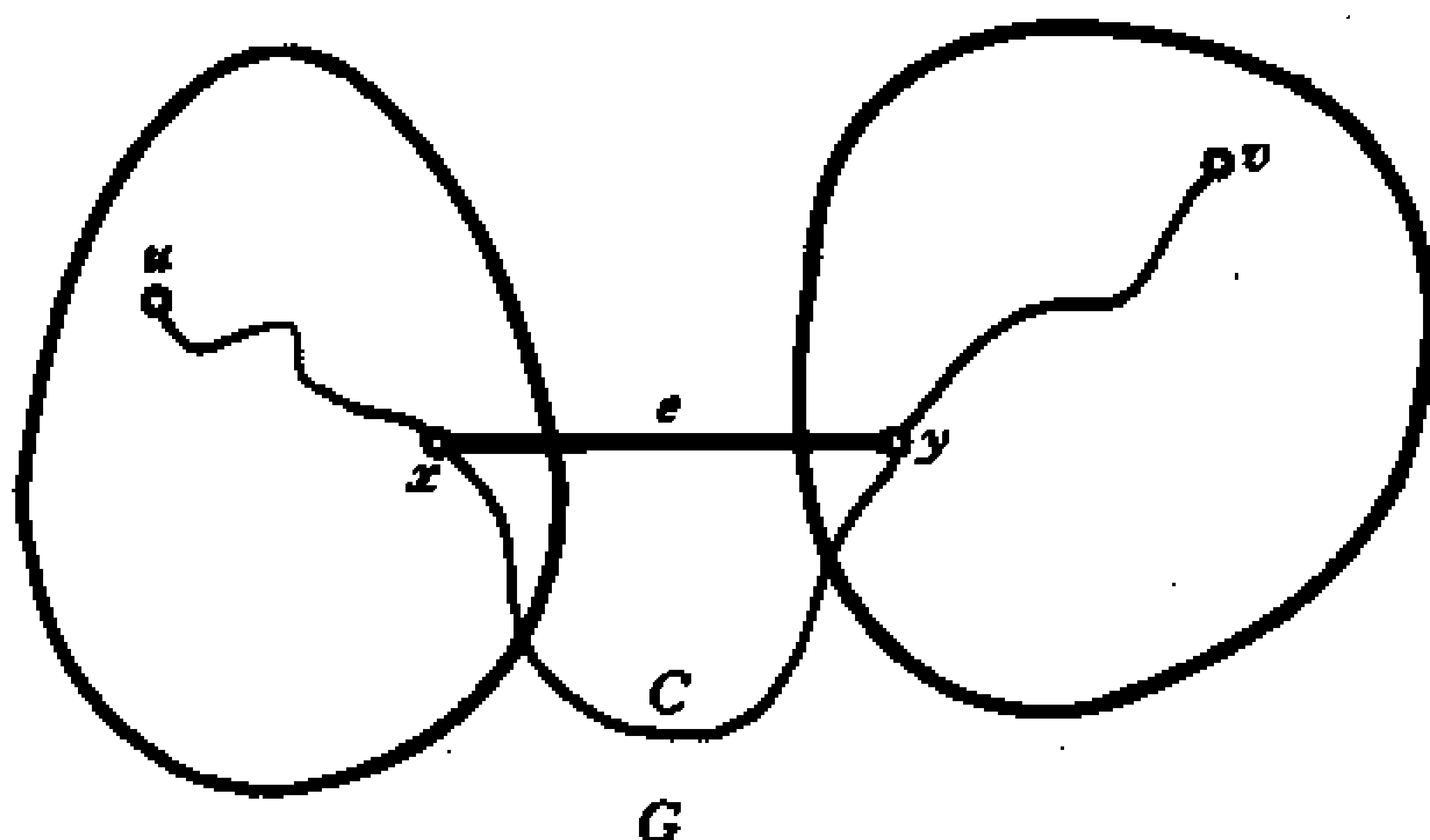


图 2.2-2

反之，假设边 $e=(x,y)$ 不是割边，那么 $G-e$ 和 G 的分支

数相同。由于在 G 中存在一条 (x,y) 道路(即边 (x,y)),所以 x 和 y 均在 G 的同一分支中。于是 x,y 在 $G-e$ 的同一分支中,故在 $G-e$ 中存在一条 (x,y) 道路 P,这样边 e 就在 G 的圈 $P+e$ 中。▮

推论 2.2.1 当且仅当连通图 G 的每一条边均为割边时,G 才是一棵树。

[证明]设 G 是一棵树,且 $e\in E(G)$,由于 G 无圈,所以 e 不在圈中,由定理 2.2.1 知,e 是割边。

反之,若连通图 G 不是树,则 G 中有圈,那么圈中的边均不是割边。▮

定理 2.2.2 当且仅当在 G 中存在与顶点 v 不同的两个顶点 u 和 w,使所有的 (u,w) 道路都通过 v 时,v 才是割点。

[证明] 设 v 是图 G 的一个割点,则 $G-v$ 是至少有两个分支的分离图。令 U 是由其中一个分支的顶点构成,W 是由其余顶点构成,从而形成 $V(G)-\{v\}$ 的一个划分。于是任何两个顶点 $u\in U$ 和 $w\in W$ 各在 $G-v$ 的不同分支中。因此,G 中的每条 (u,w) 道路都含有 v。

反之,若 v 在 G 的每条联结 u 和 w 的道路上,则在 $G-v$ 中不能有一条联结 u 和 w 的道路,从而 $G-v$ 是不连通的,即 v 是 G 的割点。▮

定理 2.2.3 一个连通图 G 至少有二个顶点不是割点。

[证明] 令 u 和 v 是在 G 中有最大距离的两个顶点。又假设 v 是割点,则有一顶点 w,它与 u 在 $G-v$ 的不同的分支中。从而 v 在每一条联结 u 和 w 的道路上,所以 $d(u,w)>d(u,v)$。这是不可能的,故顶点 v,类似地顶点 u 不是割点。▮

定理 2.2.4 树 G 中所有度大于 1 的顶点都是割点。

[证明] 若 $\deg(v)=0$,v 显然不是割点。

若 $\deg(v)=1$，则 $G-v$ 的边数比顶点数少 1，且无圈，所以 $G-v$ 仍是一棵树，因而 $G-v$ 是连通的，故 v 不是割点。

若 $\deg(v)>1$，则存在与 v 邻接的不同的顶点 u 和 w。道路 uvw 是且仅是 G 中一条 $(u、w)$ 道路，于是，在 G 中去掉 v 及其与 v 关联的边后，图 $G-v$ 中没有 $(u、w)$ 道路，因而 $G-v$ 成为分离图，故 v 是割点。▌

定义 2.2.3 没有割点的非平凡的连通图称为**不可分图**(non separable graph)。

定理 2.2.5 不可分图的任一边至少在一个圈中。

[证明] 设 e 是不可分图 G 的任一边，$e=(x,y)$ 因为 x，y 都不是割点，所以图 $G-e$ 是连通的，故在 $G-e$ 中必有一条 (x,y) 道路 P。于是 $P+e$ 就构成 G 中的一个圈。▌

综上所述，对割点和割边我们分别有下面的等价命题。

令 v 是连通图 G 的一个顶点。下面的陈述是等价的：

(1) v 是 G 的一个割点。

(2) 存在与 v 不同的两个顶点 u 和 w，使 v 在每一条 $(u、w)$ 道路上。

(3) 存在一个顶点集 $V-\{v\}$ 分成子集 U 和 W 的划分，使得对任何两个顶点 $u\in U$ 和 $w\in W$，顶点 v 在每一条 $(u、w)$ 道路上。

令 e 是连通图 G 的一条边。下列陈述是等价的：

(1) e 是 G 的割边。

(2) e 不在 G 的任何圈中。

(3) 存在 G 的顶点 u 和 v，使边 e 在每一条联结 u 和 v 的道路上。

2.3 生成树

定义 2.3.1 如果 T 是 G 的一个生成子图而且又是一棵树，则称 T 是图 G 的一棵**生成树**(spanning tree)。对分离图来说，则称为**生成森林**(spanning forest)。

生成树 T 中的边称为**树枝**，属于 G 而不属于 T 的边称为**连枝**(cotree)。

图 2.3-1 给出一个连通图 G 和它的一棵生成树(图中的粗线)。

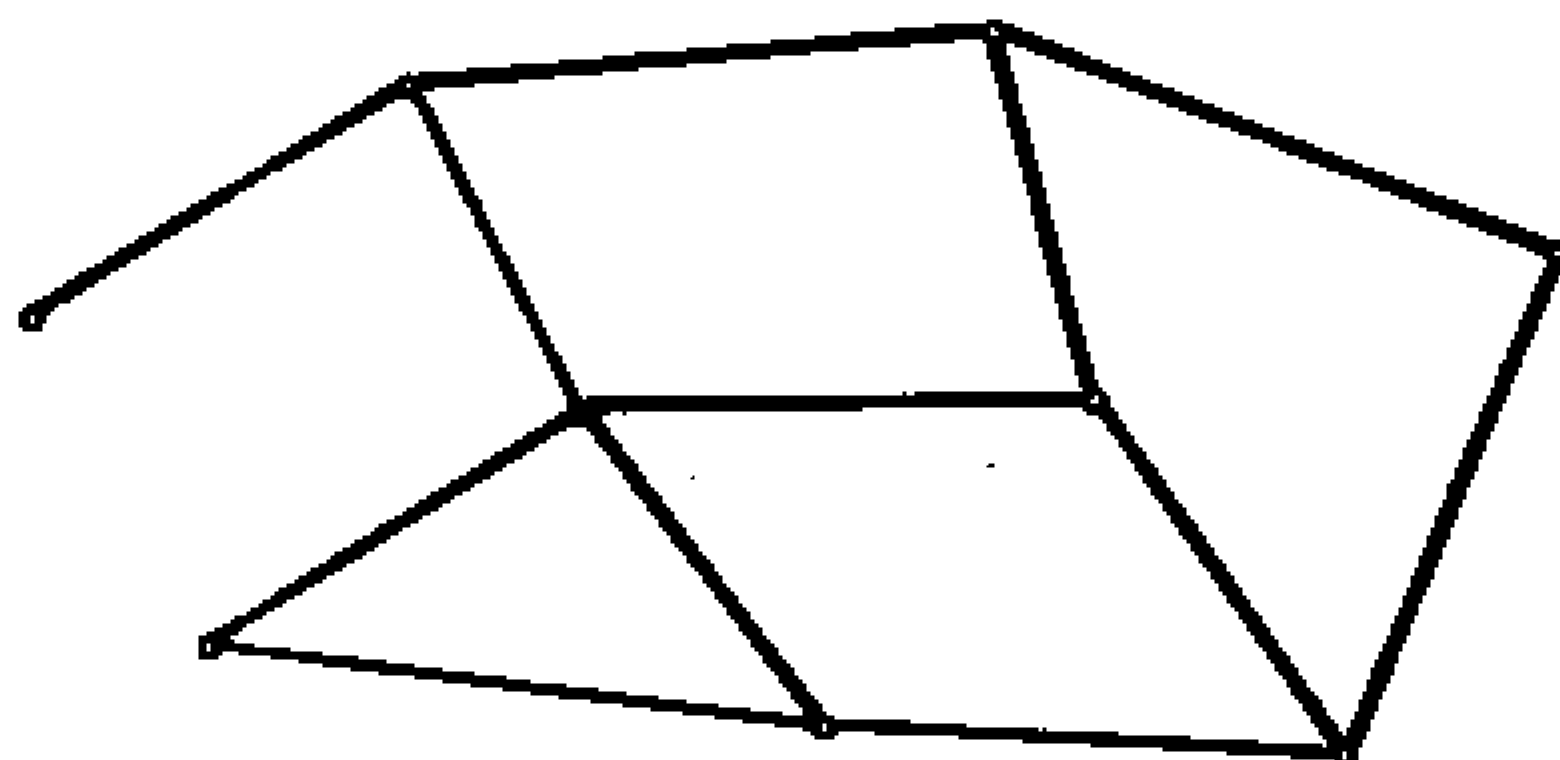


图 2.3-1

设 G 是一个连通的(p,q)图，T 是 G 的一棵生成树。由定理 2.1.2 知树枝数为 $p-1$，而连枝数为 $q-p+1$；如果 G 是有 k 个分支的分离(p,q)图，则 G 的生成森林有 $p-k$ 个树枝，有 $q-P+k$ 个连枝。

一个连通图的生成树不是唯一的，但是一个连通图的任一生成树中所含的树枝数，从而与其对应的连枝数目确是固定不变的。

定理 2.3.1 图 G 有生成树的充要条件是 G 为连通图。

[证明] 如果 G 不连通，那么它的生成子图都不连通。

因此 G 不能有生成树。

反之，如果 G 连通，设 T 是 G 的边数最小的连通生成子图。于是对任意的 $e\in E(T)$，$T-e$ 是分离的。由此推知，T 的每一条边均为割边，因此 T 是一棵树。又 T 是 G 的生成子图，所以 T 是 G 的一棵生成树。▍

推论 2.3.1 若图 G 是连通的 $(p、q)$ 图，则 $q\geqslant p-1$。

定理 2.3.2 T 是连通 (p,q) 图 G 的一棵生成树的充要条件是 T 为 G 的有 $p-1$ 条边的连通生成子图。

[证明] 如果 T 是 G 的一棵生成树，则 T 是 G 的一个生成子图，于是 T 有 p 个顶点，又 T 是一棵树，故 T 连通且有 $p-1$ 条边。

反之，设 T 是 G 的有 $p-1$ 条边的连通生成子图，故必有 p 个顶点。又 T 是连通的，由定理 2.1.2 知，T 是一棵树，所以 T 是 G 的一棵生成树。▍

定理 2.3.3 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，并且 e' 是一条连枝，则 $T+e'$ 含有一条唯一的圈。

这个定理的证明留给读者。

下面我们来介绍求一个连通图 G 的生成树的两种方法：**避圈法和破圈法**。

所谓避圈法是：任取一条边 e_1，再取一条边 e_2，e_1 和 e_2 不构成圈；然再取一条边 e_3，e_3 和 e_1，e_2 不构成圈。如此继续下去，最后得到的不含圈的连通生成子图就是 G 的一棵生成树。

例如，在图 2.3-2 所示的图 G 中，取 $a=e_1$，$b=e_2$，$d=e_3$，$f=e_4$，那么由边集 $\{a,b,d,f\}$ 组成的子图就是 G 的一棵生成树。

所谓破圈法是：在 G 中任取一圈，去掉其中的一条边，然

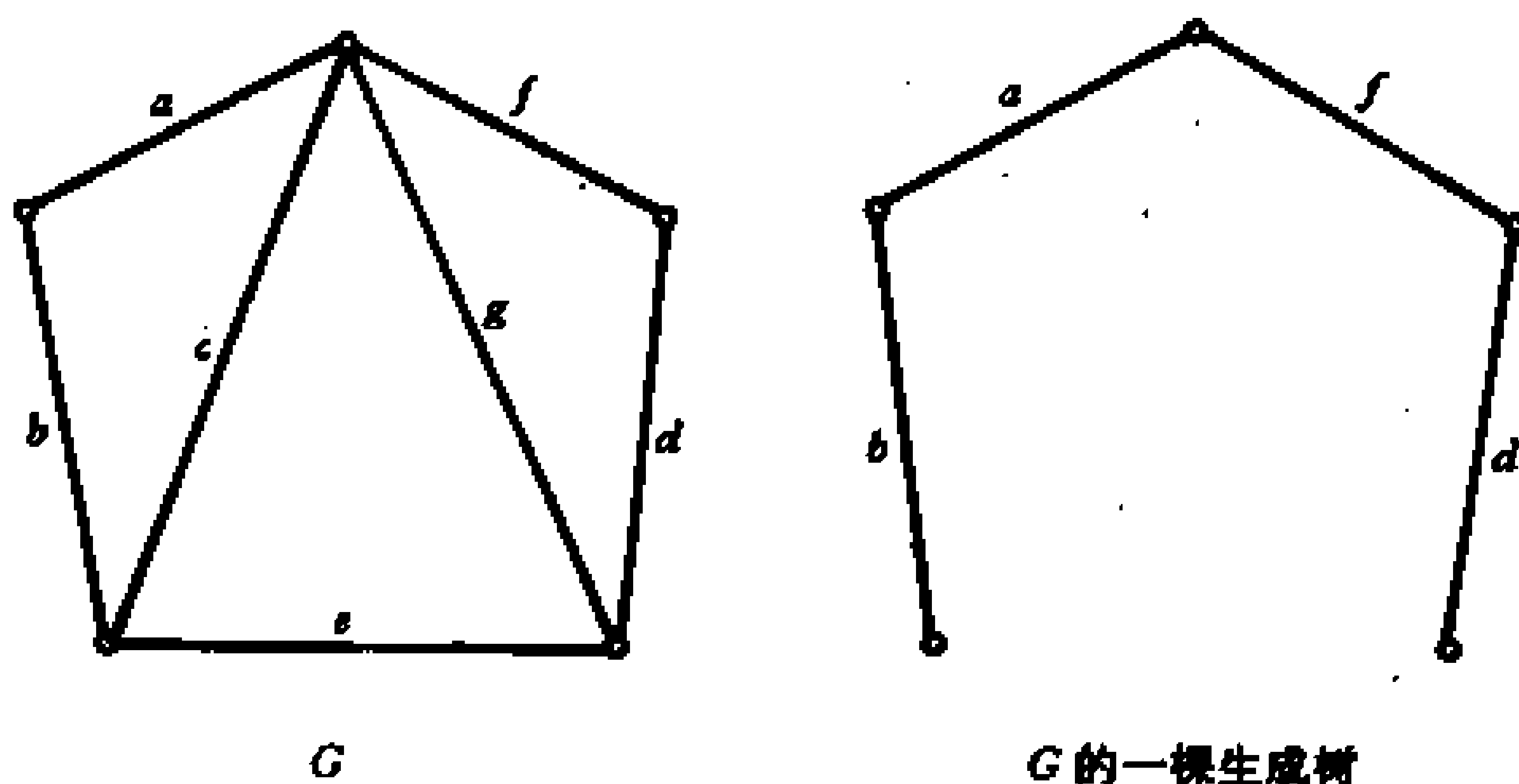


图 2.3-2

后再取一个圈，再去掉这个圈中的一条边。如此继续下去，最后得到的连通图的无圈的生成子图就是 G 的一棵生成树。

例如，去掉在图 2.3-2 所示的图 G 中，取圈 abc，去掉边 c；再取圈 $abge$，去掉边 e。最后取圈 dfg，去掉边 g，剩下的由 a，b，d，f 组成的生成子图就是 G 的一棵生成树。

图 2.3-3 中给出图 2.3-2 所示的图 G 的全部生成树。

从上面的例子可以看到，一个连通图的全部生成树通常是相当多的。在后面的讨论中，将给出求生成树的另外的方法和计算生成树数目的方法。

习 题 二

2-1 证明：无环图的任意两个顶点间均有唯一道路，则此图必为一棵树。

2-2 设 T 是一棵树，则 T 中最长道路的起点和终点的度均为 1。

2-3 证明：恰好有两个顶点的度为 1 的树必为一道路。

2-4 设 G 是一个分离图。证明：G 是森林的充要条件是 G 的每一条边是割边。

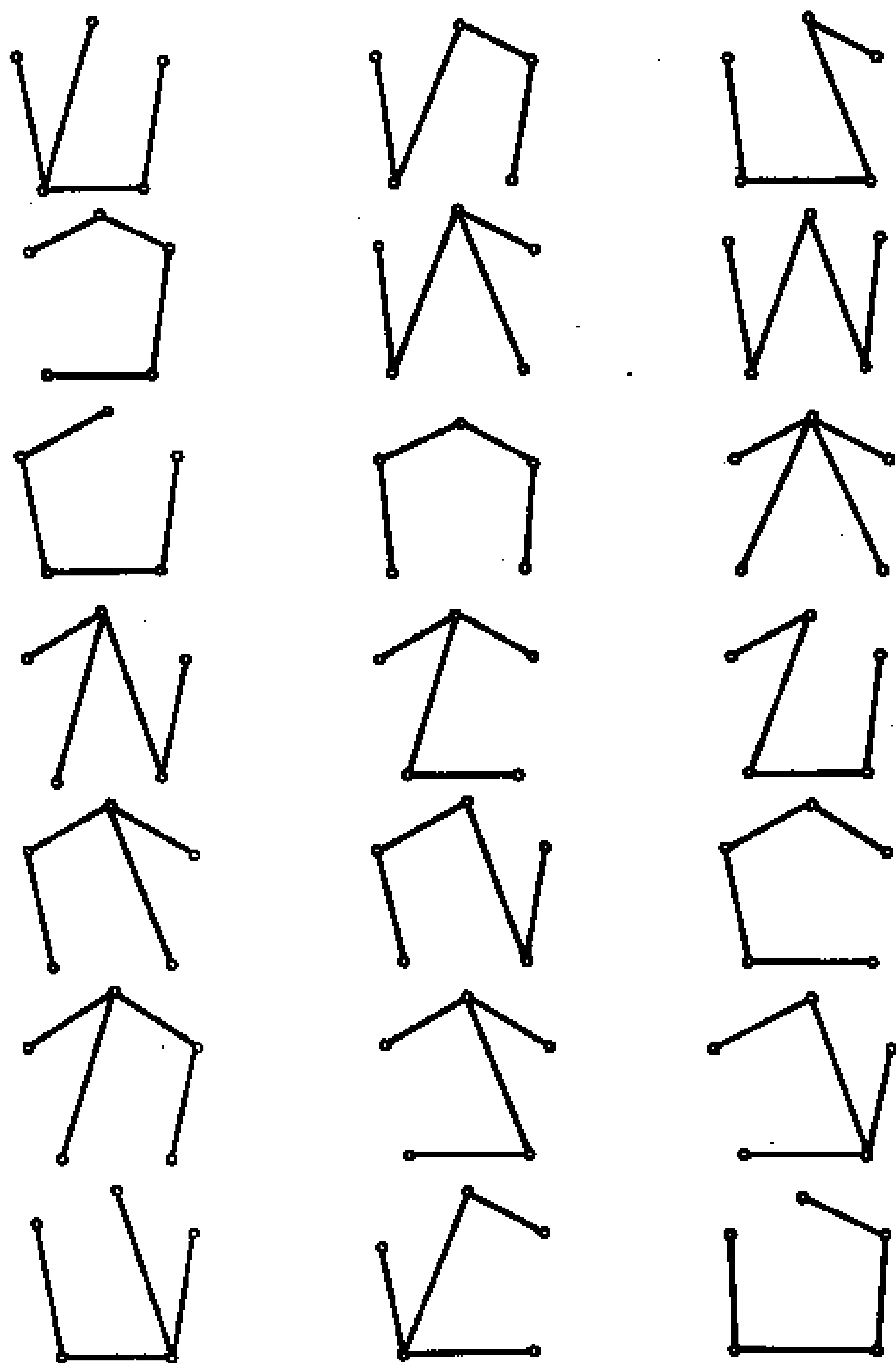


图 2.3-3

2-5 证明推论 2.3.1。

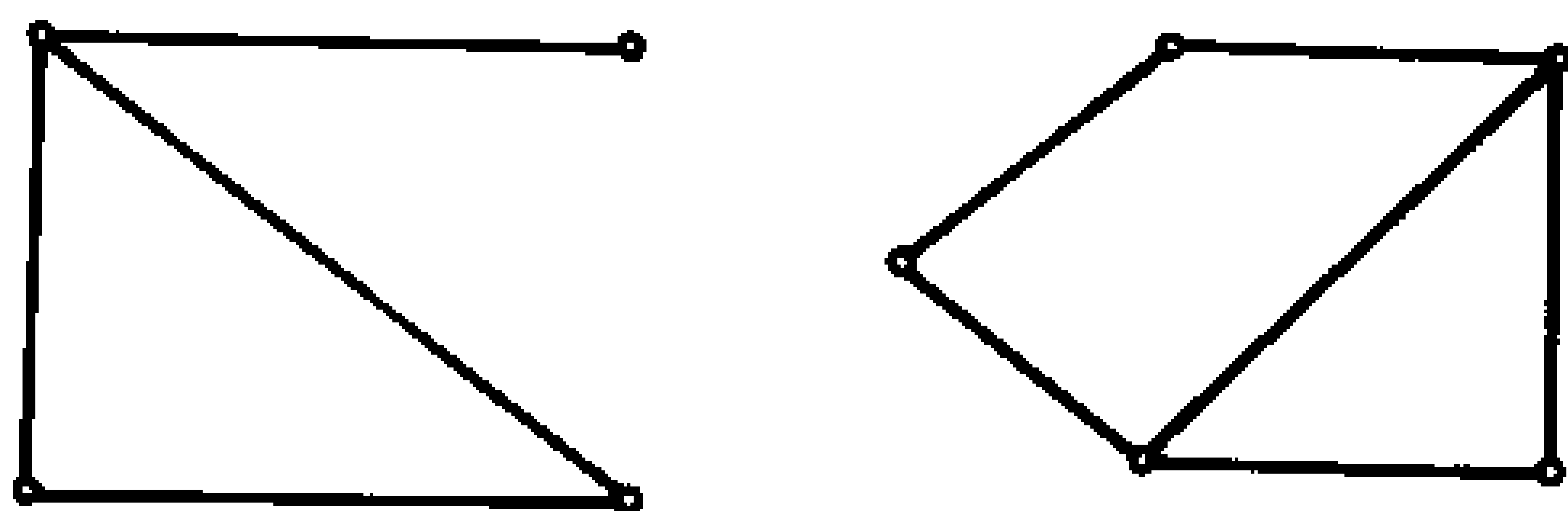
2-6 证明定理 2.3.3。

2-7 证明:若 G 为 $k\geq 2$ 的 k 正则图,则 G 没有割边。

2-8 设图 G 是连通的,对 $p\geq 3$ 不是 K_p 且若 G 的任何两个不邻接的顶点联一条边 e,$G+e$ 恰有一个圈,证明 G 是一棵树。

2-9 G 不是 $K_1\cup K_1$ 或 $K_1\cup K_2$,$p=q+1$,且若 G 的任何两个不邻接的顶点联一条边 e,$G+e$ 恰有一个圈,证明 G 是一棵树。

2-10 利用避圈法和破圈法求下列两个图的全部生成树。



题 2-10 图

2-11 证明:若 G 不含环,且恰好有一棵生成树 T,则 $G=T$。

2-12 用 Δ 记 G 中顶点的最大度。证明:若 G 是 $\Delta\geq k$ 的树,则 G 至少有 k 个顶点的度为 1。

第三章　欧拉图和哈密顿图

这一章讨论另一类特殊的图叫做欧拉图，它与我们在第一章提到的七桥问题有关。并简要的介绍一下另一类特殊的图，叫做哈密顿图，它与所谓“环球航行”问题有关。

3.1　环　　路

所谓**环路**(circ)是圈与圈的边不重并。

显然，圈是环路。圈是连通的，环路不一定连通。

例如，图 3.1-1 中，边集$\{a,b,c,f,g,h\}$构成一个环路，它是圈 abc 和圈 fgh 的边不重并。环路$\{a,b,c,f,g,h\}$是连通的，而环路$\{a,b,c,h,i,j\}$不连通。

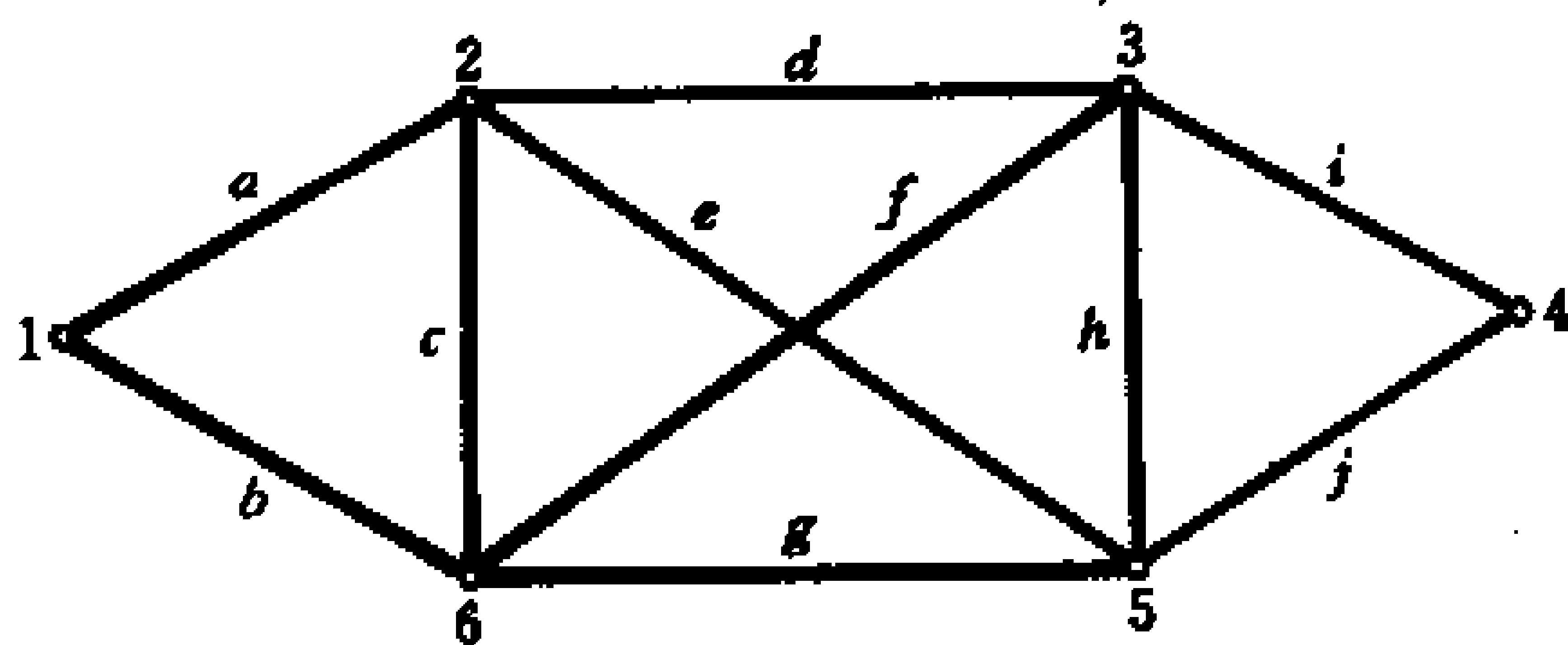


图 3.1-1

边集$\{a,b,c,d,f\}$虽然是由圈 abc 和圈 cdf 组成，但它不是环路。因为它们有一条公共边 c，不是圈的边不重并。

显然，闭链是圈或是环路。这是因为，每一次回到一个顶点就确定一个圈。于是我们有下面的命题和定理：

命题 3.1.1 闭链是环路。

定理 3.1.1 环路中每个顶点的度均为偶数。

［证明］ 设 C 为一个环路，对$\forall\ v\in V(C)$，如果只有一个圈经过顶点 v，则有 $\deg v=2$。如果有不止一个圈经过 v，因为没有一条边在不同的圈中，所以 v 的度等于 2 倍经过顶点 v 的圈数，故为偶数。∎

由命题 3.1.1 和定理 3.1.1 知，闭链中每个顶点的度均为偶数。圈中每个顶点的度为 2。

定理 3.1.2 图 G 是连通环路当且仅当存在一条包含 G 的所有边的闭链。

［证明］ 因为闭链是连通环路，所以，如果存在一条闭链包含 G 的所有边，那么 G 是一个连通的环路。

反之，设 C_1 是连通环路 G 中的一个圈，若 G 仅由 C_1 组成，结论显然成立。否则是另一个圈 C_2 与 C_1 有一个公共顶点 v，从 v 开始由 C_1 和 C_2 相继组成的途径是含有这两个圈中每条边的一条闭链。继续这个过程，我们可以构成一条含有 G 的所有边的闭链。∎

推论 3.1.1 设 G 是一个连通图，若恰有两个顶点的度是奇数，则 G 有一条开链，它含有 G 的所有的顶点和边（它从一个度为奇数的顶点开始到另一个度为奇数的顶点为止）。

定理 3.1.3 每个顶点的度为偶数的图 G 是环路。

［证明］ 如果 G 是连通的，则由命题 3.1.1 和定理 3.1.2 即知定理为真。如果 G 是分离图，且由 k 个分支组成，因为每个分支是连通的，故每个分支为环路，所以 G 为环路。∎

定理 3.1.4 两个环路的环和仍为环路。

［证明］ 设 C_1 和 C_2 是环路，v 是 $C_1 \oplus C_2$ 中任一顶点，$e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1r}$ 是 C_1 中与 v 关联的边，$e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2s}$ 是 C_2 中与 v 关联的边。不失一般性，不妨设 $e_{11}=e_{21}, e_{12}=e_{22}, \cdots, e_{1p}=e_{2p}$，但 $e_{1,p+1}, e_{1,p+2}, \cdots, e_{1r}$ 和 $e_{2,p+1}, e_{2,p+2}, \cdots, e_{2s}$ 彼此不同。这样，在 $C_1 \oplus C_2$ 中与 v 关联的边有 $r+s-2p$ 条，即 $\deg v = r+s-2p$。因为 C_1 和 C_2 均为环路，所以 r, s 均为偶数，故 $\deg v = r+s-2p$ 是偶数。由 v 的任意性和定理 3.1.3 知，$C_1 \oplus C_2$ 是环路。▮

推论 3.1.2 设 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是环路，则 $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$ 也是环路。

推论 3.1.3 设 P_1 和 P_2 是有同一对端点 u 和 v 的两条 (u,v) 道路，则 $P_1 \oplus P_2$ 是环路。

［证明］ 如果 P_1 和 P_2 除 u 和 v 外没有其他公共顶点（如图 3.1-2(*a*)所示）。显然，$P_1 \oplus P_2$ 是一个圈。如果 P_1 和 P_2

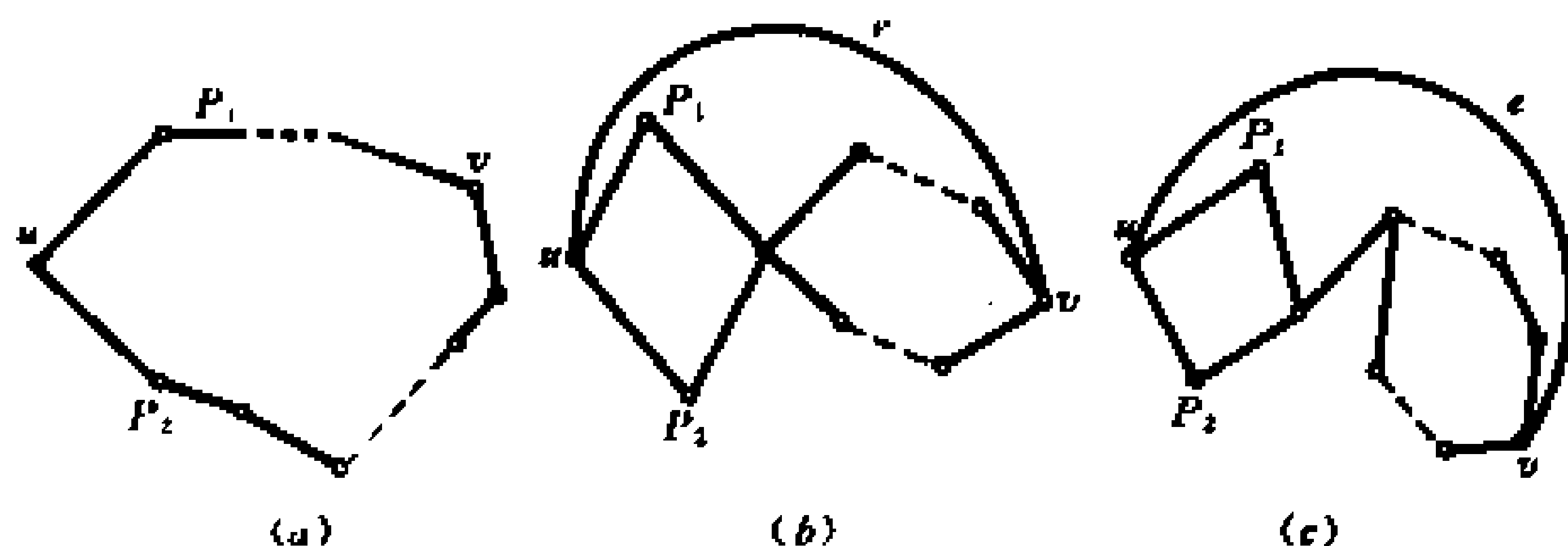


图 3.1-2

除 u, v 外还有其他公共顶点（如图 3.1-2(*b*)(*c*)所示），在端点 u, v 间增加一条边 $e=(u,v)$，则 P_1+e 和 P_2+e 均是圈，由定理 3.1.4，有

$$(P_1 + e) \oplus (P_2 + e) = P_1 \oplus P_2$$

是环路。▮

3.2 欧 拉 图

定义 3.2.1 顶点均为偶数的图称为**欧拉图**(Euler graph)。

定义 3.2.2 经过图 G 的每一条边的链称为**欧拉链**(Euler chian)。

由上一节的讨论，易知：

(1) 闭链是欧拉图；

(2) 环路是欧拉图；

(3) 图 G 是连通欧拉图当且仅当存在一条包含 G 的所有边的闭链；

(4) 两个欧拉图的环和仍是欧拉图。

定理 3.1.2 和推论 3.1.1 反映了图的一个重要性质，即图的**连绘性**。一个连绘的图是指这个图可以用一笔画成而没有重复的笔划。换句话说就是在这个图中存在一条通过每条边的链。一个图是否可以连绘是由其顶点的度决定的。我们可以这样设想：一个连绘的图，必然只能有一个作为起点的顶点和一个作为终点的顶点。其余的在这个图上的顶点都只能是“过路”的顶点，正像一个旅程的中途站，凡是作为中途站，都必然是有“到达”和“离去”。至于达多少次的数目是没有关系的，只要离去它的次数和到达的次数相同，它便是个中途站了。由于规定不用重复的路线，故每次到达和离去都用不同的边代表，这样它必然是具有偶数条边。换句话说，一个“过路”的顶点，必是度为偶数的顶点，只有起点和终点的度才可能是奇数顶点。如果一个连绘图的始点和终点不是同一个顶点，那么这个图就一定恰有两个奇数度的顶点而且是一个连通图；

如果连绘图的始点和终点是同一个顶点，那么这个图就是顶点的度均为偶数的连通图，因此这个图就是欧拉图。

通过上面的讨论，七桥问题（图 1.1-5）无解就是很自然的了。

3.3 哈密顿图

定义 3.3.1 通过图 G 的每个顶点的圈称为哈密顿圈（Hamiltonian cycle）。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图（Hamiltonian graph）。

目前，虽然已经知道关于哈密顿图的若干必要的或充分的条件。但是，找哈密顿图的一个简洁而有用的特征，使之不仅仅是定义的一个隐蔽的同义语，换句话说给出一个图是哈密顿图的充要条件，这是一个诱人而没有解决的问题。

下面我们先给出一个图 G 是哈密顿图的必要条件。

定理 3.3.1 若图 G 是哈密顿图，则对于 $V(G)$ 的每一个非空真子集 S，导出子图 $G-S$ 的分支数目 $k(G-S)$ 均满足

$$k(G-S) \leqslant |S|$$

［证明］ 设 C 是图 G 的一个圈。先来考虑两种特殊情况：

(1) S 中只含有 C 中的诸邻接顶点，这时图 $C-S$ 显然是一条道路，因此有

$$k(C-S)=1$$

(2) S 中含有 r 个在 C 中均不邻接的顶点，这时图 $C-S$ 有 r 个分支，于是

$$k(C-S)=r, \quad |S|=r$$

(1)表明在 C 中删去相邻接的顶点，分支数不变，而(2)

表明删去 r 个互不邻接的顶点，$C-S$ 的分支数为 r。因此，一般说来，如果 S 既含有邻接的顶点又含有不邻接的顶点，那么我们有

$$k(C-S)\leqslant |S|$$

同时，$C-S$ 是 $G-S$ 的一个生成子图，因而

$$k(G-S)\leqslant k(C-S)$$ ∎

定理 3.3.1 给出了图 G 是哈密顿图的必要条件，因此一个图只要不满足定理 3.3.1 的条件就可以断定它不是哈密顿图。例如在图 3.3-1 中删去 v_1, v_2, v_3 三个顶点，则得到四个分支，不满足定理 3.3.1 中的条件，因此这个图不是哈密顿图。但是一个非哈密顿图却可以满足定理 3.3.1 的条件，譬如图 3.3-2 所示的图不是哈密顿图，但它却满足定理 3.3.1 中的条件。

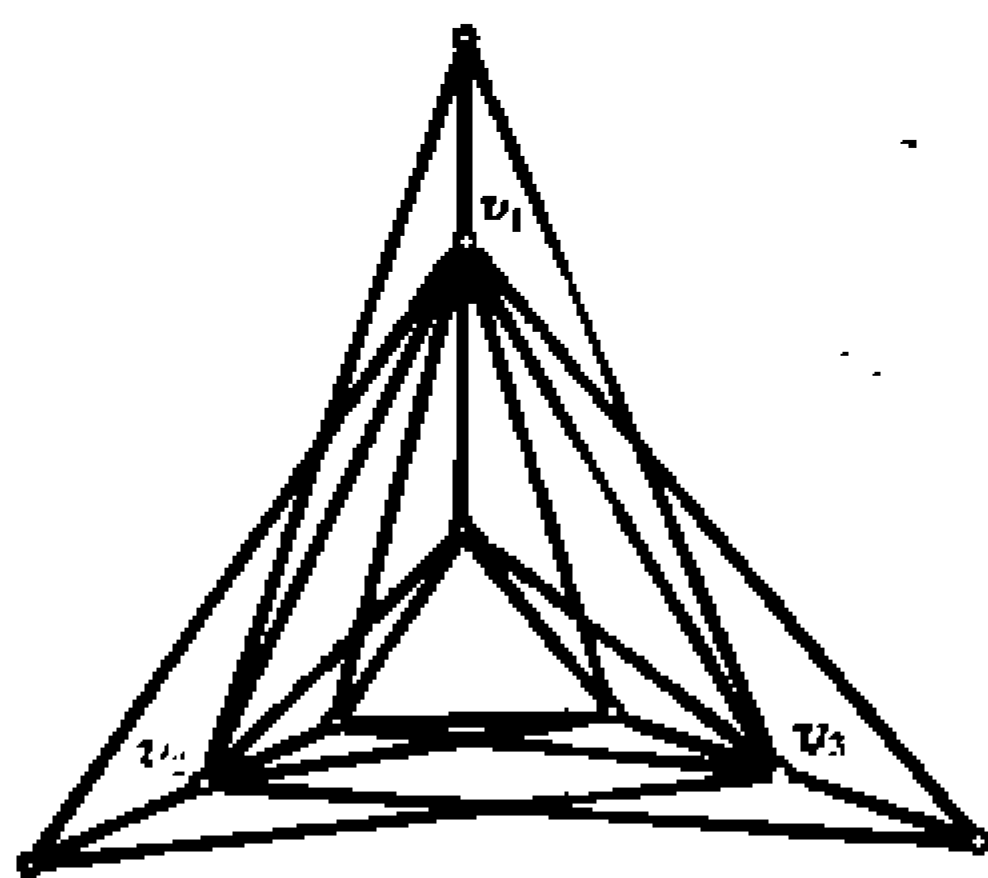
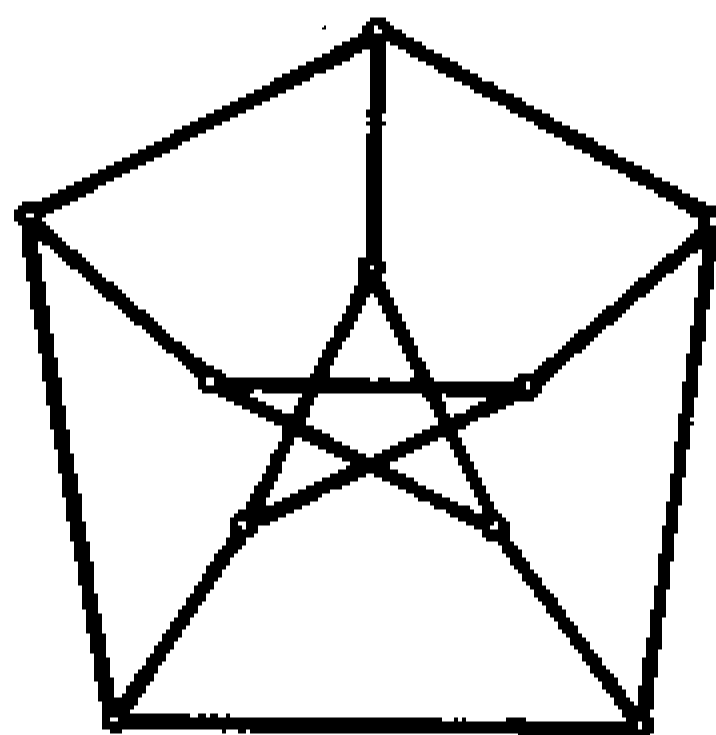


图 3.3-1


图 3.3-2

下面我们给出图 G 是哈密顿图的一个充分条件。

定理 3.3.2(Dirac 1952)　设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶简单图，w 是有最小度的顶点，如果

$$\deg(w)\geqslant n/2$$

则 G 是哈密顿图。

［证明］ 用反证法。如果定理的结论不成立，并设 G 是 $n\geqslant 3$ 阶的和顶点的最小度 $\geqslant n/2$ 的最大非简单哈密顿图。由于 G 是非哈密顿图，所以 G 不是完全图。设 u 和 v 是 G 的不邻接的顶点，由 G 的最大性，$G+uv$ 是哈密顿图。此外，由于 G 是非哈密顿图，$G+uv$ 的每一个哈密顿圈必然包含边 uv，于是在 G 中存在一个起点为 $u=v_1$，终点为 $v=v_n$ 的哈密顿道路（包含 G 的每一个顶点的道路称为哈密顿道路）$v_1v_2\cdots v_n$，令

$$S=\{v_i|uv_{i+1}\in E(G)\}$$

$$T=\{v_i|v_iv\in E(G)\}$$

因为 $v_n\notin S\cup T$，所以

$$|S\cup T|<n \tag{3.3-1}$$

而且

$$|S\cap T|=0 \tag{3.3-2}$$

因为否则 $S\cap T$ 包含某个顶点 v_i，则 G 将有哈密顿圈 $v_1v_2\cdots v_iv_nv_{n-1}\cdots v_{i+1}v_1$，此与假设矛盾（图 3.3-3）。

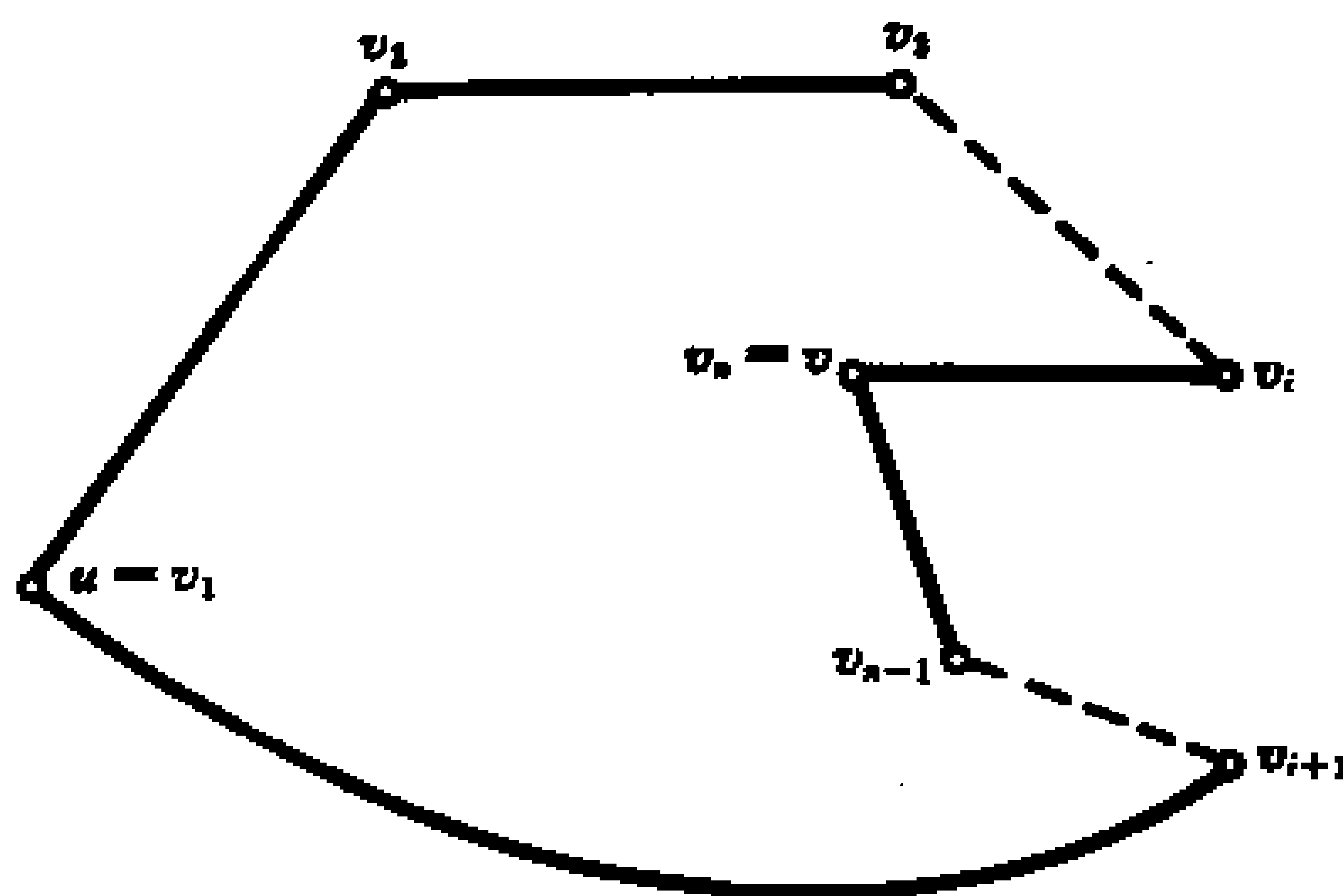


图 3.3-3

利用（3.3-1）和（3.3-2）式，可得

$$\begin{aligned}\deg(u) + \deg(v) &= |S| + |T| \\ &= |S \cup T| + |S \cap T| < n\end{aligned}$$

这与最小度$\geqslant n/2$的假设矛盾。∎

定理 3.3.3 设 u,v 是 n 阶图 G 中两个不邻接的顶点，如果

$$\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$$

则 G 是哈密顿图的充要条件是 $G+uv$ 为哈密顿图。

［证明］ 若 G 是哈密顿图，则存在一条哈密顿圈，增加一条边 uv 并不影响哈密顿圈的性质，因此 $G+uv$ 也是哈密顿图。

若 $G+uv$ 是哈密顿图，如果 $G+uv$ 的哈密顿圈中不含边 uv，则由

$$G = (G + uv) - uv$$

知，G 中有一条哈密顿圈；如果 $G+uv$ 的哈密顿圈中含有 uv 边，不妨设圈为

$$C: uvv_3v_4 \cdots v_nu$$

记

$$\deg'(u) = \deg_{G+uv}(u) = \deg_G(u) + 1$$
$$\deg'(v) = \deg_{G+uv}(v) = \deg_G(v) + 1$$

故有

$$\begin{aligned}\deg'(u) + \deg'(v) &= \deg_G(u) + \deg_G(v) + 2 \\ &\geqslant n + 2 \qquad (3.3\text{-}3)\end{aligned}$$

假设在顶点 $v_3, v_4, \cdots, v_{n-1}$ 中有 r 个顶点

$$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_r}$$

与 u 邻接，那么

$$\deg_{G+uv}(u) = r + 2$$

如果顶点 v 和 r 个顶点 $v_{i_1+1}, v_{i_2+1}\cdots, v_{i_r+1}$ 中的某一顶点 v_{i_j} 邻接，那么

$$C = uv_{i_j}v_{i_{j-1}}\cdots v_3vv_{i_{j+1}}\cdots v_nu$$

显然是 G 的一个哈密顿圈（图 3.3-4）

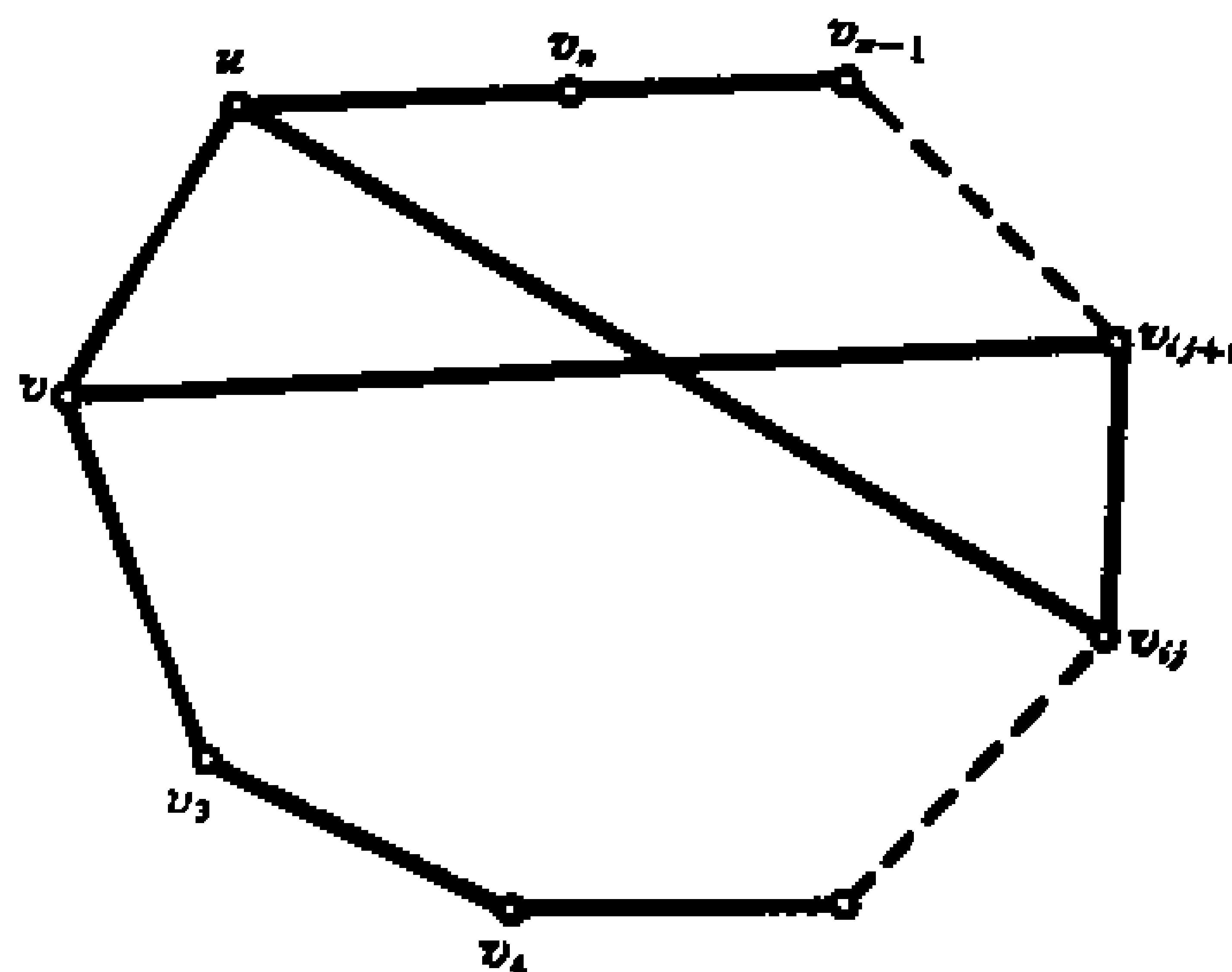


图 3.3-4

如果顶点 v 和 r 个顶点 $v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \cdots, v_{i_r+1}$ 都不邻接，则有

$$\begin{aligned}\deg_{G+uv}(v) &\leqslant (n-1) - r \\ &= (n-1) - (\deg_{G+uv}(u) - 2)\end{aligned}$$

从而

$$\deg_{G+uv}(u) + \deg_{G+uv}(v) \leqslant n + 1$$

即

$$\deg'(u) + \deg'(v) \leqslant n + 1$$

这与(3.3-3)式矛盾，于是 G 中存在一个哈密顿圈，故 G 为哈密顿图。∎

定义 3.3.2 设 G 为一 n 阶图，若任一对顶点 u, v 满足

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

而且边$(u,v) \notin E(G)$，则将(u,v)加于图G，得图$G+(u,v)$，如此反复加边直到无边可加为止，这样所得到的图叫做图G的闭包(colsure)，记作$\hat{G}$。

图 3.3-5 分别给出 4 个顶点和 6 个顶点的图的闭包的构造过程。

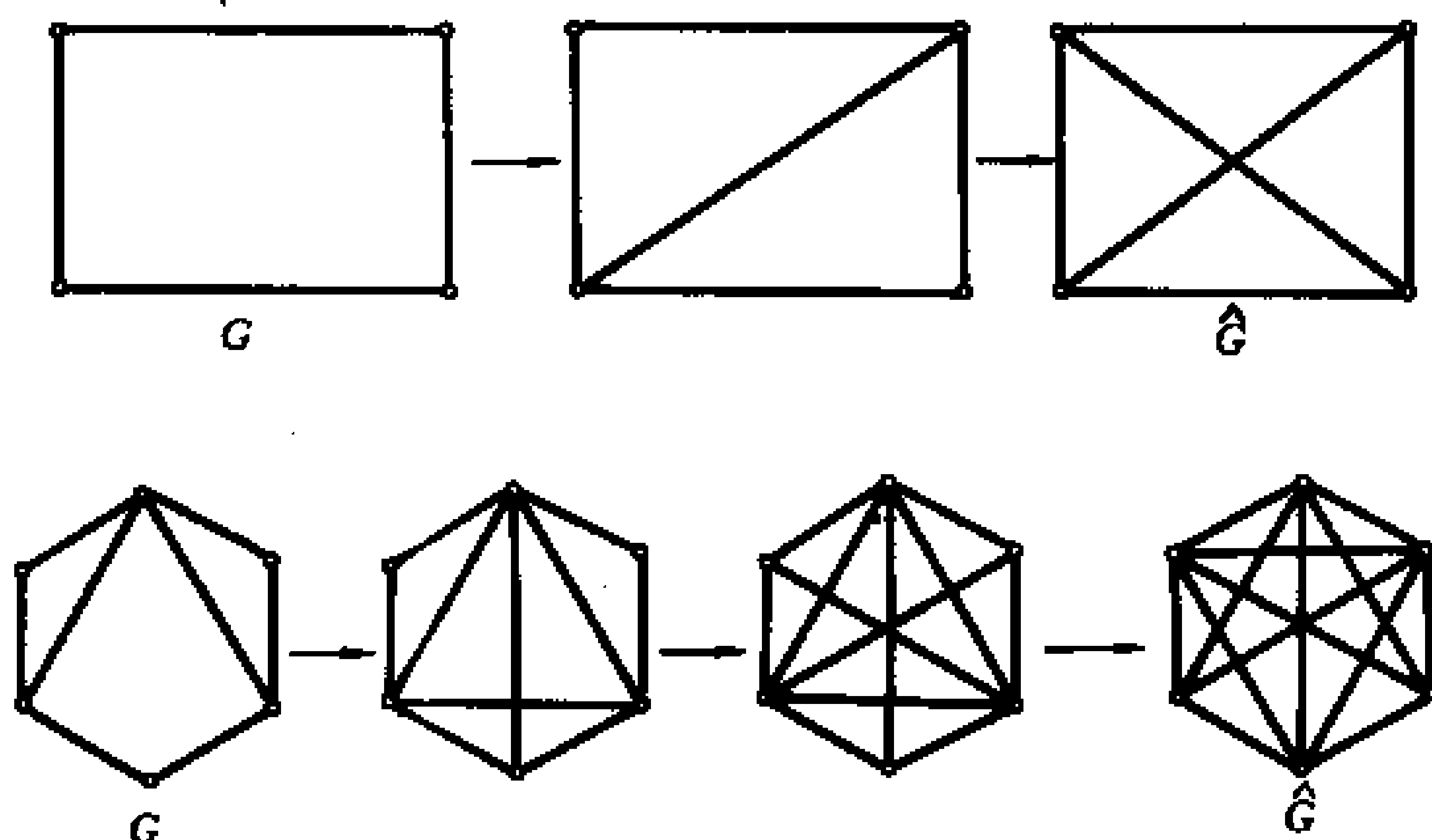


图 3.3-5

根据定义 3.3.2，一个图的闭包的构造过程就是把度的和至少是图的顶点个数的非邻接顶点对递推地连接起来，直到不再有这样的顶点对存在时为止。

命题 3.3.1 图G的闭包是唯一的。

［证明］ 设G_1和G_2是用下述方法从G中得到的两个图：把度数之和至少是G的顶点数的非邻接顶点对递推地连接起来，直到不再有这样的顶点存在时为止。用$e_1,e_2,\cdots,e_p$和$f_1,f_2,\cdots,f_q$分别表示G_1和G_2中那些分别增加到G的边的序列。我们证明：每个e_i是G_2的一条边，而每个f_i是G_1的

一条边。

不妨设 $e_{k+1}=(u,v)$ 是序列 $e_1,e_2,\cdots,e_p$ 中第一条不属于 G_2 的边，令 $H=G+\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$，由 G_1 的作法知

$$\deg_H(u)+\deg_H(v)\geqslant n$$

根据 e_{k+1} 的取法，H 是 G_2 的子图，因此

$$\deg G_2(u)+\deg G_2(v)\geqslant n$$

这是一个矛盾。因为 G_2 中 u 和 v 是非邻接的，所以每个 e_i 都是 G_2 的边。类似地可以证明，每个 f_i 都是 G_1 的边，因此 $G_1=G_2$。▌

根据定理 3.3.3 不难证明下面的定理。

定理 3.3.4 当且仅当一个简单图的闭包是哈密顿图时，这个简单图才是哈密顿图。

［证明］ 如果 G 是哈密顿图，显然，$\hat{G}$ 也是哈密顿图。如果 $\hat{G}$ 是哈密顿图，当 $G=\hat{G}$ 时，结论成立；当 $G\neq\hat{G}$ 时，必存在若干条边，便得

$$G+e_1+e_2+\cdots+e_m=\hat{G}$$

其中 $e_i\notin G$，$i=1,2,\cdots,m$。根据闭包的定义，对 $\hat{G}$ 中的任意两个顶点均有

$$\deg(u)+\deg(v)\geqslant n\qquad(n:G\text{ 的顶点数})$$

因为 $G+e_1+e_2+\cdots+e_m$ 是哈密顿图，由定理 3.3.3 知，$G+e_1+e_2+\cdots+e_{m-1}$ 是哈密顿图，反复应用定理 3.3.3，可知 G 是哈密顿图。▌

定义 3.3.3 设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为 n 阶图 G 的 n 个顶点，记

$$d_i=\deg(v_i),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

称 $(d_1,d_2\cdots,d_n)$ 为图 G 的**度序列**(degree sequence)。

定理 3.3.5 设 G 是一个具有度序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的简单图，这里 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，且 $n\geqslant3$，假如不存在小于 $n/2$

的 m 值，便得 $d_m \leqslant m$，$d_{n-m} < n-m$，那么 G 是哈密顿图。

[证明] 若 $\hat{G}=K_n$（K_n 是哈密顿图，见习题 3-2），那么由定理 3.3.4 知 G 是哈密顿图。

若 $\hat{G}\neq K_n$，记

$$\deg'(v) = \deg_{\hat{G}}(v), \qquad \deg'(u) = \deg_{\hat{G}}(u)$$

设 u,v 是 $\hat{G}$ 中不邻接的而且度之和是最大的两个顶点，不妨设

$$\deg'(u) \leqslant \deg'(v)$$

因为 $(u,v)\notin E(\hat{G})$，所以

$$\deg'(u) + \deg'(v) < n$$

且

$$m = \deg(u) = \frac{n}{2}$$

设 α 是 $\hat{G}$ 中不与 v 邻接的顶点的个数，则有

$$\deg'(v) = (n-1) - \alpha$$

即

$$\alpha = (n-1) - \deg'(v)$$

由于

$$\deg'(u) + \deg'(v) \leqslant n-1$$

故

$$\alpha = (n-1) - \deg'(v) \geqslant \deg'(u) = m$$

即 $\hat{G}$ 中不与 v 邻接的顶点至少有 m 个，设为

$$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_\alpha} \qquad (\alpha \geqslant m, u = v_{i_\alpha})$$

相应的度序列适合

$$d_{i_1} \leqslant d_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant d_{i_\alpha} = n_1$$

由于 $G\subset\hat{G}$，故在 G 中也应该至少有 m 个点的度不大于 m，因为度序列是以递增顺序排列，所以

$$d_m < m \tag{3.3-1}$$

同样，设在 $\bar{G}$ 中不与 u 邻接的点的个数为 β，那么

$$\beta = n - 1 - \deg'(u) = n - 1 - m$$

设这些顶点分别是

$$v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_\beta} (v = v_{j_\beta})$$

由于 v 是不与 u 邻接的顶点中度最大的一个，故有

$$d_{j_1} \leqslant d_{j_2} \leqslant \cdots \leqslant d_{j_\beta} = \deg'(v) < n - m$$

因为 $m<n/2$，所以

$$m + (m - n) < 0, \quad \deg'(u) < n - m$$

从而一共有 $(n-m-1)+1$，即 $n-m$ 个顶点度都小于 $n-m$，即

$$d_{n-m} < n - m \tag{3.3-2}$$

这就是说，存在一个小于 $n/2$ 的数 m，使(3.3-1)和(3.3-2)式成立，此与定理的假设矛盾，于是 $\bar{G}=K_n$，从而定理得证。∎

哈密顿圈是以 1856 年哈密顿首先提出的所谓**环球航行问题**而命名。

考虑用正十二面体的顶点代表 20 个城市，要求旅行者从某一城市出发，遍经各城市一次且仅一次，最后返回出发地。

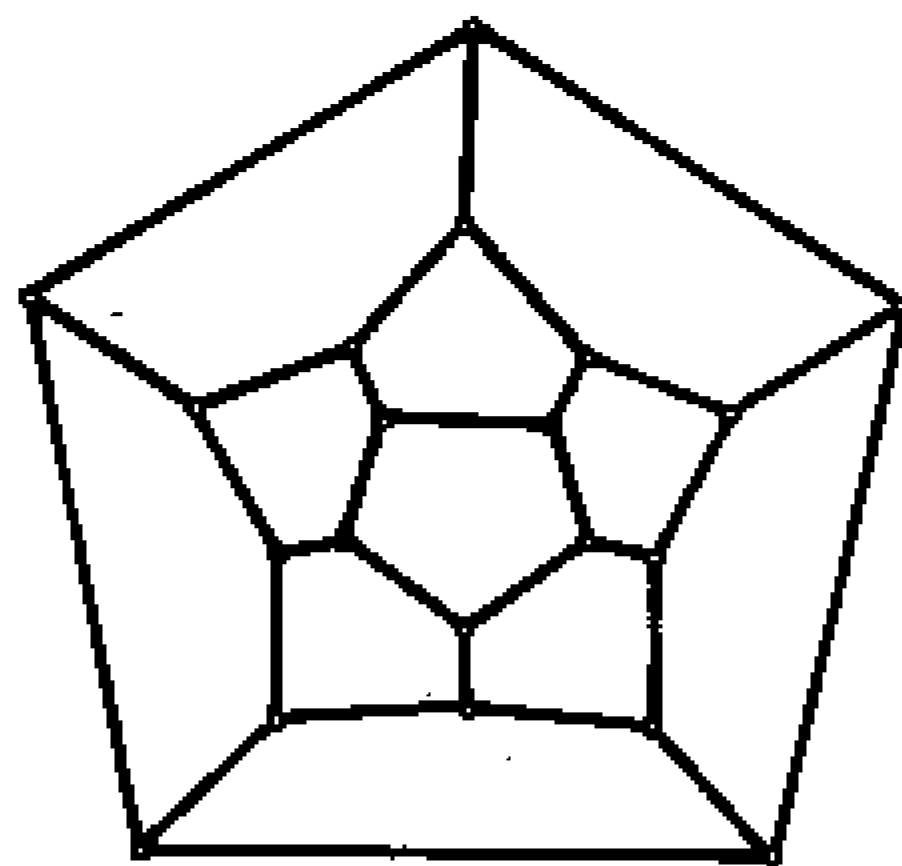
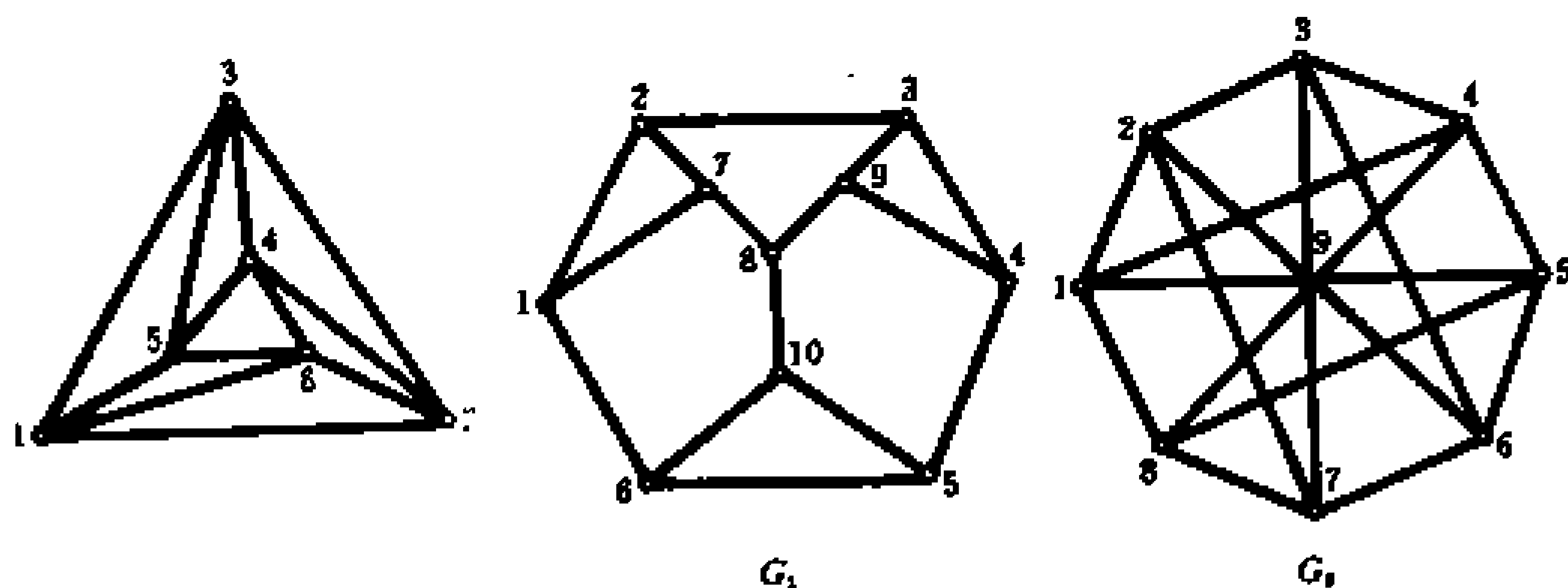


图 3.3-6

“环球航行”问题用图论的语言来说就是在十二面体的图中找出一条通过每个顶点的圈(见图 3.3-6)。

习 题 三

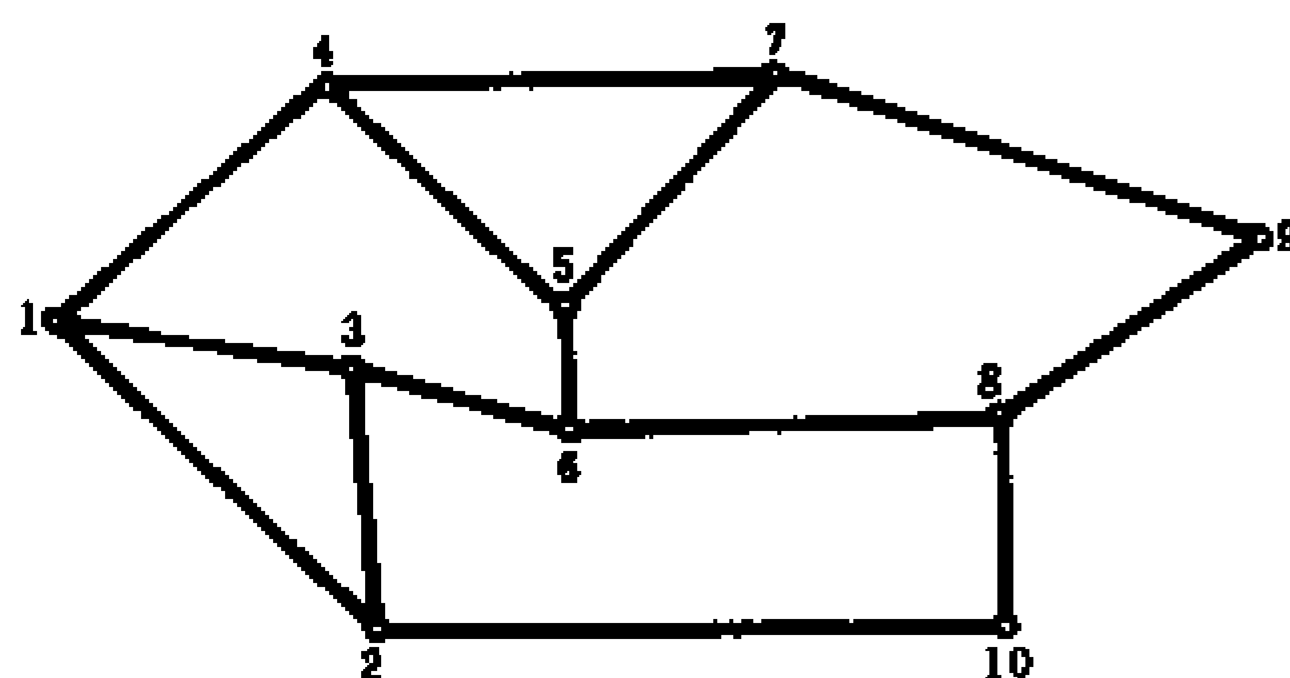
3-1 判断下列各图是否是欧拉图，若是作出图中的一条欧拉链。



题 3-1 图

3-2 证明 n 阶完全图 K_n 是哈密顿圈。

3-3 图 G 是否是哈密顿图？若是，试画出它的一个哈密顿圈。



题 3-3 图

3-4 若图 $G=(V,E)$ 不是哈密顿图（$|V|\geqslant 3$），证明至少有一个顶点的度适合 $\deg(v)<|V|/2$。

3-5 证明：若 G 是二部图，且它的二分划 (V_1,V_2)，有 $|V_1|\neq|V_2|$，则 G 是非哈密顿图。

3-6 证明：若图 G 中存在一顶点 v，使得 $\deg(v)=1$，那么 G 必不

是哈密顿图。

3-7　设G的度序列为$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$的p阶简单图，其中$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_p$，证明：若不存在$m<p+1/2$，它满足$d_m<m$和$d_{p-m+1}<p-m$，则$G$有哈密顿道路。

3-8　设G为度序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$的简单图，并设$\bar{G}$有序列$(d_1',d_2',\cdots,d_p')$，其中$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_p$，$d_1'\leqslant d_2'\leqslant\cdots\leqslant d_p'$，证明：若对一切的$m<p/2$，均有$d_m\geqslant d_m'$，则$G$有哈密顿道路。

3-9　证明：若G是连通简单图，且$p>2\delta$（δ是G的最小度），则G中有一条长至少为2δ的道路。

第四章　割　　集

割集同圈、树等概念一样，是图论中一个重要概念。在图论的应用中，特别在电网络理论中割集概念占有重要地位。割集与圈在概念上密切相关，而且与树的概念也有着重要的联系，本章讨论割集概念及其性质，并引进断集的概念。如无特别说明，本章所讨论的图均为(p,q)连通简单图。

4.1　割集与断集

我们定义连通图G的顶点数减1为图G的秩，记作$R(G)$，即

$$R(G)=p-1$$

如果G是有k个分支的分离图，则定义

$$R(G)=p-k$$

定义 4.1.1　设$S\subseteq E(G)$，如果

1. $R(G-S)=p-2$
2. 对$\forall S'\subset S, R(G-S')=p-1$

则称边集S为图G的一个**割集**(Cut Set)。

换句话说，一个割集S是这样一个边集：在G中去掉S的所有边后，G变成具有二个分支的分离图，但是只去掉S中的部分边，图将仍然是连通的。

譬如，在图4.1-1(a)所示的图G中，边集$S=\{a,b,c\}$和边集$S=\{b,c,d,f\}$均为割集。因为去掉S的全部边后，图的

秩减少 1，即图 G 变成具有两个分支的分离图（图 4.1-1(b)，(c)）。注意：去掉边集 $S=\{a,b,c\}$ 得到是一个具有一个孤立点和一个连通分支的分离图。但是去掉 S 的任何一部分图仍连通。我们用虚线画出的闭合曲线表示割集。

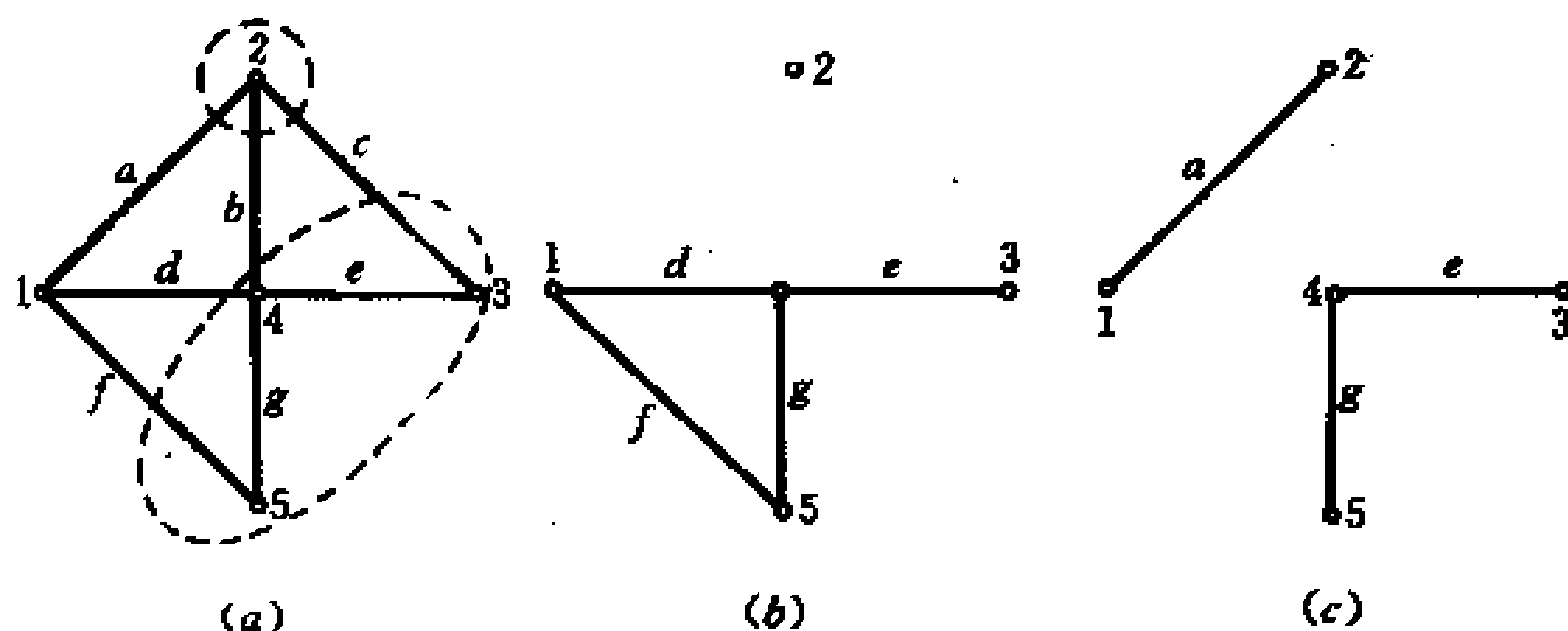


图 4.1-1

边集 $S=\{b,c,d\}$ 不是割集，因为去掉 $\{b,c,d\}$ 后，图的秩不减少，也就是说，图仍是连通的（图 4.1-2(a)）；边集 $S=\{c,e,g\}$ 不是割集，因为去掉 $\{c,e,g\}$ 后，虽然图的秩减少 1，但是去掉 $\{c,e,g\}$ 的子集 $\{c,e\}$ 后，图的秩也减少（图 4.1-2(b)）；边

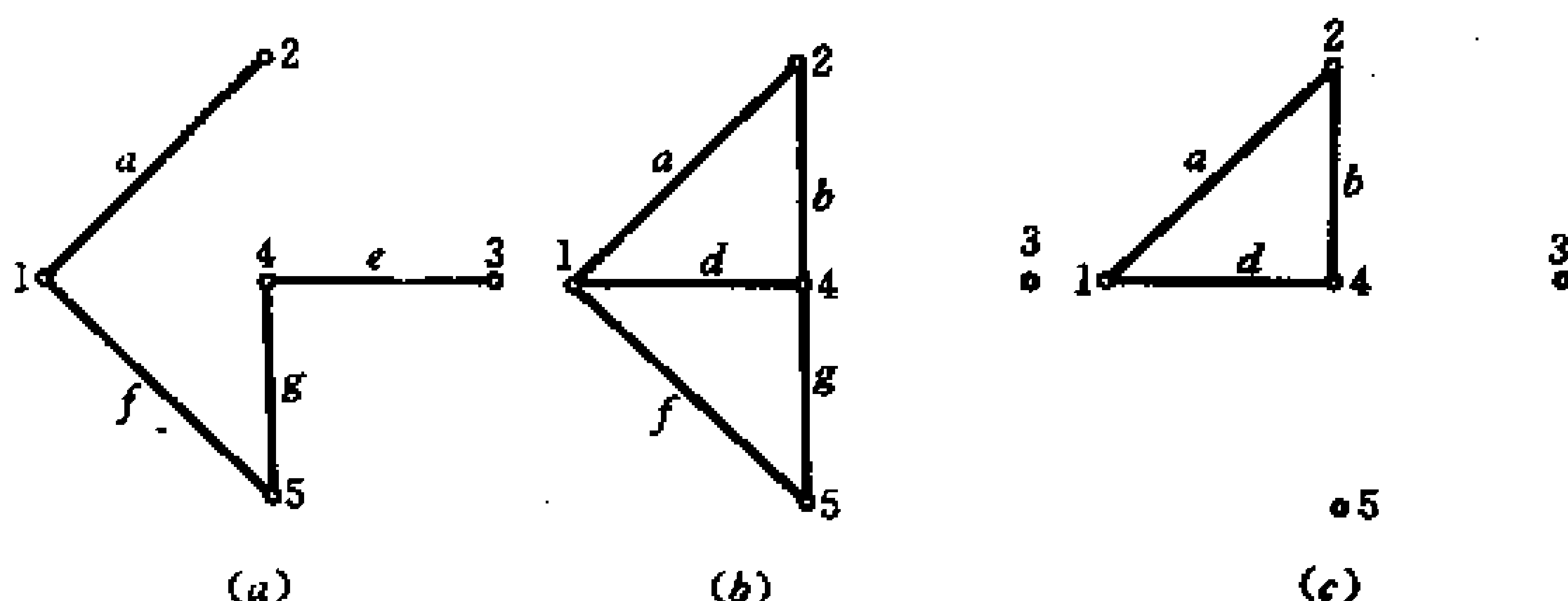


图 4.1-2

集 $S=\{c,e,f,g\}$ 也不是割集，因为去掉这个边集后，图的秩减少 2，即图 G 变成有三个分支的分离图（图 4.1-2(c)）。

根据割集的定义，如果 S 是图 $G=(V,E)$，的一个割集，那么去掉 S 的边后，得到二个分支：$G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(\overline{V}_1,E_2)$，其中 $\overline{V}_1$ 表示 G 中不属于 V_1 的顶点的集合，即 $V_1\cup\overline{V}_1=V$，且 $V_1\cap\overline{V}_1=\varnothing$。割集 S 中的任何一条边，它的两个端点一个在 V_1 中另一个在 $\overline{V}_1$ 中，G 中其他的边不具有这种性质，并且 V_1 中任意两个顶点之间存在一条不包含 $\overline{V}_1$ 中任何顶点的道路；同样，$\overline{V}_1$ 中任何两个顶点之间存在一条不包含 V_1 中任何顶点的道路。因此，若给定一个图 $G=(V,E)$，把顶点集 V 分成两个不相交的子集 V_1 和 $\overline{V}_1$，使同一顶点子集中任何两个顶点间的道路均不包含另一个顶点子集中的任何顶点，那么 G 中的端点分别属于 V_1 和 $\overline{V}_1$ 中的边的集合，就是 G 的一个割集。

例在图 4.1-3 所示的图 G 中，取 $V_1=\{1,2,3\}$，$\overline{V}=\{4,5,6,7\}$，那么端点分别在 V_1 和 $\overline{V}_1$ 中的边 a,b,c,d,e,f 组成的边集就是 G 的一个割集。

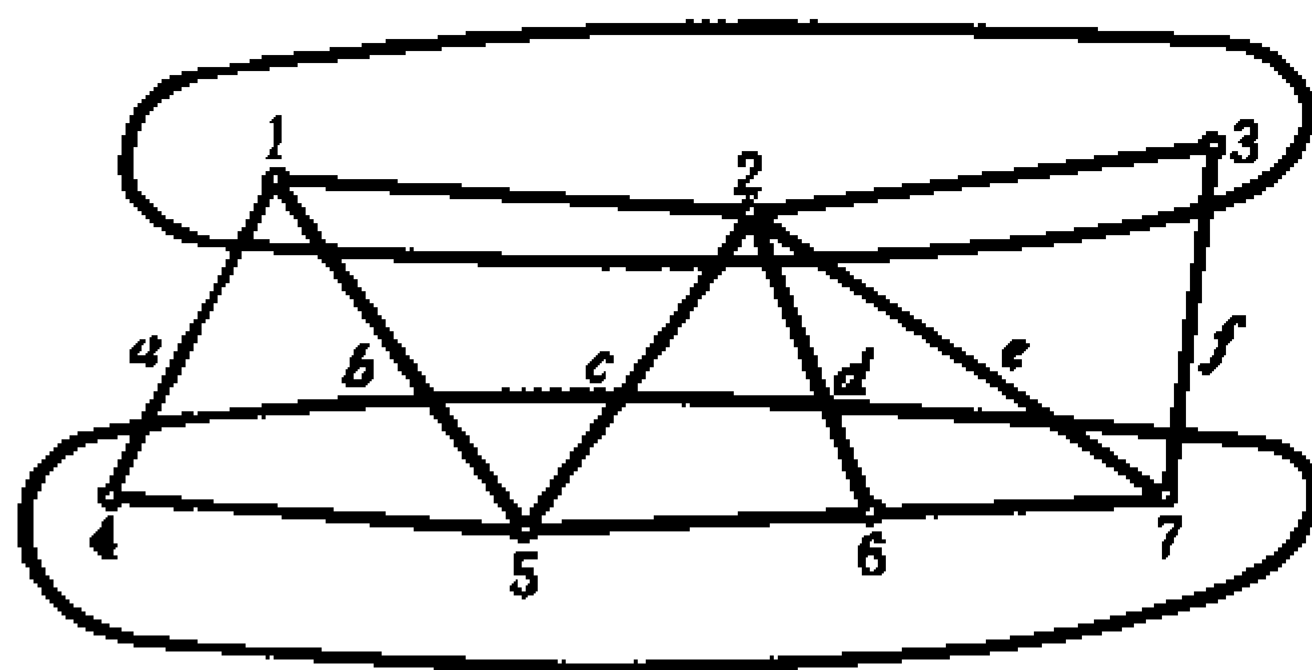


图 4.1-3

在图 4.1-4 所示的图 G 中，取 $V_1=\{3,4,7,8\}$，$\overline{V}_1=\{1,$

2,5,6,9,10}。那么,端点分别在 V_1 和 $\overline{V}_1$ 中的边集{c,k,l,i,e,g}不是割集,因为去掉这个边集后,图变成有三个分支的分离图(图 4.1-5)。

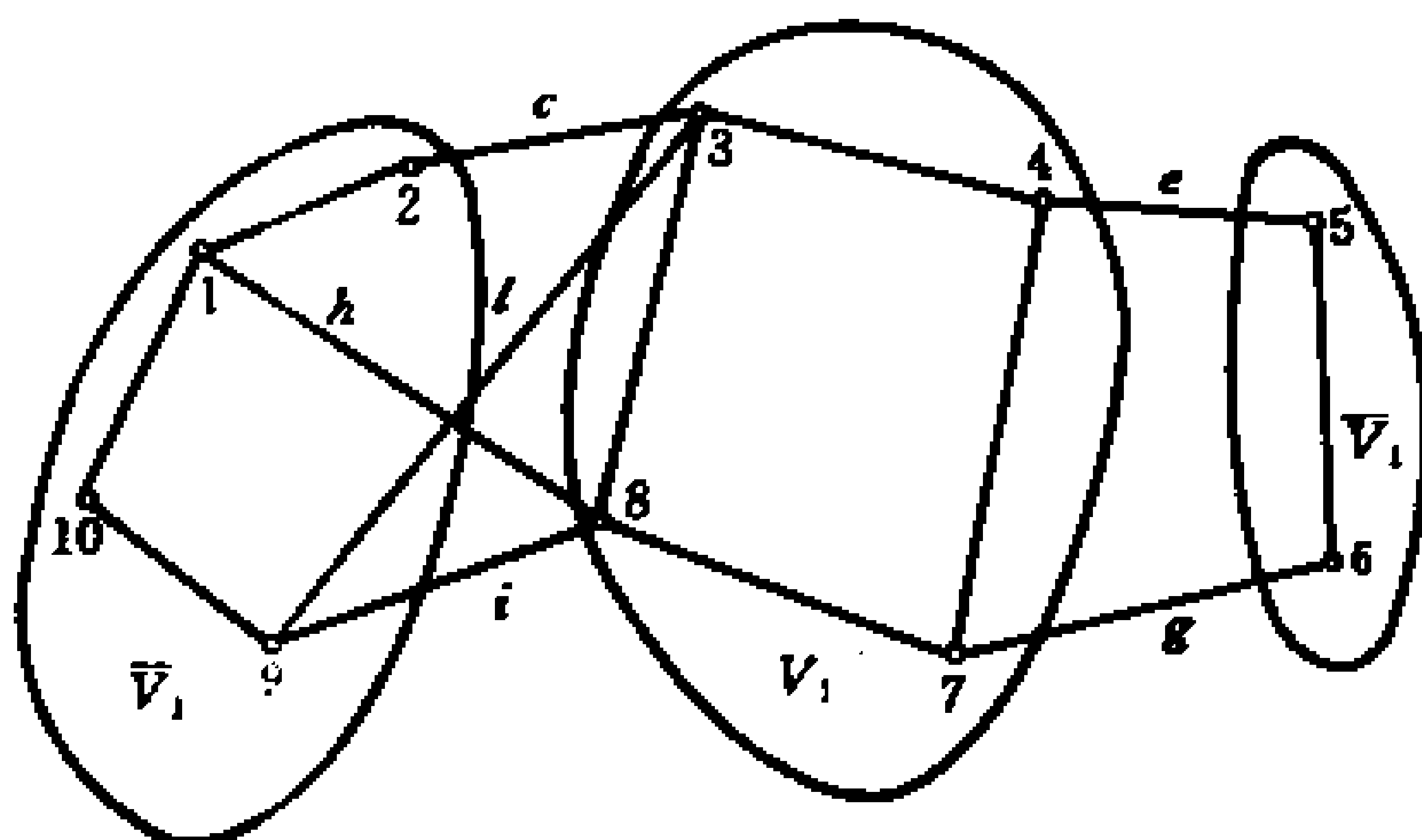


图 4.1-4

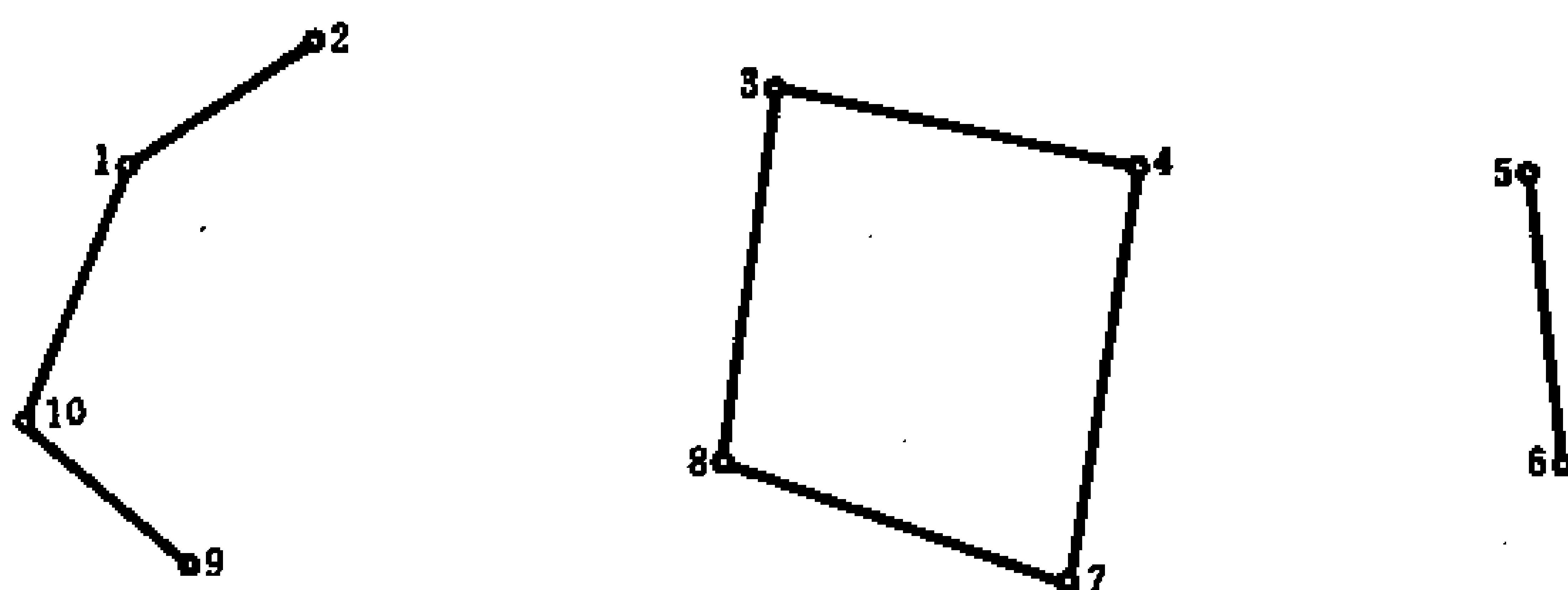


图 4.1-5

边集{c,k,l,i,e,g}虽然不是割集,但它是割集 $S_1=\{c,k,l,i\}$和割集 $S_2=\{e,g\}$的边不重并。

定义 4.1.2 图 G 中端点分别属于 V_1 和 $\overline{V}_1$ 的所有边的集合称为 G 的**断集**(seg)。

我们用 $E(V_1\times V_2)$(其中 V_1 和 V_2 分别为图 G 的两个顶

点子集)表示一个端点在 V_1 中,另一个端点在 V_2 中的所有边的集合。

例如,在图 4.1-6 所示的图 G 中,取 $V_1=\{1,2\}$,$V_2=\{2,3\}$(图 4.1-6(a)),那么

$$E(V_1 \times V_2) = \{a,b,c\}$$

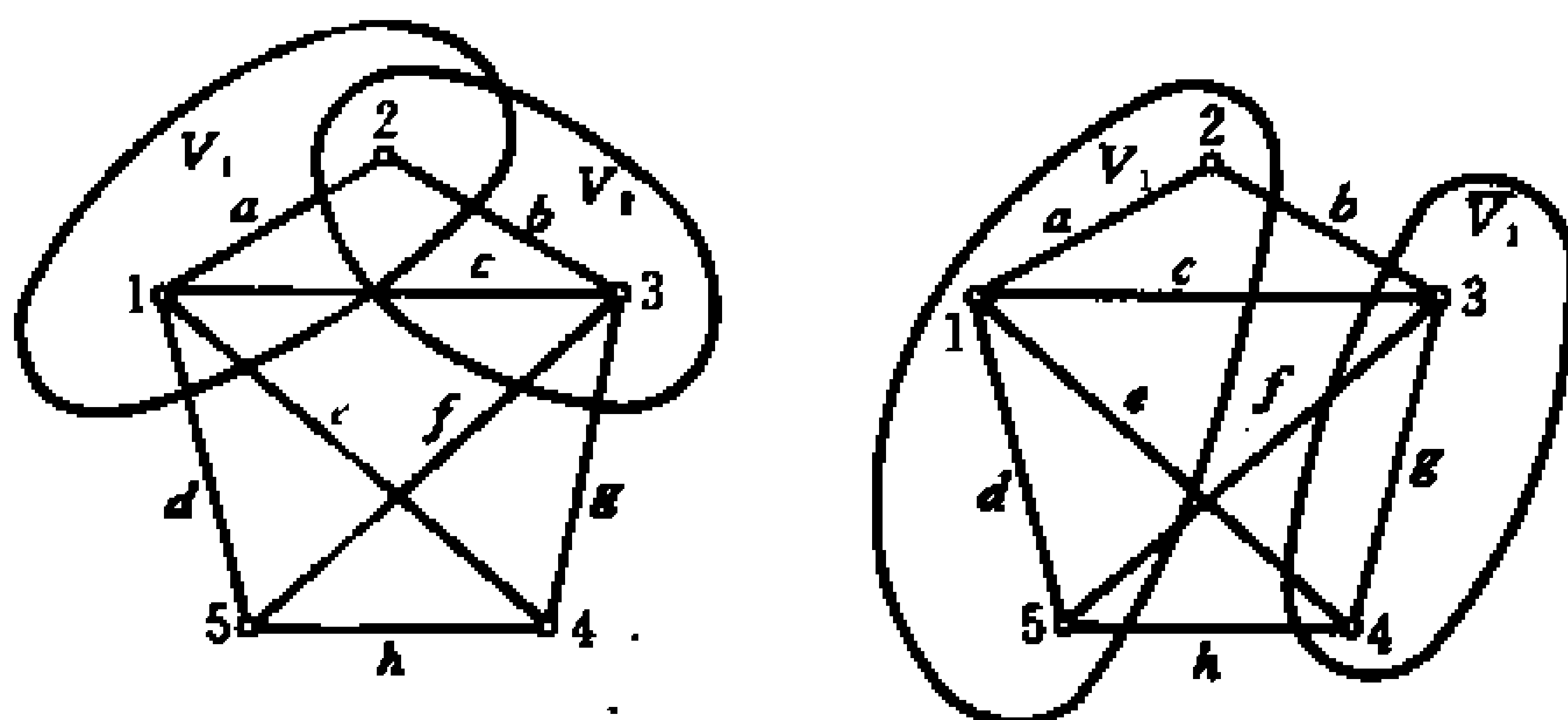


图 4.1-6

如果取 $V_1=\{1,2,5\}$,$V_2=\overline{V}_1\{3,4\}$(图 4.1-6(b)),那么

$$E(V_1 \times \overline{V}_1) = \{b,c,e,f,h\}$$

显然,形如 $E(V_1\times\overline{V}_1)$的边集是一个断集,反之,任一断集均可写成 $E(V_1\times\overline{V}_1)$的形式。

前面我们曾经指出,如果 $\overline{V}_1$ 中任何两个顶点间的道路均不经过 V_1 中的顶点,同时,V_1 中的任何两个顶点间的道路也不经过 $\overline{V}_1$ 的顶点,那么顶点子集 V_1 和 $\overline{V}_1$ 必为图 4.1-7 所示的情况,在这种情况下,边集 $E(V_1\times\overline{V}_1)$是割集。

如果顶点子集 $\overline{V}_1$ 中有两个顶点间的道路经过 V_1 中的顶点(或 V_1 中有两个顶点间的道路经过 $\overline{V}_1$ 中的顶点),那么顶点子集 V_1 和 $\overline{V}_1$ 必为图 4.1-8 所示的情况。在这种情况下,去掉边集 $E(V_1\times\overline{V}_1)$后,图 G 变成有三个分支的分离图,故为

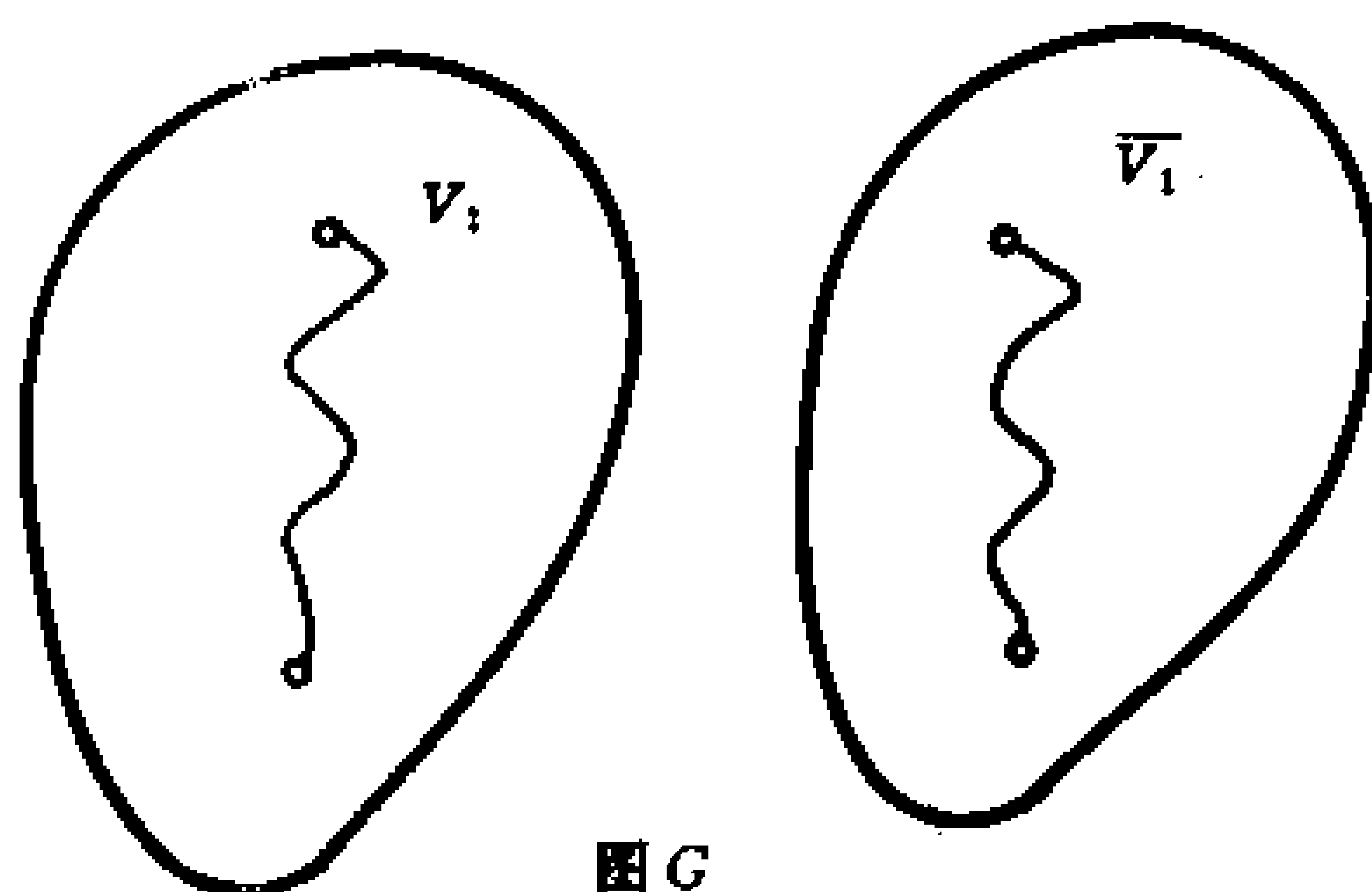


图 4.1-7

断集。

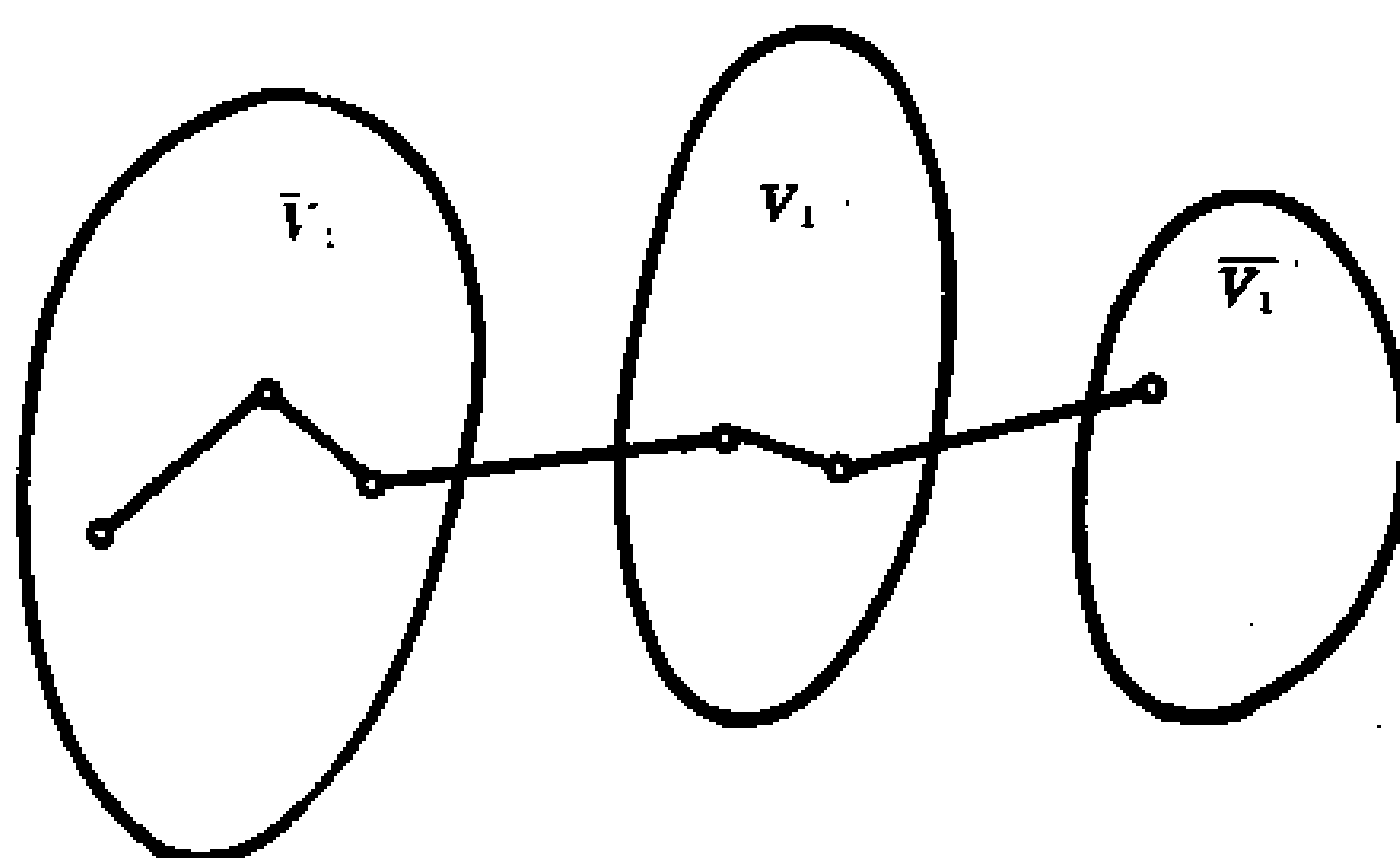


图 4.1-8

设 T 是连通图 G 的一棵生成树，记 $\overline{T}=G-E(T)$。我们有下面的

定理 4.1.1 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，并且 e 是任一树枝，则

(1) 连枝集中不包含 G 的割集。

(2) $\overline{T}+e$ 包含 G 的一个唯一的割集。

［证明］ (1) 设 S 是 G 的一个割集，则 $G-S$ 不连通，它不包含生成树 T。所以 S 不包含在连枝集中。

(2) 设 $T-e$ 的两个分支中的一个顶点集记为 V_1，则边集 $E(V_1\times\overline{V}_1)$ 显然是 G 的一个割集，并且包含在 $\overline{T}+e$ 中。对任何边 $a\in E(V_1\times\overline{V}_1)$，$(T-e)+a$ 是 G 的一棵生成树。所以包含在 $\overline{T}+e$ 中的 G 的每一个割集，必然包括每一个这样的边 a。由此推知，$E(V_1\times\overline{V}_1)$ 是包含在 $\overline{T}+e$ 中的 G 的唯一割集。∎

割集和连枝集的关系类似于圈和生成树之间的关系。

下面的定理给出了割集和生成树之间的关系。

定理 4.1.2 连通图 G 的一个割集至少包含生成的一个树枝。

［证明］ 如果把 G 的一个边集 S 去掉而仍存在生成树的话，那么图仍连通，故 S 一定不是割集。∎

4.2 关 联 集

定义 4.2.1 设 v 是图 G 的一个顶点，与 v 关联的所有边的集合，称为顶点 v 的**关联集**(incident set)，记作 $S(v)$。

例如，在图 4.2-1 所示的图中，顶点 1,2,3 的关联集分别是

$$S(1)=\{a,b\},$$
$$S(2)=\{a,c,d\},$$
$$S(3)=\{d,e,f,g,i,j\}$$

设图 G 的顶点集为

$$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$$

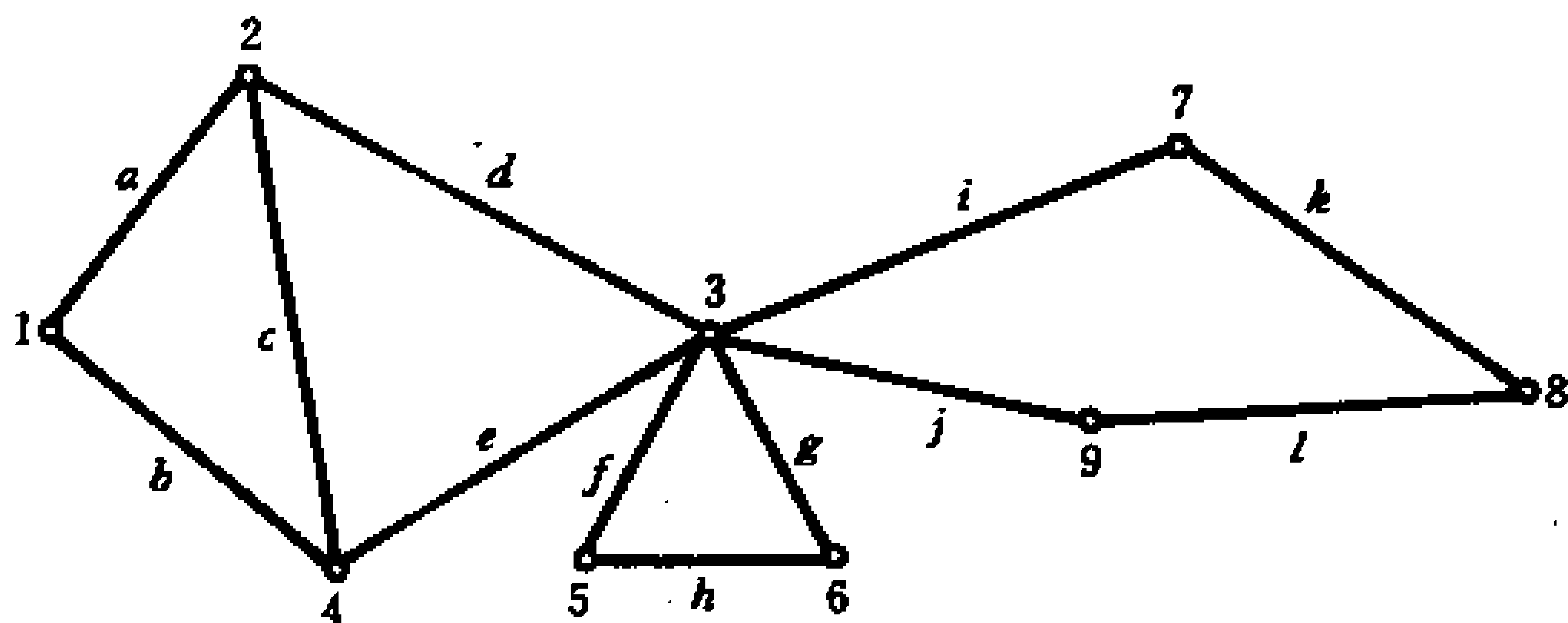


图 4.2-1

那么 G 中任一顶点 v_i 的关联集 $S(v_i)$ 可以表示成

$$S(v_i) = E(\{v_i\} \times \{\overline{v_i}\})$$

的形式，其中 $\{\overline{v_i}\} = \{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_p\}$。

例如，图 4.2-1 所示的图中

$$\begin{aligned} S(3) &= E(\{3\} \times \{\overline{3}\}) \\ &= E(\{3\} \times \{1,2,4,5,6,7,8,9\}) \\ &= \{d, e, f, g, i, j\} \end{aligned}$$

图 G 中任一顶点 v，如果它不是割点，那么顶点 v 的关联集 $S(v)$ 就是一个割集。这是因为去掉与 v 关联的所有边后，图 G 变成有一个孤立点 v 和一个分支的分离图，但是去掉 $S(v)$ 的任何一个子集，图仍连通；如果顶点 v 是 G 的割点，那么关集 $S(v)$ 是断集。这是因为去掉 $S(v)$ 后，变成有一个孤立点 v 和若干分支的分离图。

例如在图 4.2-1 所示的图中，顶点 1，2，4，5，6，7，8，9 的关联集都是割集；顶点 3 是割点，去掉 $S(3)$ 后，图变成如图 4.2-2所示的有一个孤立点和三个分支的分离图。

下面我们来证明关于关联集的两个定理。先来证明两个引理。

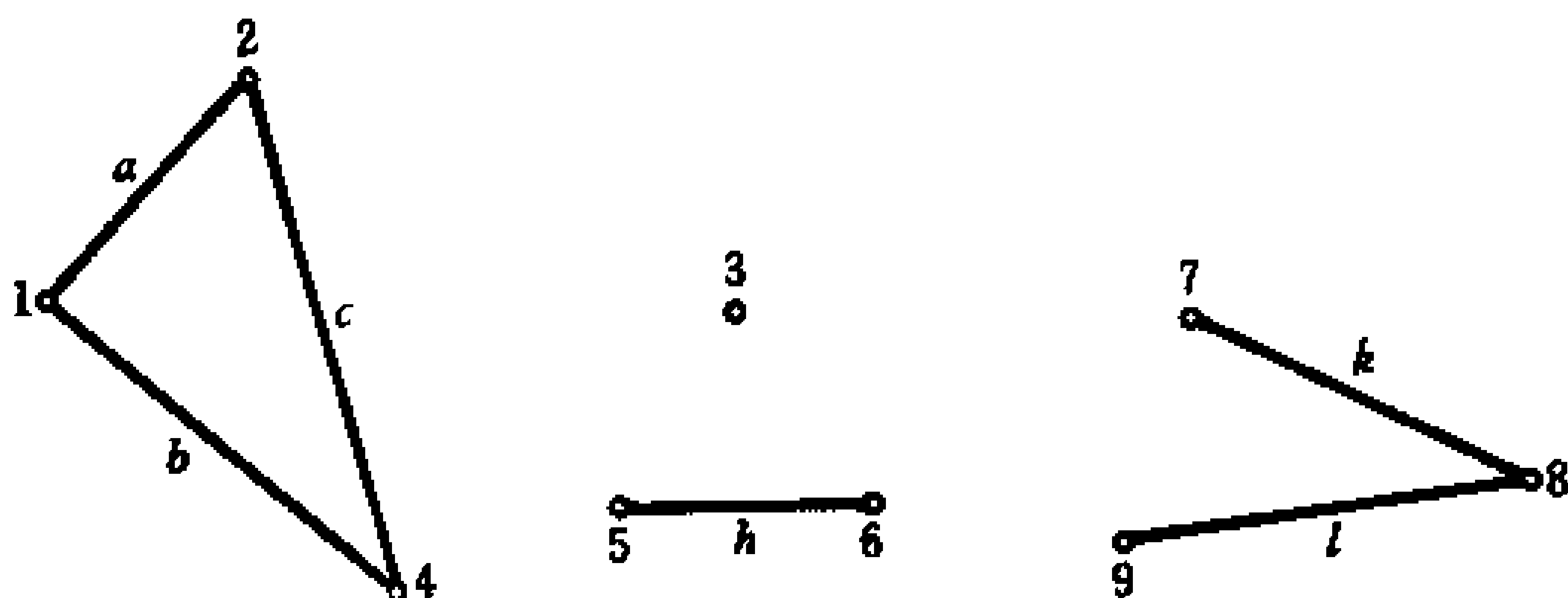


图 4.2-2

引理 4.2.1 设 V_1, V_2, V_3, V_4 是图 G 的顶点集合的非空子集，其中任何两个的交均为空集，则

$$E(V_1 \cup V_2 \times V_3 \cup V_4) = E(V_1 \times V_3) \oplus E(V_1 \times V_4) \oplus E(V_2 \times V_3) \oplus E(V_2 \times V_4) \quad (4.2\text{-}1)$$

$$E(V_1 \cup V_2 \times V_1 \cup V_2) = E(V_1 \times V_1) \oplus E(V_1 \times V_2) \oplus E(V_2 \times V_2) \quad (4.2\text{-}2)$$

［证明］ 边集 $E(V_1 \cup V_2 \times V_3 \cup V_4)$ 是一个端点在 $V_1 \cup V_2$ 中，另一个端点在 $V_3 \cup V_4$ 中的边的集合。显然，$E(V_1 \cup V_2 \times V_3 U V_4)$ 可以分解成四个集合：

$E(V_1 \times V_3)$．$E(V_1 \times V_4)$，$E(V_2 \times V_3)$，$E(V_2 \times V_4)$，

故有

$$E(V_1 \cup V_2 \times V_3 \cup V_4) = E(V_1 \times V_3) \cup E(V_1 \times V_4) \cup E(V_2 \times V_3) \times E(V_2 \times V_4)$$

因为集合 V_1, V_2, V_3 和 V_4 两两互不相交，所以 $E(V_1 \times V_3)$，$E(V_1 \times V_4)$．$E(V_2 \times V_3)$，$E(V_2 \times V_4)$ 两两无公共边，于是有

$$E(V_1 \cup V_2 \times V_3 \cup V_4) = E(V_1 \times V_3) \oplus E(V_1 \times V_4) \oplus E(V_2 \times V_3) \oplus E(V_2 \times V_4)$$

同样可以证明等式(4.2-2)。∎

引理 4.2.2 设 V_1 和 V_2 是图 G 顶点集合的两个非空子集，则

$$E(V_1 \times \overline{V}_1) \oplus E(V_2 \times \overline{V}_2)$$
$$= E(V_{11} \cup V_{22} \times V_{21} \cup V_{12})$$
$$= E(V_3 \times \overline{V}_3)$$

其中 $V_{11} = V_1 \cap V_2$，

$V_{12} = V_1 - V_2$，

$V_{21} = V_2 - V_1$，

$V_{22} = \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$，

$V_3 = V_{11} \cup V_{22}$（图 4.2-3）。

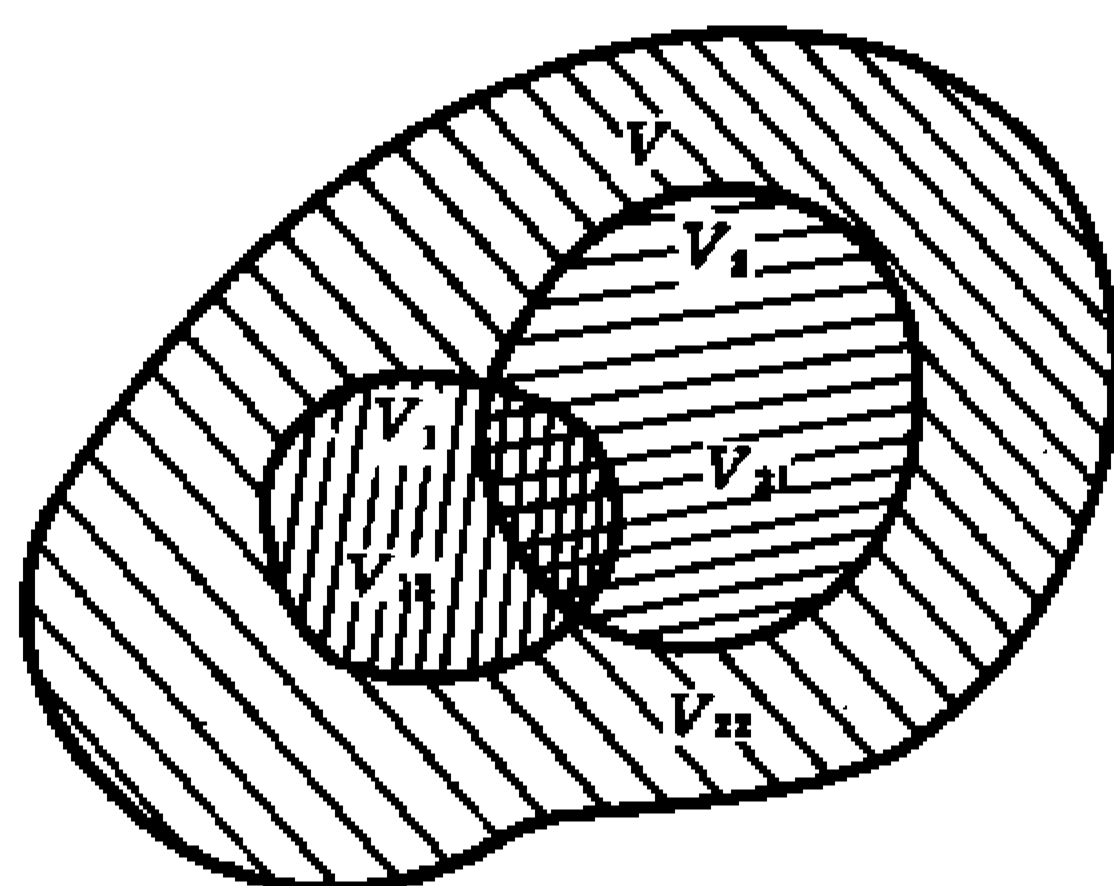


图 4.2-3

［证明］ 对 V_1 和 V_2，有

$$E(V \times V) = E(V_1 \times V_1) \oplus E(V_1 \times \overline{V}_1) \oplus E(\overline{V}_1 \times \overline{V}_1)$$
$$E(V \times V) = E(V_2 \times V_2) \oplus E(V_2 \times \overline{V}_2) \oplus E(\overline{V}_2 \times \overline{V}_2)$$

于是

$$E(V_1 \times \overline{V}_1) = E(V \times V) \oplus E(V_1 \times V_1) \oplus E(\overline{V}_1 \times \overline{V}_1)$$
$$E(V_2 \times \overline{V}_2) = E(V \times V) \oplus E(V_2 \times V_2) \oplus E(\overline{V}_2 \times \overline{V}_2)$$

故有

$$E(V_1 \times \overline{V}_1) \oplus E(V_2 \times \overline{V}_2) = E(V_1 \times V_1) \oplus E(\overline{V}_1 \times \overline{V}_1) \oplus E(V_2 \times V_2) \oplus E(\overline{V}_2 \times \overline{V}_2)$$

以 $V_1 = V_{11} \cup V_{12}$，$\overline{V}_1 = V_{21} \cup V_{22}$，$V_2 = V_{11} \cup V_{21}$，$\overline{V}_2 = V_{12} \cup V_{22}$，代入上式，并由引理 4.2.1，有

$$E(V_1 \times \overline{V}_1) \oplus E(V_2 \times \overline{V}_2)$$
$$= E(V_{11} \cup V_{12} \times V_{11} \cup V_{12})$$

$$\oplus E(V_{21}\cup V_{22}\times V_{21}\cup V_{22})$$
$$\oplus E(V_{11}\cup V_{21}\times V_{11}\cup V_{21})$$
$$\oplus E(V_{12}\cup V_{22}\times V_{12}\cup V_{22})$$
$$= E(V_{11}\times V_{11})\oplus E(V_{11}\times V_{12})$$
$$\oplus E(V_{12}\times V_{12})\oplus E(V_{21}\times V_{21})$$
$$\oplus E(V_{21}\times V_{22})\oplus E(V_{22}\times V_{22})$$
$$\oplus E(V_{11}\times V_{11})\oplus E(V_{11}\times V_{21})$$
$$\oplus E(V_{21}\times V_{21})\oplus E(V_{12}\times V_{12})$$
$$\oplus E(V_{12}\times V_{22})\oplus E(V_{22}\times V_{22})$$
$$= E(V_{11}\times V_{12})\oplus E(V_{11}\times V_{21})$$
$$\oplus E(V_{12}\times V_{22})\oplus E(V_{21}\times V_{22})$$

因为 $V_{11},V_{12},V_{21},V_{22}$ 中任何两个的交均为空集，故由引理 4.2.1，有

$$E(V_{11}\times V_{12})\oplus E(V_{11}\times V_{21})$$
$$\oplus E(V_{12}\times V_{22})\oplus E(V_{21}\times V_{22})$$
$$\oplus E(V_{11}\cup V_{22}\times V_{12}\cup V_{21}) = E(V_3\times\overline{V}_3)\quad ∎$$

定理 4.2.1 图 G 的任一断集均可表示成若干个关联集的环和。

[证明] 设 G 的顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_p$，令

$V_{11}=\varnothing$，$V_{12}=\{v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}\}$，$V_{21}=\{v_k\}$，

$V_{22}=\{v_{k+1},\cdots,v_p\}$，

$V_1=V_{11}\cup V_{12}=\{v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}\}$，

$V_2=V_{11}\cup V_{21}=\{v_k\}$

由引理 4.2.2，有

$$E(\{v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}\}\times\overline{\{v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}\}})$$
$$\oplus E(\{v_k\}\times\overline{\{v_k\}})$$

$$= E(\{v_{k+1},\cdots,v_p\} \times \overline{\{v_{k+1},\cdots,v_p\}})$$
$$= E(\{v_{k+1},\cdots,v_p\} \times \{v_1,\cdots,v_k\})$$
$$= E(\{v_1,\cdots,v_k\} \times \overline{\{v_1,\cdots,v_k\}})$$

令 $k=2$，有

$$E(\{v_1\} \times \{\bar{v}_1\}) \oplus E(\{v_2\} \times \{\bar{v}_2\}) = E(\{v_1,v_2\} \times \overline{\{v_1,v_2\}})$$

令 $k=3$，有

$$E(\{v_1,v_2\} \times \overline{\{v_1,v_2\}}) \oplus E(\{v_3\} \times \overline{\{v_3\}})$$
$$= E(\{v_1\} \times \overline{\{v_1\}}) \oplus E(\{v_2\} \times \overline{\{v_2\}}) \oplus E(\{v_3\} \times \overline{\{v_3\}})$$

一般地，有

$$E(\{v_1,\cdots,v_k\} \times \overline{\{v_1,\cdots,v_k\}}) = E(\{v_1\} \times \overline{\{v_1\}}) \oplus E(\{v_2\} \times \overline{\{v_2\}}) \oplus \cdots \oplus E(\{v_k\} \times \overline{\{v_k\}}) \quad (4.2\text{-}2)$$

因为任一断集 S 可以写成 $E(\{v_1,\cdots,v_k\}\times\overline{\{v_1,\cdots,v_k\}})$这种形式，故由等式(4.2-2)知定理为真。▮

推论 4.2.1 图 G 中任一顶点的关联集等于其余顶点关联集的环和。

［证明］ 设图 G 的全部点是 $v_1,v_2,\cdots,v_p$，因为

$$E(\{v_1,v_2,\cdots,v_p\} \times \overline{\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}}) = \varnothing$$

由式(4.2-2)，有

$$E(\{v_1\} \times \{\bar{v}_1\}) \oplus E(\{v_2\} \times \{\bar{v}_2\}) \oplus \cdots \oplus E(\{v_p\} \times \{\bar{v}_p\}) = \varnothing$$

于是对任意 v_i，有

$$E(\{v_i\} \times \{\bar{v}_i\}) = E(\{v_1\} \times \{\bar{v}_1\}) \oplus \cdots \oplus E(\{v_{i-1}\} \times \{\overline{v_{i-1}}\}) \oplus \cdots \oplus E(\{v_p\} \times \{\bar{v}_p\}) \quad ▮$$

习 题 四

4-1 证明：图 G 的任一生成树和任一割集至少有一条公共边。

4-2 设图 G 连通，S 是 $V(G)$ 的非空子集，证明：$E(S\times\overline{S})$ 为割集当且仅当 $G[S]$ 和 $G[\overline{S}]$ 均为连通。

4-3 设 e 是 p 阶完全图中的一条边，试求：1）包含 e 的割集数，2）不包含 e 的割集数。

4-4 试 e_1,e_2 是 p 阶完全图中两条不同的边，试求同时包含 e_1,e_2 的割集的个数。

4-5 证明：在图 G 中，任一圈与任一割集的公共边为偶数。

第五章　圈空间与割集空间

这一章我们来讨论图的圈空间和割集空间，它们具体给出求一个图的全部圈和割集的方法，这在实际应用中是很重要的。

本章中的许多概念与线性代数中关于线性空间的概念基本相同，证明的方法也相似。

5.1　图的向量空间

首先我们给出图论中的向量及其运算的定义。

定义 5.1.1　n 个只取 0 或 1 的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，按一定次序排成一行，再用括号括起来写成

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

叫做一个 **n 维向量**。其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 叫做**分量**。

两个 n 维向量 $\bar{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\bar{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的**和**是指 n 维向量

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

其中 a_i+b_i 是模 2 加法，即

$$1+1=0, 1+0=1, 0+1=1$$

数 k 与向量 $\bar{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的**乘积**是指 n 维向量

$$k\bar{a}=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

不难验证，设 $F=\{0,1\}$，则 F 在模 2 加法和数乘运算下作成一个域。又设 R 是 n 维向量的集合，那么在上面定义的

向量加法和数乘运算下，R 作成域 F 上的一个线性空间。

定义 5.1.2 设 $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n$ 为 n 个向量，如果存在 n 个不全为零的数，$c_1,c_2,\cdots,c_n\in F,i=1,2,\cdots,n$，使等式

$$c_1\bar{u}_1+c_2\bar{u}_2+\cdots+c_n\bar{u}_n=0$$

成立，则称 $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n$ **线性相关**，否则称为**线性无关**。

如果向量 $\bar{v}$ 可以表示为

$$\bar{v}=c_1\bar{u}_1+c_2\bar{u}_2+\cdots+c_n\bar{u}_n$$

其中 $c_i\in F,i=1,2,\cdots,n$，则称 $\bar{v}$ 是 $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n$，的**线性组合**。

设 S 是一个 n 维向量组，如果 S 中任一向量都可表示成向量 $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n$ 的线性组合，则称 $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n$ 是 S 的**生成元素组**。又若 $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n$ 线性无关，则称 $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n$ 是一个**线性无关极大组**。

线性空间 R 的一个线性无关极大组叫做空间的**基底**，基底中所含向量的个数叫做空间的**维数**。

设 G 是设有孤立点的图，其边数为 q。由于每条边都有两种选择，即包含于或不包含于 G 的某个子图中。如果每条边都包含就是图 G，如果每条边都不包含，就是空图，于是我们有下面的命题。

命题 5.1.1 图 G 中所有不同的子图的个数是 2^q(包括图 G 种空图$\varnothing$)。

设 $G_1,G_2,\cdots,G_N(N=2^q)$是图 G 的全部子图，令 $\mathscr{G}=\{G_1,G_2,\cdots,G_N\}$，则有下面的定理。

定理 5.1.1 集合 $\mathscr{G}=\{G_1,G_2,\cdots,G_N\}$在环和运算与数乘运算：

$$0G_i=\varnothing,1\cdot G_i=G_i,G_i\in\mathscr{G}$$

下构成域 $F=\{0,1\}$上的一个 q 维向量空间。

[证明] 首先，$\mathscr{G}$ 对环和运算是封闭的，这是因为，

$G_i \oplus G_j$是由除去 G_i 和 G_j 中的公共的所有边(连同与它们关联的顶点)组成的一个子图，且环和运算满足交换律和结合律。

其次，对任意的 $G_i \in \mathscr{G}$，有

$$\varnothing \oplus G_i = G_i \oplus \varnothing = G_i, G_i \oplus G_i = \varnothing$$

故空图是零元素，G_i 的负元素是 G_i 自身。

对任意的 a、$b \in F$ 和任意的 $G_i, G_j \in \mathscr{G}$，有

$$(ab)G_i = a(bG_i)$$

$$(a + b)G_i = aG_i \oplus bG_i$$

$$a(G_i \oplus G_j) = aG_i \oplus aG_j$$

这是因为 a、b 只能取 0 和 1，故用穷举法，将 a,b 的各种取值情况一一代入验算，即可证明上面三个等式成立。例如，取 $a=0$，$b=1$ 有

$$(0 + 1)G_i = 1G_i = G_i$$

$$(0G_i) \oplus (1G_i) = \varnothing \oplus G_i = G_i$$

设图 G 的边集 $E(G)=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$，考虑集合

$$S = \{g_1, g_2, \cdots, g_q\}$$

其中 g_i 是仅由一条边 e_i 组成的子图。

对任意的 $G_i \in \mathscr{G}$，如果 G_i 的边集是$\{e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{im}\}$那么

$$G_i = g_{i1} \oplus g_{i2} \oplus \cdots \oplus g_{im}$$

这就是说，G 的任一子图可由 S 生成。

最后，我们来证明 $g_1, g_2, \cdots, g_q$ 是线性无关的。

事实上，如果有一组不全为 0 的 $c_i \in F$，使得

$$c_1 g_1 \oplus c_2 g_2 \oplus \cdots \oplus c_q g_q = \varnothing \qquad (5.1\text{-}1)$$

不失一般性，可假定 $c_k=1$，这时有 $c_k g_k = g_k$，因所有的 $c_i g_i (i \neq k)$ 中均不含有 e_k 边，故它们与 g_k 的环和必含有边 e_k，这与等式(5.1-1)矛盾。因此 $g_1, g_2, \cdots, g_q$ 线性无关。于是 S

是 G 的所有子图作成的向量空间 $\mathscr{G}$ 的一组基底，且 $\mathscr{G}$ 的维数是 q。∎

例 5.1.1 设图 G 如图 5.1-1 所示。图 G 的所有子图如图 5.1-2 所示。集合

$$\mathscr{G}=\{\varnothing,G,G_1,G_2,\cdots,G_{14}\}$$

构成域 $F=\{0,1\}$ 上的一个 4 维向量空间，基底是

$$S=\{G_1,G_2,G_3,G_4\}$$

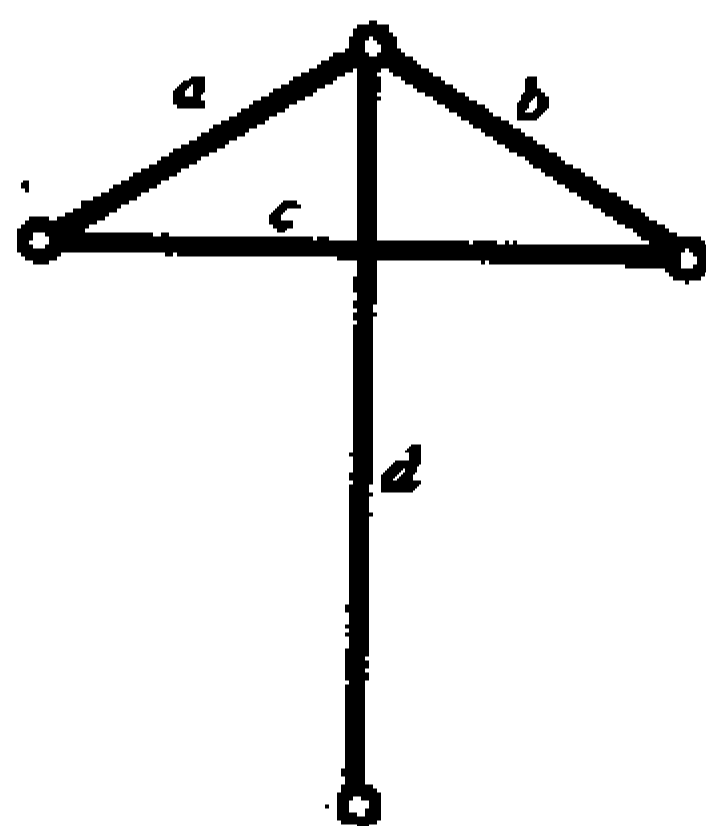
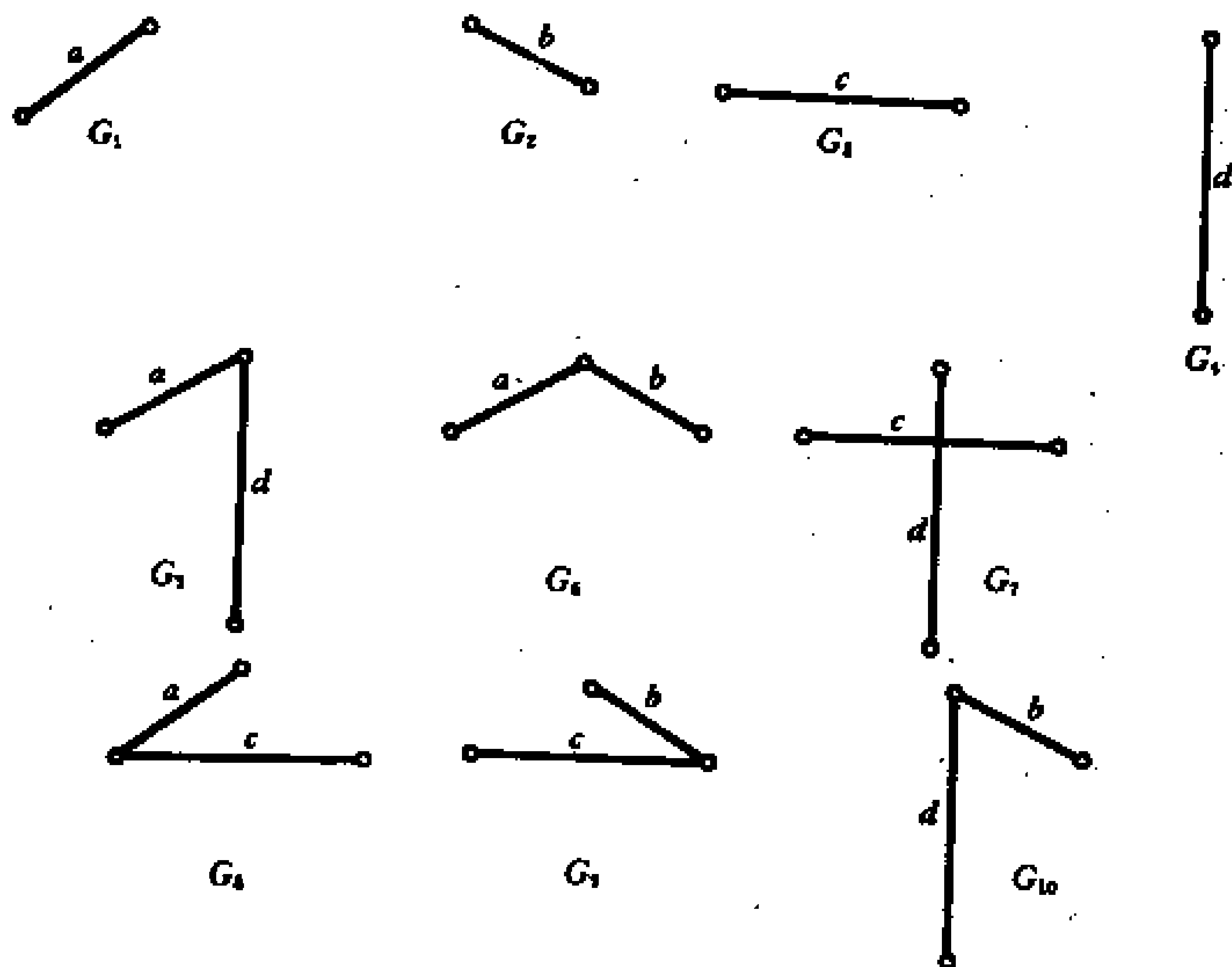


图 G

图 5.1-1



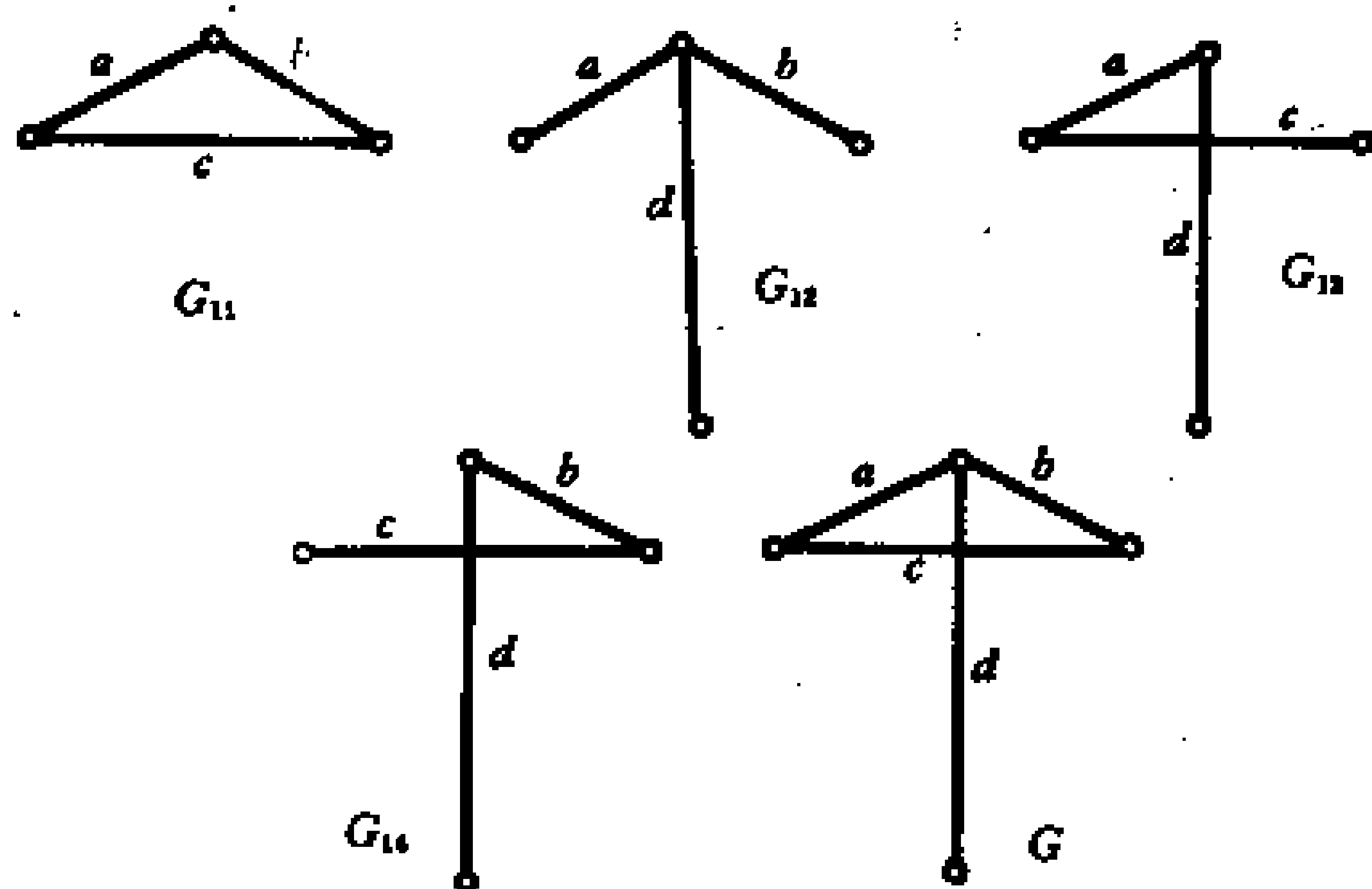


图 5.1-2

5.2 圈　空　间

由定理 2.3.3 知，如果 T 是图 G 的一棵生成树，e' 是一条连枝（见定义 2.3.1），则 $T+e'$ 含有一条唯一的圈。于是我们有下面的定义。

定义 5.2.1　设 T 是连通 G 的一棵生成树，由 T 的树枝和一条连枝构成的圈，称为图 G 关于生成树 T 的**基本圈**（fundamental cycle）。

设图 G 为连通 (p,q) 图，那么 G 的任一生成树 T 的树枝数和关于 T 的连枝数均为 p 和 $q-p+1$。

由 $q-p+1$ 条连枝构成的 $q-p+1$ 个基本圈，称为 G 关于生成树的**基本圈组**，记作 C_f。由于一个图 G 的生成树不是唯一的，因而一个图的基本圈组也不是唯一的。

例 5.2.1　如图 5.2-1 所示，图 G 中生成树 T 的边集是 $E(T)=\{d,e,f\}$（为了方便起见以后简记为 $T=\{d,e,f\}$）。

图 G 关于生成树 $T=\{d,e,f\}$ 的连枝集是

$$\{a,b,c\}$$

于是 G 关于 T 的基本圈组为

$$C_f=\{\{a,d,f\},\{b,d,e\},\{c,e,f\}\}$$

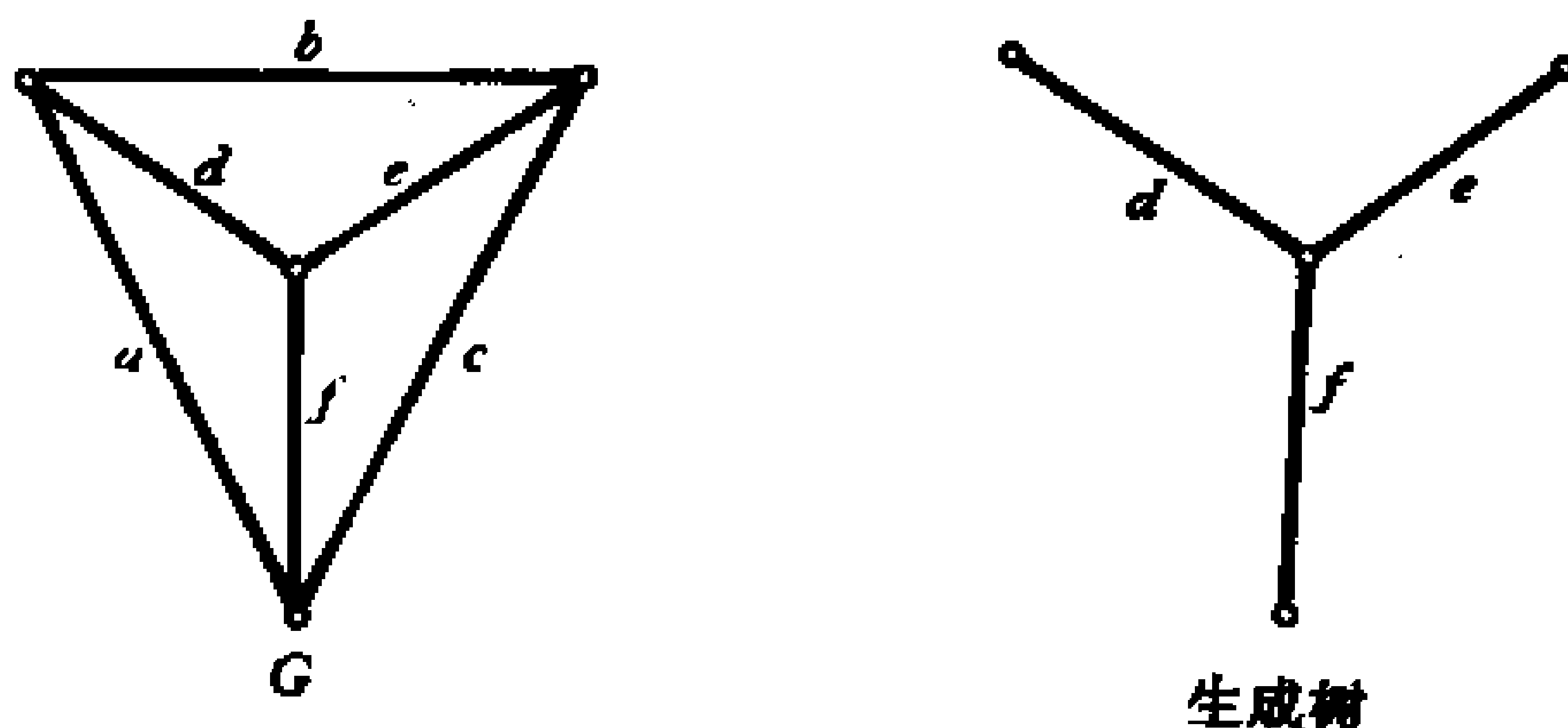


图 5.2-1

下面我们来讨论基本圈组的性质。

设 $e'_i(i=1,2,\cdots,q-p+1)$ 是连通图 G 关于生成树 T 的连枝，$C_i(i=1,2,\cdots,q-p+1)$ 是包含连枝 e'_i 的基本圈。

定理 5.2.1 图 G 关于生成树 T 的基本圈 $C_1,C_2,\cdots,C_{q-p+1}$ 是线性无关的。

[证明] 因为每一个连枝在且仅在 G 关于 T 的一个基本圈中，也就是说，$C_1,C_2,\cdots,C_{q-p+1}$ 中的任意两个基本圈，含有不同的边。因此，若 $a_1,a_2,\cdots,a_{q-p+1}$ 不全为零时，$a_1C_1\oplus a_2C_2\oplus\cdots\oplus a_{q-p+1}C_{q-p+1}$ 不会是空图。■

定理 5.2.2 连通图 G 的任一环路均可表示成若干个基本圈的环和。

[证明] 设 B 是图 G 的任一环路，显然 B 中至少包含一条连枝。设 B 的边集为

$$\{e'_{i1},e'_{i2},\cdots,e'_{im},e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{jn}\}$$

其中 $e'_{i1},e'_{i2},\cdots,e'_{im}$ 是连枝，$e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{jn}$ 是树枝。设由连枝 $e'_{i1},e'_{i2},\cdots,e'_{im}$ 确定的基本圈分别为 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{im}$，并设

$$B' = C_{i1} \oplus C_{i2} \oplus \cdots \oplus C_{im}$$

显然，环路 B' 中包含连枝 $e'_{i1},e'_{i2},\cdots,e'_{im}$，而不含有其他的连枝。由于环路 B 中也只含有连枝 $e'_{i1},e'_{i2},\cdots,e'_{im}$ 而不含有其他的连枝，所以环路 $B\oplus B'$ 中将不含有连枝而只有树枝，这是不可能的，故必有

$$B \oplus B' = \varnothing$$

于是我们有

$$B = B' = C_{i1} \oplus C_{i2} \oplus \cdots \oplus C_{im} \qquad \blacksquare$$

定理 5.2.3 连通 (p,q) 图 G 的所有环路和空图的集合构成一个 $q-p+1$ 维空间，记作 $\mathscr{B}(G)$ 称为**圈空间**(cycle space)。

[证明] 因为环路是欧拉图，由 3.2 节中的 4)有，集合 $\mathscr{B}(G)$ 对环和运算封闭，即对 $\forall\ B_i,B_j\in\mathscr{B}(G)$，有

$$B_i \oplus B_j \in \mathscr{B}(G)$$

又对任意的 $B_i\in\mathscr{B}(G)$ 和 $a_i\in F=\{0,1\}$，有

$$a_iB_i \in \mathscr{B}(G)$$

故 $\mathscr{B}(G)$ 是向量空间 $\mathscr{G}(G)$ 的一个子空间。

由定理 5.2.1 和定理 5.2.2 知，图 G 关于生成树的基本圈组是空间 $\mathscr{B}(G)$ 的一组基底。因此，空间 $\mathscr{B}(G)$ 的维数是 $q-p+1$。$\blacksquare$

因为连通图 G 的基本圈组不是唯一的，所以 G 的圈空间的基底也不是唯一的。

定理 5.2.4 连通 (p,q) 图 G 的圈空间中元素的个数为 2^{q-p+1}。

[证明] 因为任一环路在基本圈的环和表示中，每个基

本圈 C_i 都有两种可能，即出现或不出现，故定理为真。▮

由上面的讨论可以知道，要求一个图的全部环路，就是求圈空间的全部非零元素。为此，先求出 G 关于某一棵生成树的基本圈组，然后求基本圈组中元素的所有可能的环和。

例 5.2.2 设图 G 如图 5.2-2 所示。取 G 的一棵生成树 T 为

$$T = \{a,b,d,g\}$$

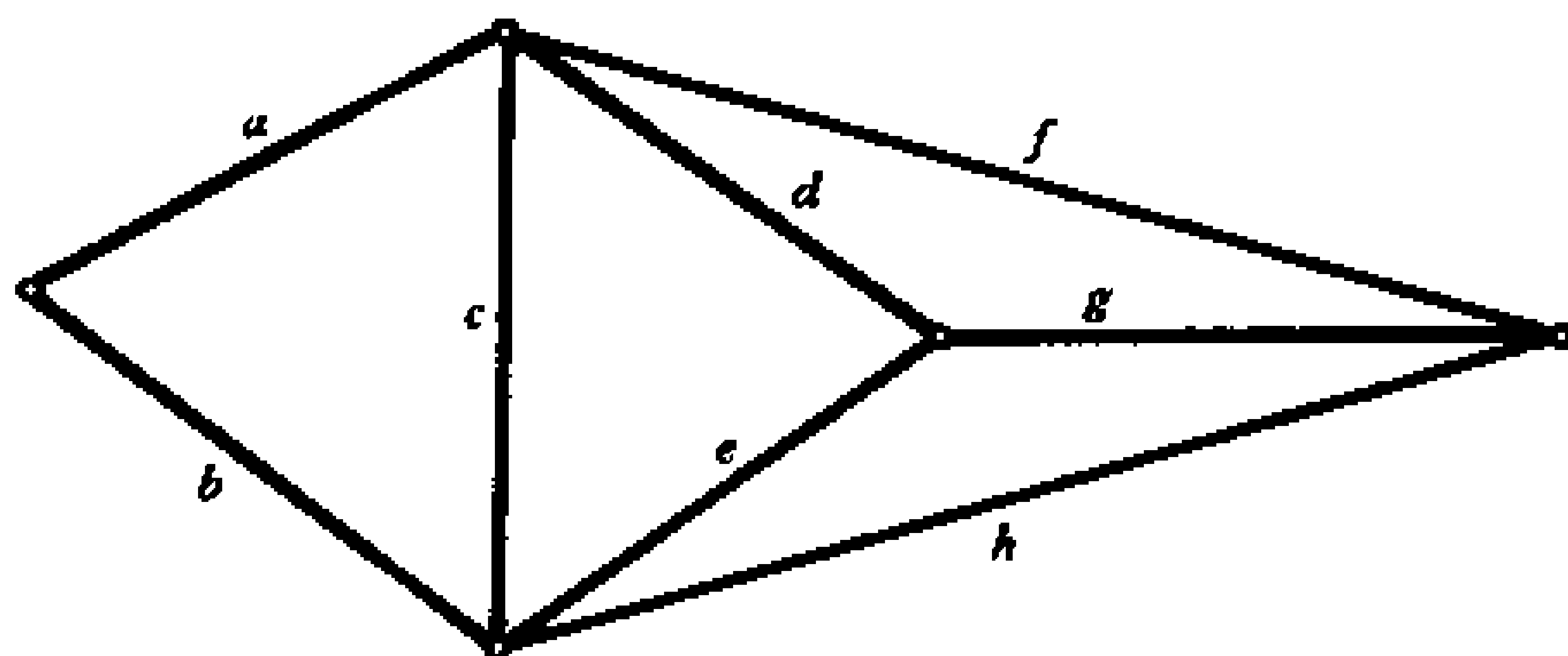


图 5.2.-2

图 G 关于 T 的基本圈组是

$$C_1 = \{a,b,c\}$$

$$C_2 = \{a,b,d,e\}$$

$$C_3 = \{a,b,d,g,h\}$$

$$C_4 = \{d,f,g\}$$

它们的图形如图 5.2-3 所示。

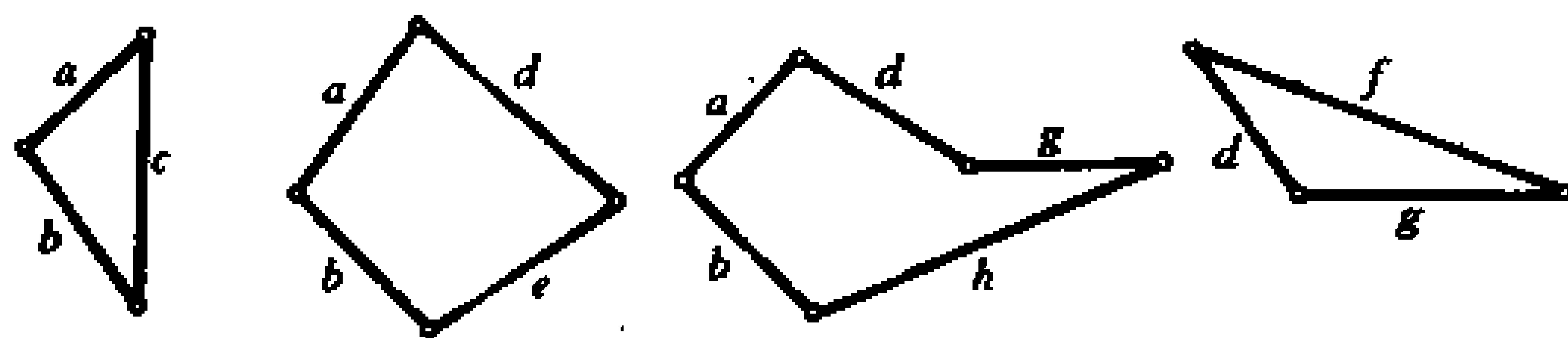


图 5.2-3

C_1,C_2,C_3 和 C_4 的所有可能的环和是

$B_1 = C_1 \oplus C_2 = \{c,d,e\}$

$B_2 = C_1 \oplus C_3 = \{c,d,g,h\}$

$B_3 = C_1 \oplus C_4 = \{a,b,c,d,f,g\}$

$B_4 = C_2 \oplus C_3 = \{e,g,h\}$

$B_5 = C_2 \oplus C_4 = \{a,b,e,f,g\}$

$B_6 = C_3 \oplus C_4 = \{c,b,f,h\}$

$B_7 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 = \{a,b,c,,e,g,h\}$

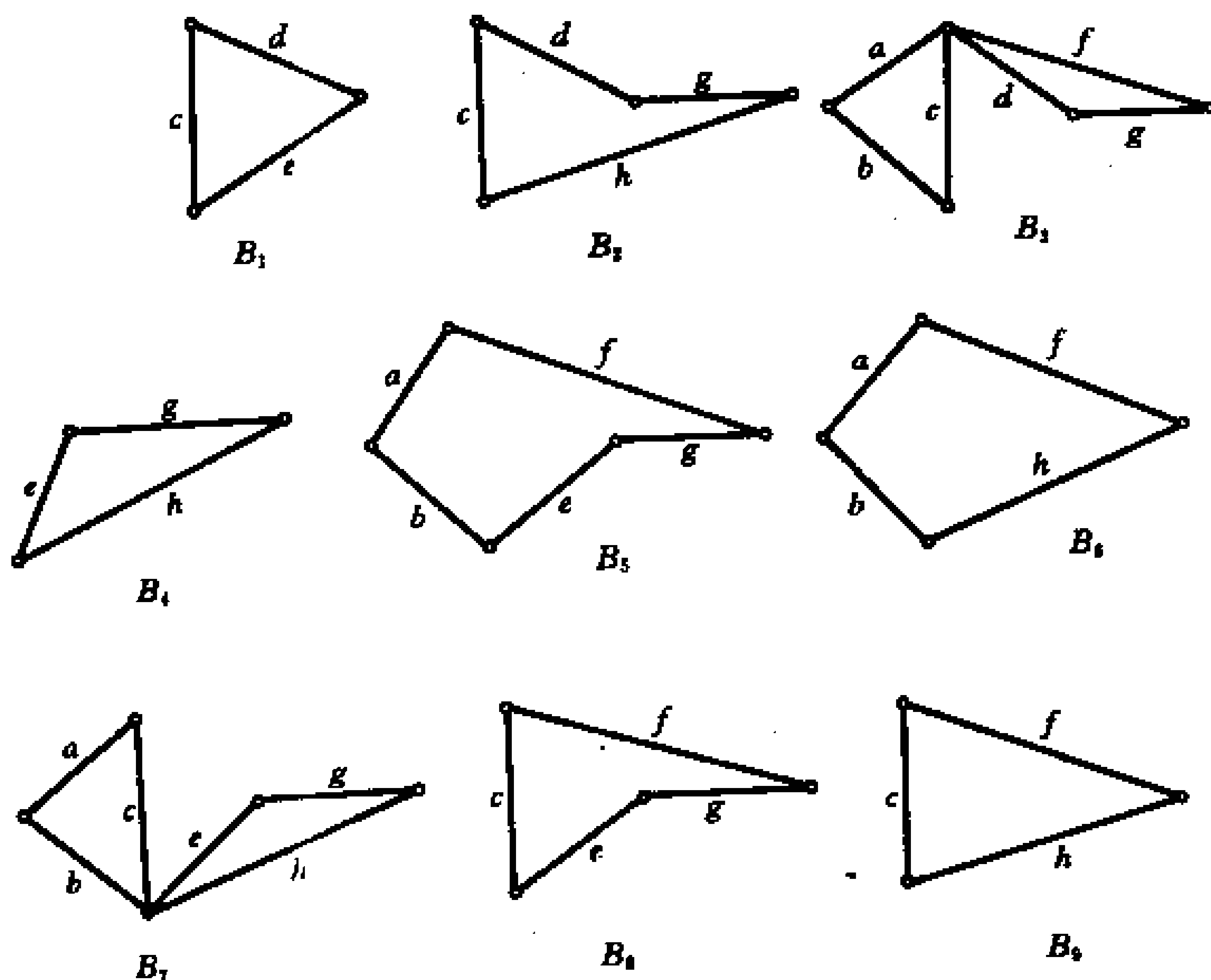
$B_8 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 = \{c,e,f,g\}$

$B_9 = C_1 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{c,f,h\}$

$B_{10} = C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{d,e,f,h\}$

$B_{11} = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{a,b,c,d,e,f,h\}$

它们的图形如图 5.2-4 所示。



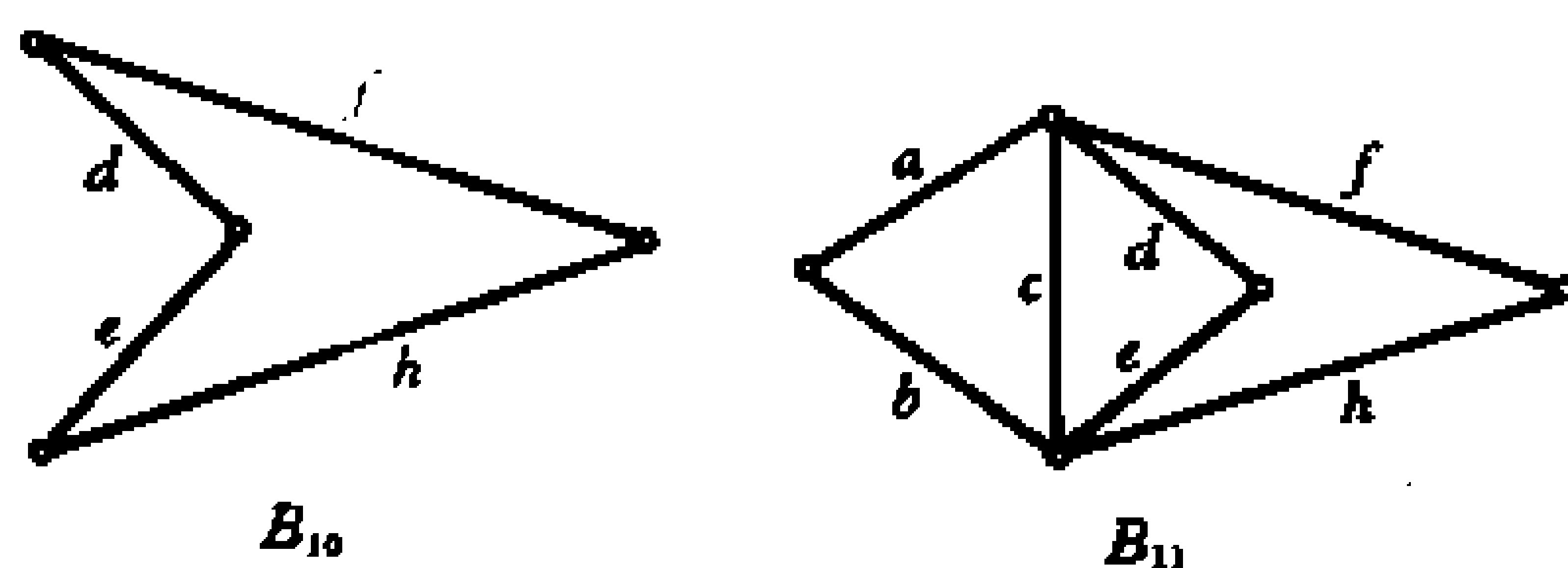


图 5.2-4

5.3 割集空间

定义 5.3.1 设 S 是图 G 的一个割集，T 是一棵生成树，如果 S 中恰好含有 T 的一个树枝，则称 S 为 G 的关于生成树 T 的**基本割集**(fundamental cut set)。

任何割集至少包含一个树枝，而基本割集恰好包含一个树枝。这与基本圈相似，任何圈至少包含一个连枝，而基本圈只包含一个连枝。

如果 T 是 p 阶连通图 G 的一棵生成树，那么 T 有 $p-1$ 个树枝，这样可以确定出 $p-1$ 个基本割集。每个基本割集只含一个树枝，这 $p-1$ 个基本割集称为图 G 的关于生成树 T 的**基本割集组**，记作 S_f。

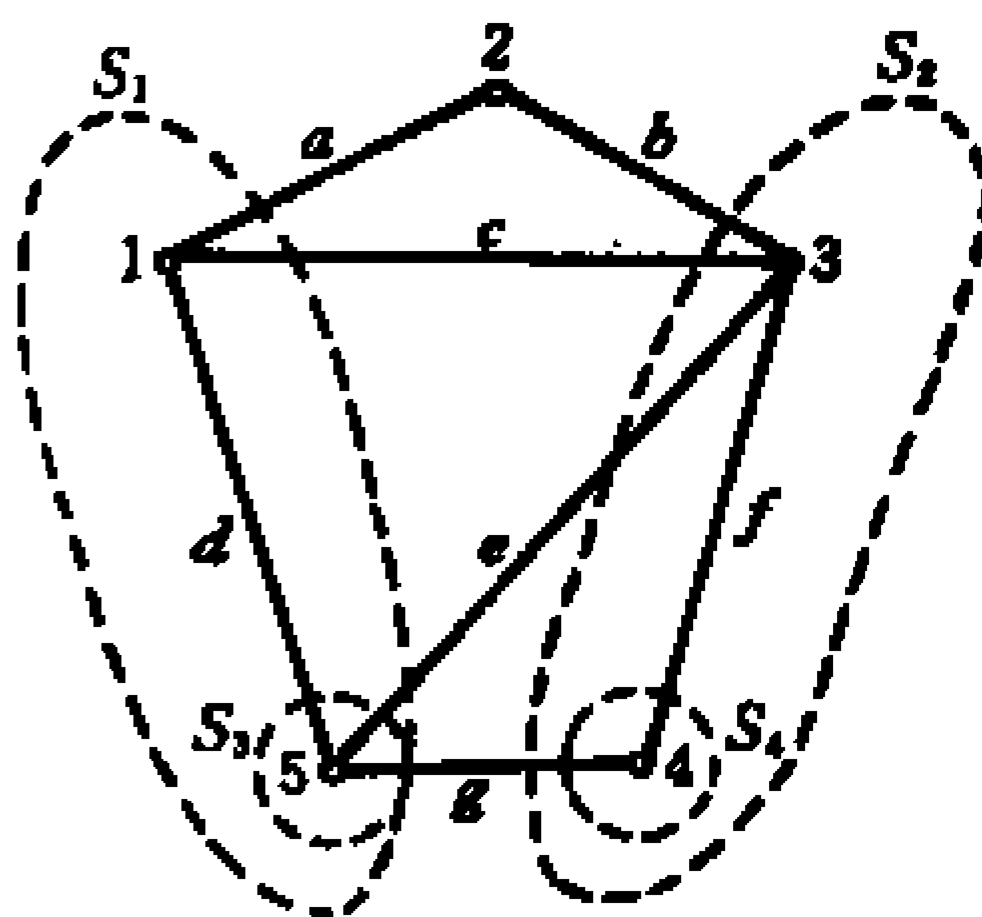


图 5.3-1

例如，在图 5.3-1 中，取 $T=\{a,b,d,f\}$，G 关于 T 的基本割集组是

$$S_1 = \{a, c, e, g\}, S_2 = \{b, c, e, g\}$$
$$S_3 = \{d, e, g\}, S_4 = \{f, g\}$$

定理 5.3.1 设 T 是图 G 的一棵生成树，T 的连枝 e' 包含在由树枝 e 确定的基本割集中的充要条件是树枝 e 包含在由连枝 e' 确定的基本圈中。

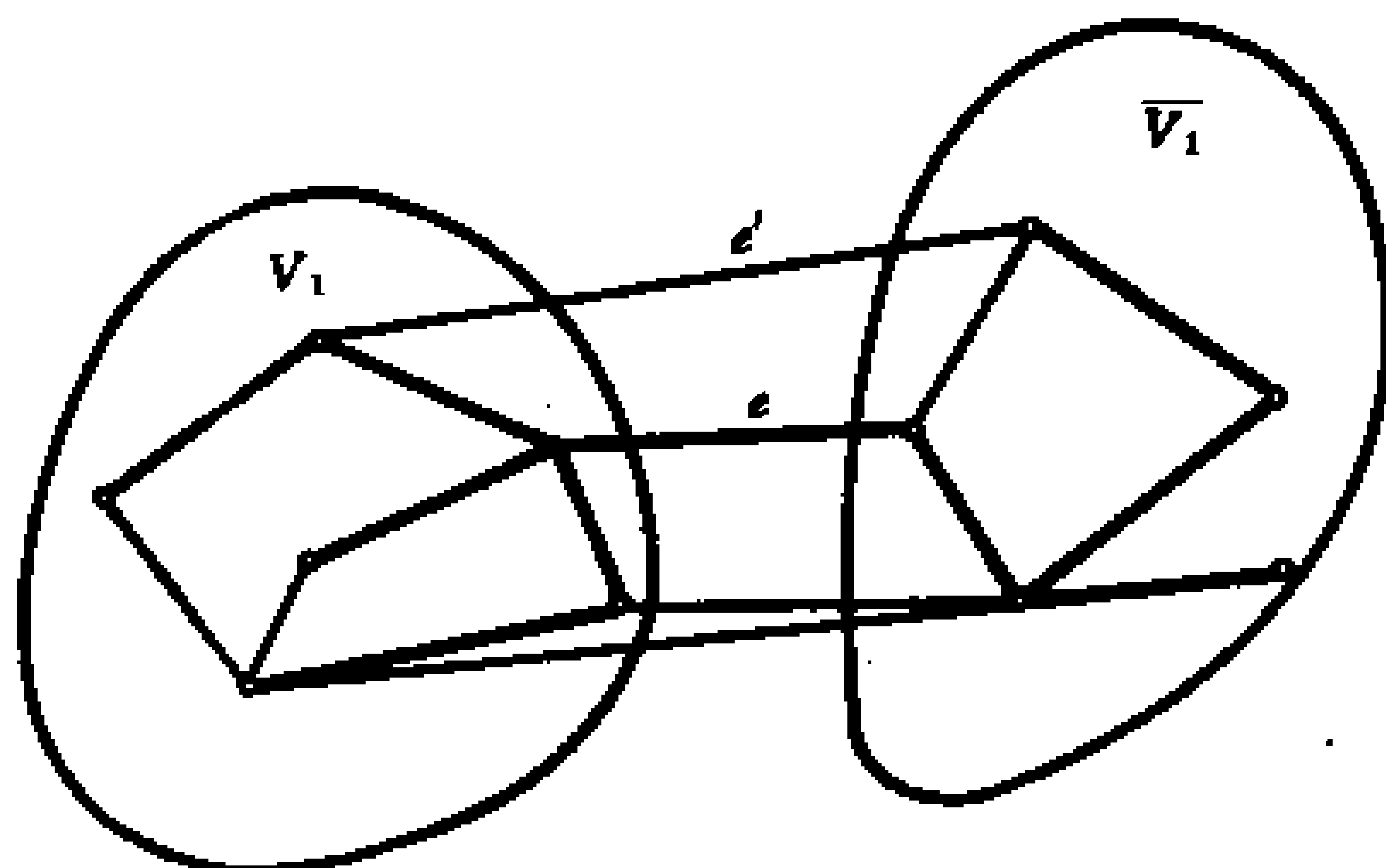


图 5.3-2

［证明］ 设 S 是由树枝 e 确定的图 G 关于生成树 T（图 5.3-2 中的粗线）的一个基本割集，相应的两个顶点子集是 V_1 和 $\overline{V}_1$，显然，凡两个端点同在 V_1 或 $\overline{V}_1$ 中的连枝不属于 S，如果连枝 e' 在包含树枝 e 的基本割集 S 中，则由连枝 e' 所确定的基本圈必然包含树枝 e。因为当沿着 e' 构成的基本圈，从 V_1 的一个顶点经过 e' 到 $\overline{V}_1$ 后，再由 $\overline{V}_1$ 返回时，必将经过树枝 e。用类似的方法可以证明，如果树枝 e 在由连枝 e' 构成的基本圈中，则包含树枝 e 的基本割集中一定包含连枝 e'。▌

定理 5.3.2 设 $S_1, S_2, \cdots, S_{p-1}$ 是连通 (p,q) 图 G 的基本割集，那么它们是线性无关的。

［证明］ 因为图 G 的关于生成树 T 的每一个基本割集恰好包含 T 的一个树枝，所以图 G 关于 T 的基本割集的环和

不会等于空图。 ▮

定理 5.3.3 图 G 的任一断集均可表示成若干基本割集的环和。

［证明］ 设 T 是图 G 的一棵生成树，S 是 G 的任一断集。因为任一非空断集至少包含生成树的一个树枝，故可设

$$S = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_j}, e_{i_{j+1}}, \cdots, e_{i_k}\} \qquad (5.3\text{-}1)$$

其中 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_j}$ 是树枝。又设 $S_{i_r}(r=1,2,\cdots,j)$ 是包含 e_{i_r} 的基本割集，那么

$$S' = S_{i_1} \oplus S_{i_2} \oplus \cdots \oplus S_{i_j} \qquad (5.3\text{-}2)$$

是 G 的一个断集，且 S' 只含树枝 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_j}$ 而不包含其他树枝。于是 $S \oplus S'$ 将不含树枝。这是不可能的，因此 $S \oplus S'$ 必是空图：

$$S' \oplus S = \varnothing$$

故

$$S = S'$$

即

$$S = S_{i_1} \oplus S_{i_2} \oplus \cdots \oplus S_{i_j} \qquad ▮$$

我们用 $\mathscr{S}$ 表示图 G 的所有断集和空图的集合，规定对任一断集 S，$0 \cdot S = \varnothing$，$1 \cdot S = S$。

定理 5.3.4 图 G 的所有断集和空图的集合 $\mathscr{S}$ 作成向量空间 $\mathscr{G}(G)$ 的一个子空间，称为 G 的**割集空间**(*cut set space*)。

［证明］ 根据定义，对任意的 $S \in \mathscr{S}$ 和 $a \in F = \{0,1\}$ 有 $aS \in \mathscr{S}$。

下面我们证明集合 $\mathscr{S}$ 对环和运算是封闭的。

我们知道，任一断集可以写成 $E(V_a \times \overline{V}_a)$（其中 V_a 为某一个顶点子集），设 S_1 和 S_2 是 G 的两个断集，则有

$$S_1 = E(V_1 \times \overline{V}_1), S_2 = E(V_2 \times \overline{V}_2)$$

其中 V_1, V_2 为顶点集的两个子集。根据定理 4.2.2，有

$$S_1 \oplus S_2 = E(V_1 \times \overline{V}_1) \oplus E(V_2 \times \overline{V}_2) = E(V_3 \times \overline{V}_3)$$

V_3 是 V 的一个子集，于是 $S_1 \oplus S_2$ 是一个断集。▌

由定理 5.3.2 和定理 5.3.3 知：

(1) p 阶连通图 G 关于生成树 T 的基本割集组是 G 的割集空间的一组基底，且割集空间的维数为 $p-1$。

(2) 图 G 的全部断集的个数是 $2^{p-1}-1$。

由上面的讨论知，为要求出一个图的全部断集，首先选取一棵生成树，然后找出基本割集，最后求出基本割集所有可能的环和。

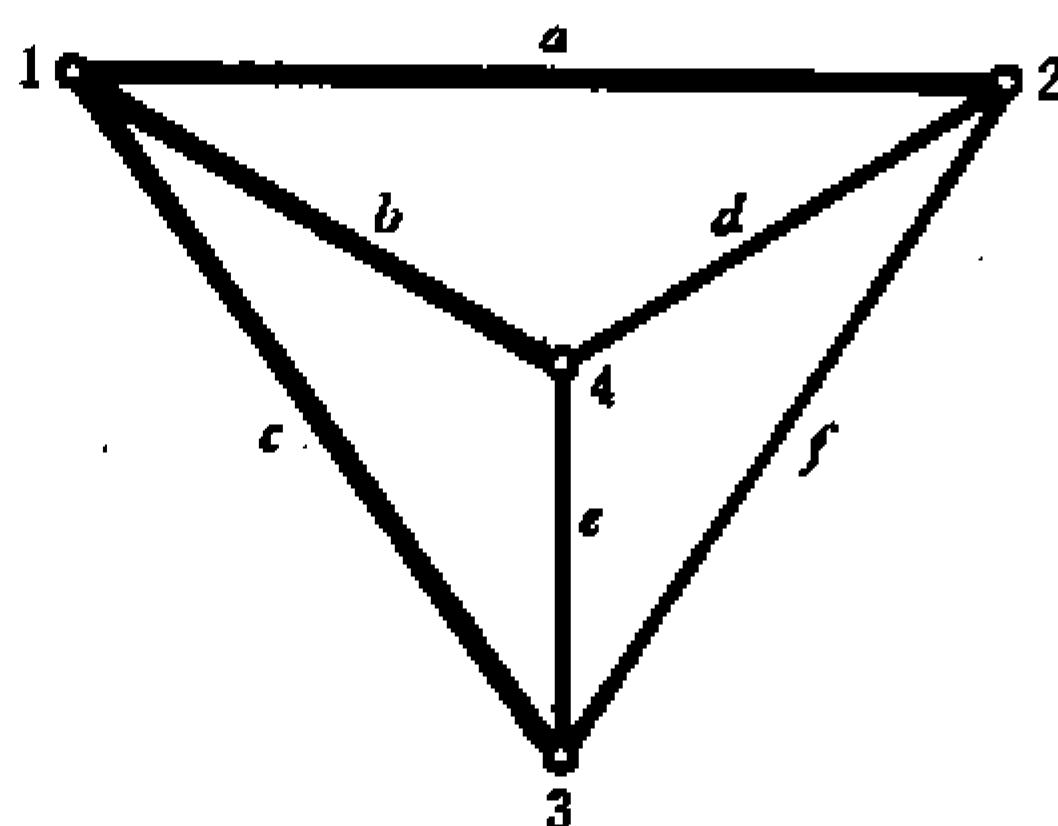


图 5.3-3

例 5.3.1 求图 G(图5.3-3所示)的全部断集。

取图 G 的一棵生成树 $T=\{a,b,c\}$。G 关于 T 的基本割集是：

$$S_1 = \{a,d,f\}, S_2 = \{c,e,f\}, S_3 = \{b,d,e\}$$

S_1, S_2, S_3 所有可能的环和是：

$$S_4 = S_1 \oplus S_2 = \{a,c,d,e\}$$
$$S_5 = S_1 \oplus S_3 = \{a,b,e,f\}$$
$$S_6 = S_2 \oplus S_3 = \{b,c,d,f\}$$
$$S_7 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = \{a,b,c\}$$

于是 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ 和 S_7 是图 G 的全部断集。

我们知道，顶点 v 如果不是图的割点，那么 v 的关联集是 G 的一个割集，如果 v 是割点，那么 v 的关联集是断集。关于关联集我们有下面的定理。

定理 5.3.5 p 阶连通图恰有 $p-1$ 个线性无关的关联集。

［证明］ 由推论 4.2.1 知，图 G 最多有 $p-1$ 个线性无关的关联集。

如果 G 中有小于 $p-1$ 个线性无关的关联集，不妨设为

$$S(v_1),S(v_2),\cdots,S(v_k),k<p-1$$

设 v 是 G 中任一顶点，则 $k+1$ 个关联集

$$S(v),S(v_1),S(v_2),\cdots,S(v_k)$$

线性相关，即

$$S(v)\oplus S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k)=\varnothing$$

故有

$$S(v)=S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k)$$

根据式(4.2-2)，有

$$\begin{aligned}&S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k)\\&=E(\{v_1\}\times\{\bar{v}_1\})\oplus E(\{v_2\}\times\{\bar{v}_2\})\oplus\\&\quad\cdots\oplus E(\{v_k\}\times\{\bar{v}_k\})\\&=E(\{v_1,v_2,\cdots,v_k\})\times\{\overline{v_1,v_2,\cdots,v_k}\})\end{aligned}\tag{5.3-3}$$

因为 $k<p-1$，所以 $\{\overline{v_1,v_2,\cdots,v_k}\}$ 中至少包含两个顶点，因此，$E(\{v_1,v_2,\cdots,v_k\})\times\{\overline{v_1,v_2,\cdots,v_k}\})$，亦即 $S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k)$ 不是关联集，这与式(5.3-3)矛盾。这表明 G 中至少有 $p-1$ 个线性无关的关联集，从而 G 中恰有 $p-1$ 个线性无关的关联集。∎

由定理 5.3.5 知，写出 p 阶连通图 G 的 $p-1$ 个关联集，然后作出它们所有可能的环和，即可求出图 G 的全部断集。

例 5.3.2 求图 5.3.3 所示的图 G 的全部断集。

顶点 1,2,3 的关联集分别是

$$S(1)=\{a,b,c\},S(2)=\{a,d,f\},S(3)=\{c,e,f\}$$

作出它们所有可能的环和：

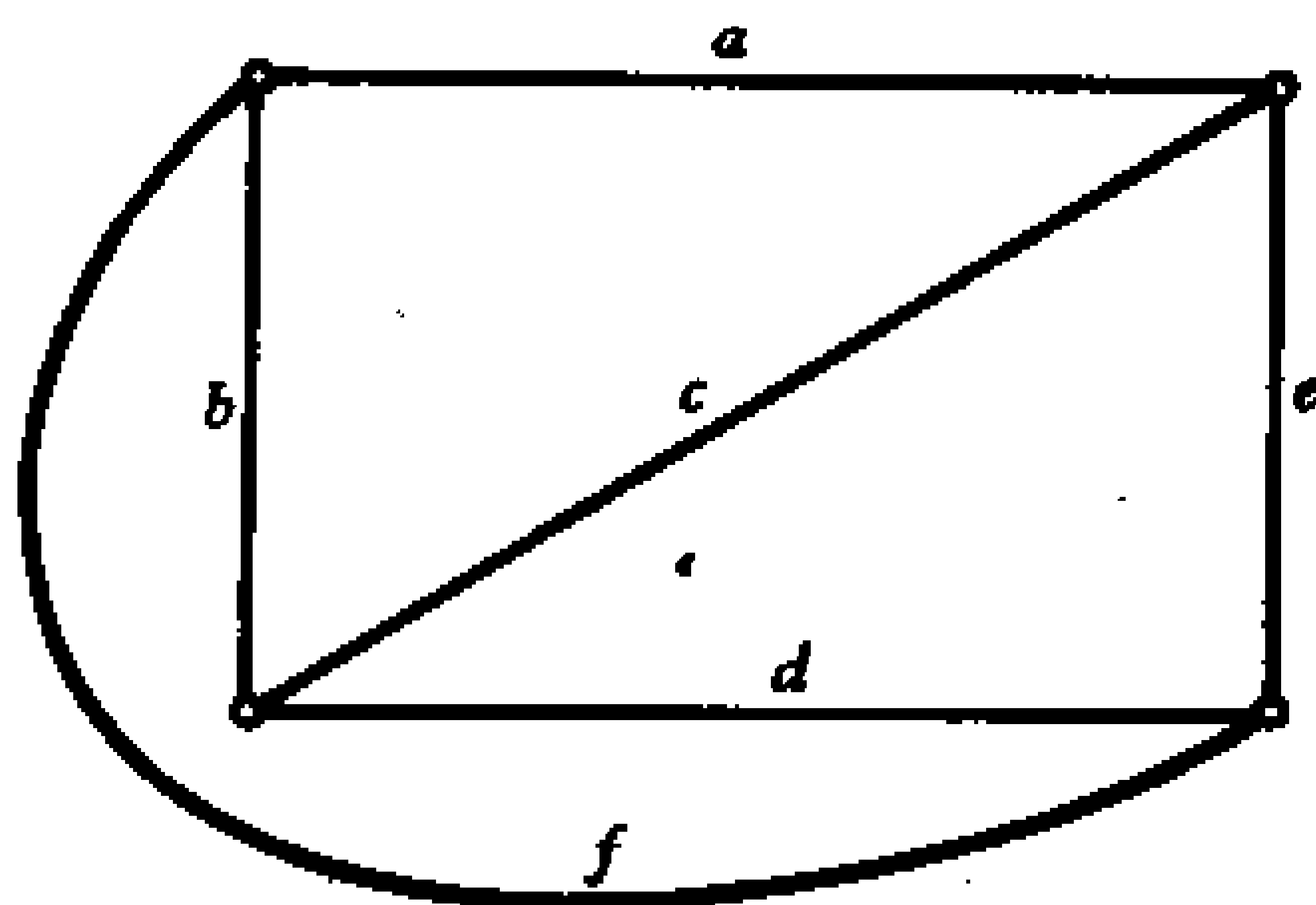
$$S(1) \oplus S(2) = \{b,c,d,f\}$$
$$S(1) \oplus S(3) = \{a,b,e,f\}$$
$$S(2) \oplus S(3) = \{a,c,d,e\}$$
$$S(1) \oplus S(2) \oplus S(3) = \{b,d,e\}$$

与例 5.3.1 比较，有

$$S_1 = S(2) = \{a,d,f\}$$
$$S_2 = S(3) = \{c,e,f\}$$
$$S_3 = S(1) \oplus S(2) \oplus S(3) = \{b,d,e\}$$
$$S_4 = S(2) \oplus S(3) = \{a,c,d,e\}$$
$$S_5 = S(1) \oplus S(3) = \{a,b,e,f\}$$
$$S_6 = S(1) \oplus S(2) = \{b,c,d,f\}$$
$$S_7 = S(1) = \{a,b,c\}$$

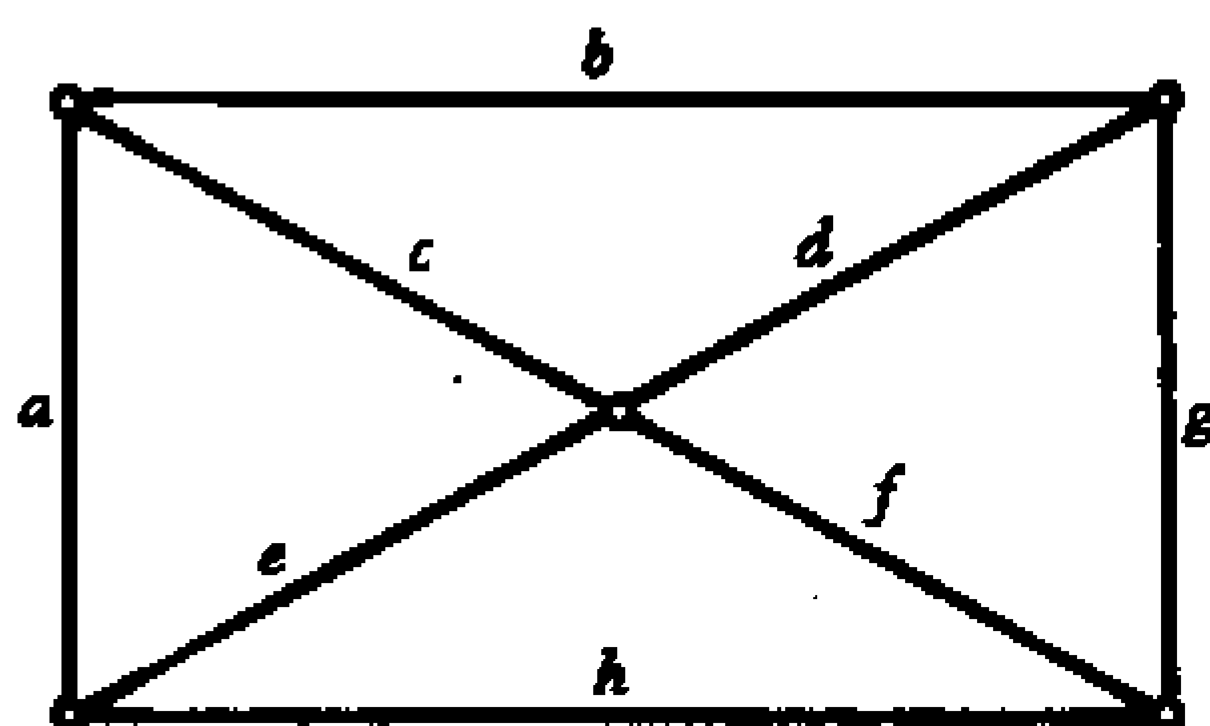
习 题 五

5-1 设图 G 如题图所示，证明集合 $\{C_1,C_2,C_3\}$ 是图 G 的圈空间的一个基底，其中 $C_1=\{a,b,c\}$，$C_2=\{c,d,e\}$，$C_3=\{a,e,f\}$。



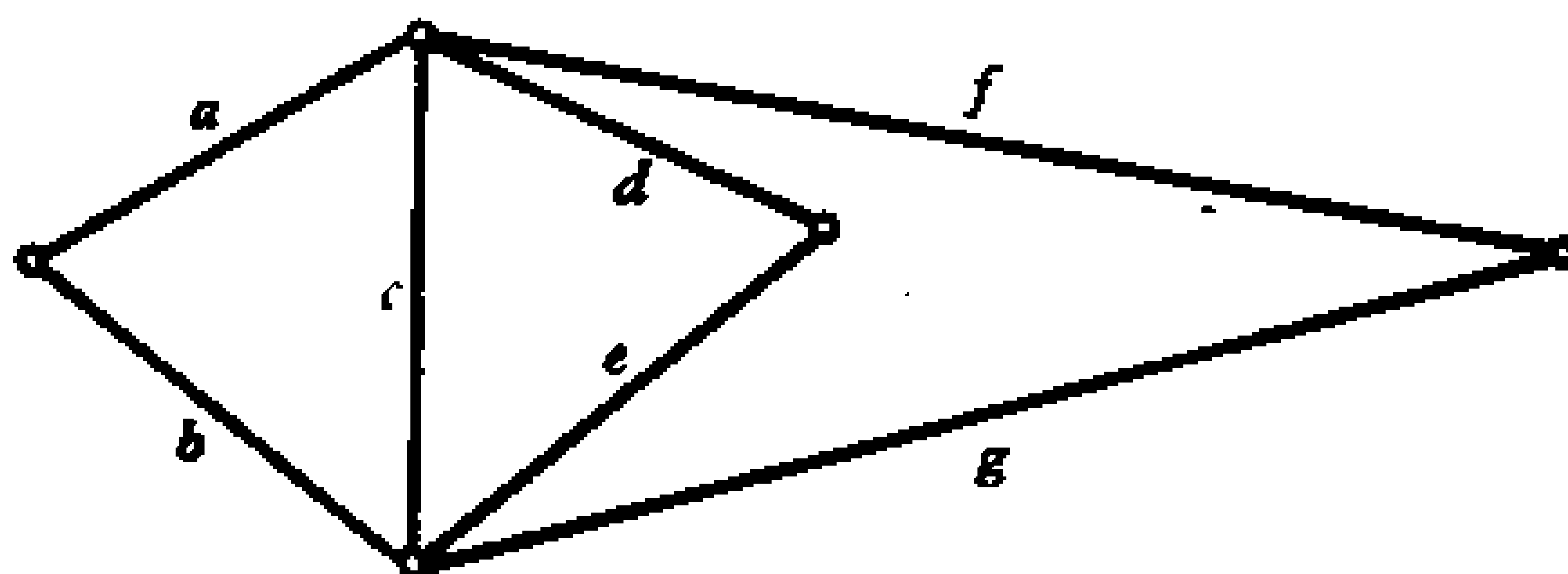
题 5-1 图

5-2　求图 G 的圈空间的全部非零元素。



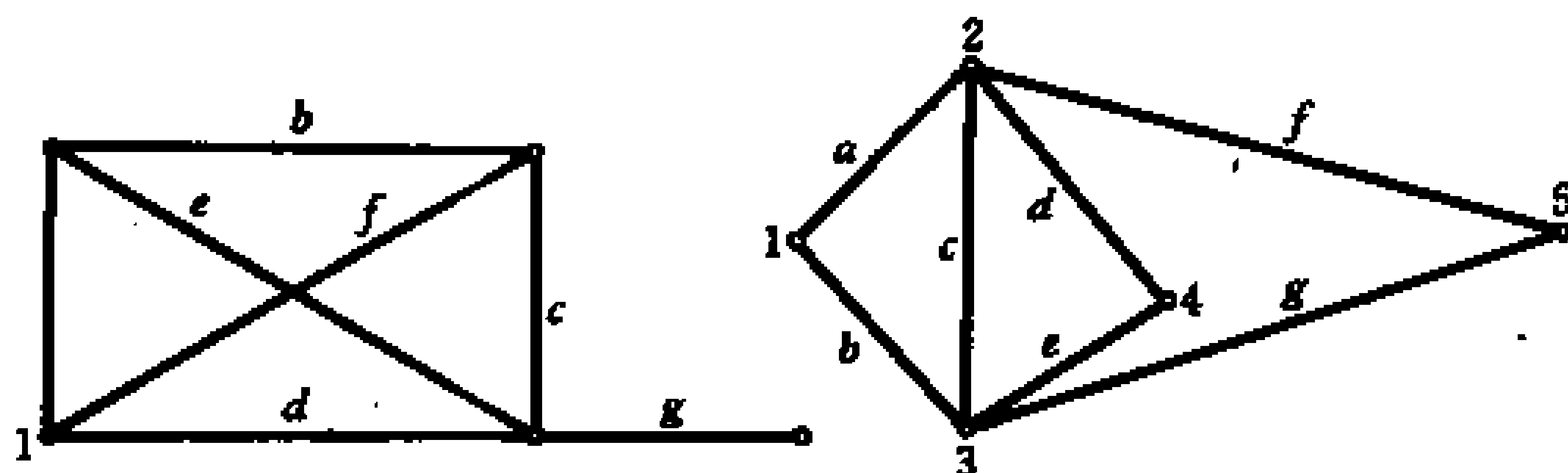
题 5-2 图

5-3　求图 G 的全部圈。



题 5-3 图

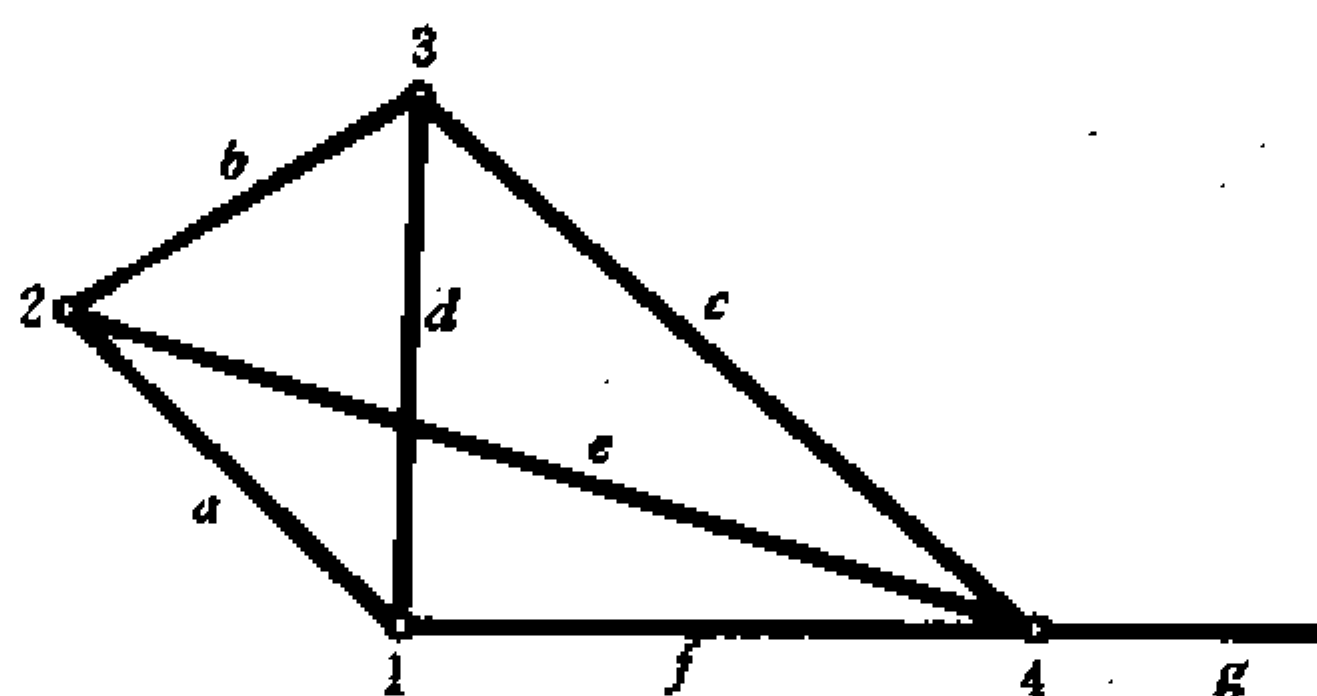
5-4　求下列各图的全部断集。



题 5-4 图

5-5　设 G 是有 p 个顶点，k 个分支的分离图，则 G 恰有 $p-k$ 个线性无关的关联集。

5-6 写出图 G 的关联集，并由此求出图 G 的全部断集。



题 5-6 图

第六章　图的矩阵表示

一个图的边与顶点、边与圈、边与割集的关联性质，可以用矩阵来表示。我们把表示边与顶点的关联关系的矩阵叫做关联矩阵、把表示边与圈和边与割集的关系的矩阵分别叫做圈矩阵和割集矩阵。一个图的矩阵表示不仅仅是给出图的一种表示方法，重要的是通过对这些矩阵的讨论，可以得到有关图的若干性质。此外，在图论的应用中，图的矩阵表示也具有重要的作用。这一章我们讨论关联矩阵、圈矩阵和割集矩阵的概念、性质以及它们之间的关系。本章中所做的运算都是在域 $F=\{0,1\}$ 上进行的，即加法为模 2 运算。此外，所讨论的图均假定无环，如果因某种运算产生环，则将环去掉。

6.1　关联矩阵

定义 6.1.1　设图 G 为 (p,q) 图。令

$$m_{ij}=\begin{cases}1,\text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联}\\0,\text{否则}\end{cases}$$

则由元素 $m_{ij}(i=1,2,\cdots p,j=1,2,\cdots,q)$ 构成的 $p\times q$ 矩阵为图 G 的完全**关联矩阵**(Complete incidence matrix)，记作 M_e。

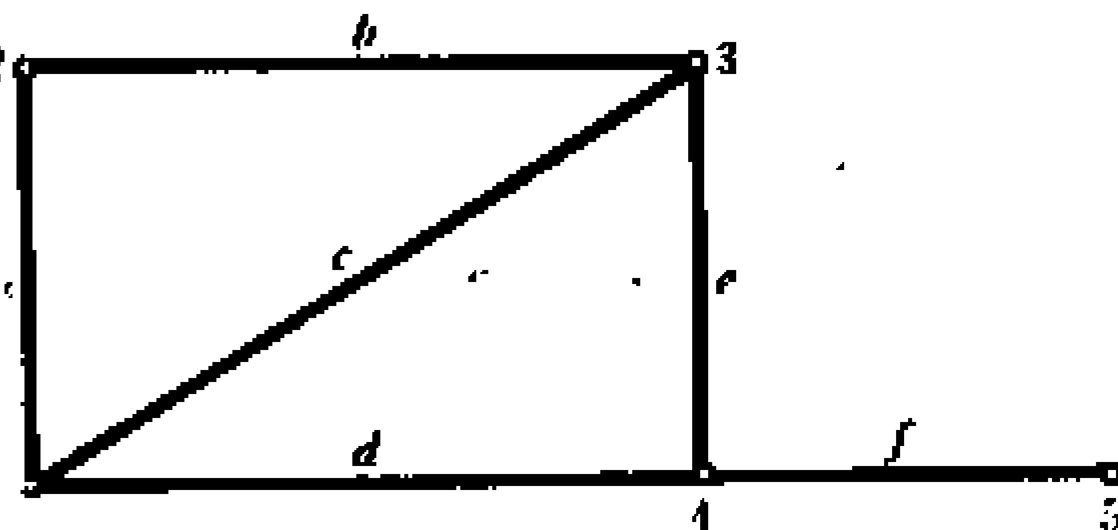


图 6.1-1

例 6.1.1　求图 6.1-1 所示的

图 G 的完全关联矩阵 M_e。用行表示顶点，列表示边，由图 6.1-1 可知

$$M_e=\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

矩阵记号左边的 1,2,3,4,5 表示图的顶点，矩阵记号上面的 a,b,c,d,e,f 表示图的边。这样，M_e 第一行标有 1 的那些元素，表示与顶点 1 关联的边，即顶点 1 的关联集；M_e 第二行中标有 1 的那些元素，表示与顶点 2 关联的所有边，即顶点 2 的关联集等等。

一个图的完全关联矩阵的行刻划了该图的相应顶点的关联集，因此，完全关联矩阵的 p 行，给出了一个图的全部关联集。因为完全关联矩阵的列表示图的边，又每一条边有两个端点，所以，在完全关联矩阵的每一列中有两个 1，其余的元素均为零。

一个图的完全关联矩阵，描述了这个图的全部顶点和边的关联关系，而一个图的最基本的内容就是这种关联关系。因此，一个图的完全关联矩阵可以用来描述图的特征。

定理 6.1.1 p 阶连通图 G 的完全关联矩阵的秩为 $p-1$。

［证明］ 由线性代数知，一个矩阵的行向量组的秩就是这个矩阵的秩。把完全关联矩阵的行看作一个向量，那么完全关联矩阵的行向量组就是图 G 的全部关联集，由定理 5.3.5 知，完全关联矩阵的秩为 $p-1$。∎

定理 6.1.2 图 G 的完全关联矩阵的秩等于 G 的秩 R

(G)。

［证明］ 如果图 G 是连通的，由 4.1 节图的秩的定义和定理 6.1.1 即知结论成立。

设图 G 是由 k 个分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 组成的分离图，G_i 的顶点数和边数分别为 p_i 和 $q_i(i=1,2,\cdots,k)$。调整 M_e 的行和列的次序，使它满足：最上面的 p_1 行表示 G_1 的顶点，接着的 p_2 行表示 G_2 的顶点，直到最下面的 p_k 行表示 G_k 的顶点；最左面的 q_1 列表示 G_1 的边，接着的 q_2 列表示 G_2 的边，直到最右面的 q_k 列表示 G_k 的边。这样，把 M_e 写成如下形式的分块矩阵：

$$
M_e = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & & q_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
M_{e_1} & & & \\
 & M_{e_2} & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & M_{e_k}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

其中 M_{e_i} 是分支 G_i 的完全关联矩阵$(i=1,2,\cdots,k)$。因为 G_i 是连通的，所以 Me_i 的秩是 P_i-1，因此分块矩阵的秩是 $p-k$，即 M_e 的秩等于图 G 的秩。▮

由定理 6.1.1 和定理 6.1.2 可以直接得到下面的定理。

定理 6.1.3 p 阶图 G 是连通的当且仅当 G 的完全关联矩阵的秩是 $p-1$。

因为完全关联矩阵的所有的行表示了图 G 的全部关联集，故由推论 4.2.1，矩阵 M_e 的任一行，都可以表示成其余 $p-1$ 行的线性组合。因此，把矩阵 M_e 的任一行划掉后，所得的矩阵，实际上仍然包含了 M_e 的全部内容，也就是仍然可以描述图的全部特征。

定义 6.1.2 在 p 阶连通 G 的完全关联矩阵 M_e 中，划去任一行后所得到的 $(p-1)\times q$ 矩阵，称为图 G 的**关联矩阵**(incidence matrix)，记作 M。划去的行所对应的顶点称为**参考点**(refevence vertex)。

显然，p 阶连通图 G 的关联矩阵的秩是 $p-1$。在图的矩阵表示中，经常用到的是关联矩阵。

例 6.1.2 在图 6.1-1 所示的图 G 的完全关联矩阵 M_e 中去掉最后一行，即得图 G 的一个关联矩阵，

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

顶点 5 是参考点。

定义 6.1.3 $p\times q$ 矩阵的一个阶为 $\min\{p,q\}$ 的方阵，称为 $p\times q$ 矩阵的一个**大子阵**，大子阵定义的行列式称为**大行列式**。

定理 6.1.4 连通图 G 的关联矩阵 M 的一个大子阵是非奇异的充要条件为与这个大子阵的列相应的边，组成 G 的一棵生成树。

〔证明〕 设 M_1 是 M 的一个大子阵，显然 M_1 是一个 $p-1$ 阶方阵。

如果 M_1 是非奇异的，设与 M_1 的列相应的边组成的子图为 G_1。因为 M_1 有 $p-1$ 行，故 G_1 应有 p 个顶点(包括参考点)，M_1 有 $p-1$ 列，则 G_1 有 $p-1$ 条边。又因 M_1 是非奇异的，即 M_1 的秩是 $p-1$，所以 G_1 是连通的，这就是说，G_1 是有 p 个顶点，$p-1$ 条的连通图。因此 G 是一棵生成树。必要性得证。

反之，如果 M_1 的列所对应的边，组成 G 的一棵生成树。因为树是连通的，由定理 6.1.1 知，M_1 的秩是 $p-1$，故 M_1 为非奇异。▌

定理 6.1.4 表明，一个图的生成树与关联矩阵的非奇异大子阵有一一对应的关系，这是一个非常基本的关系。

根据定理 6.1.4，连通图中必存在生成树这个事实就是很明显的了。这是因为连通图的关联矩阵必存在非奇异的大子阵的缘故。

定理 6.1.4 给出求图 G 的全部生成树的一种方法：找出图 G 的关联矩阵 M 的全部非奇异大子阵，每一个大子阵的列所对应的边就组成 G 的一棵生成树。

例 6.1.2 图 6.1-2 所示的图 G，在 G 中取顶点 5 为参考点，那么图 G 的关联矩阵是

$$M=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}a & b & c & d & e & f\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

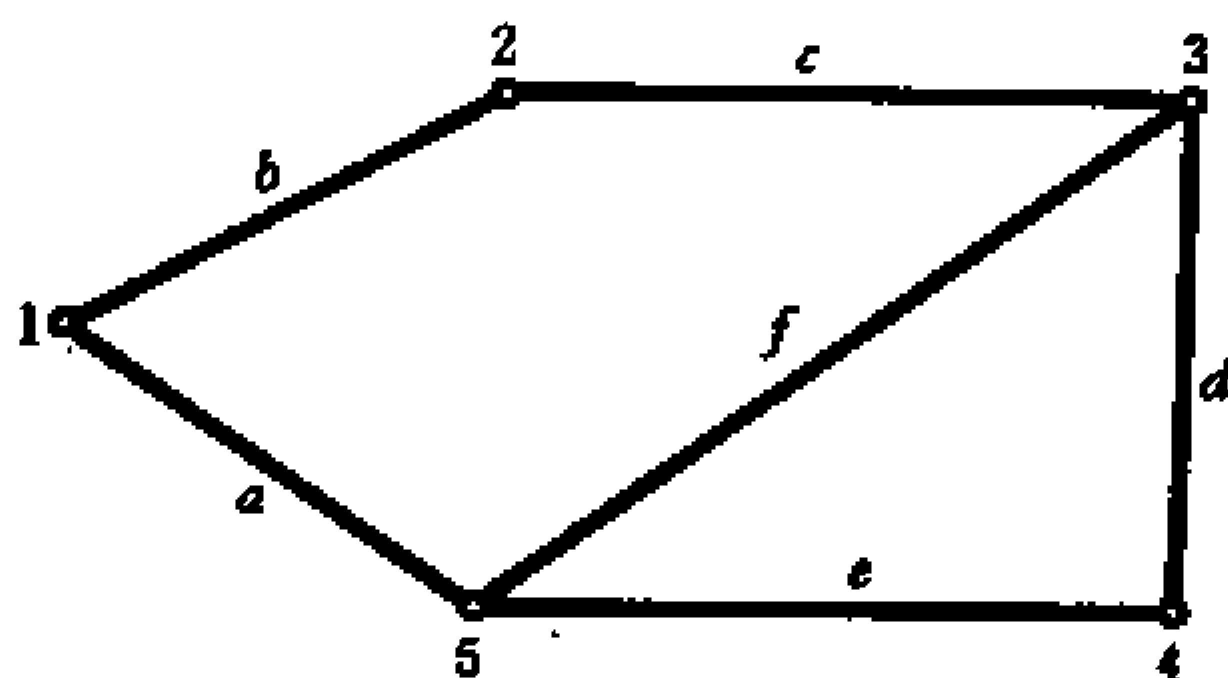
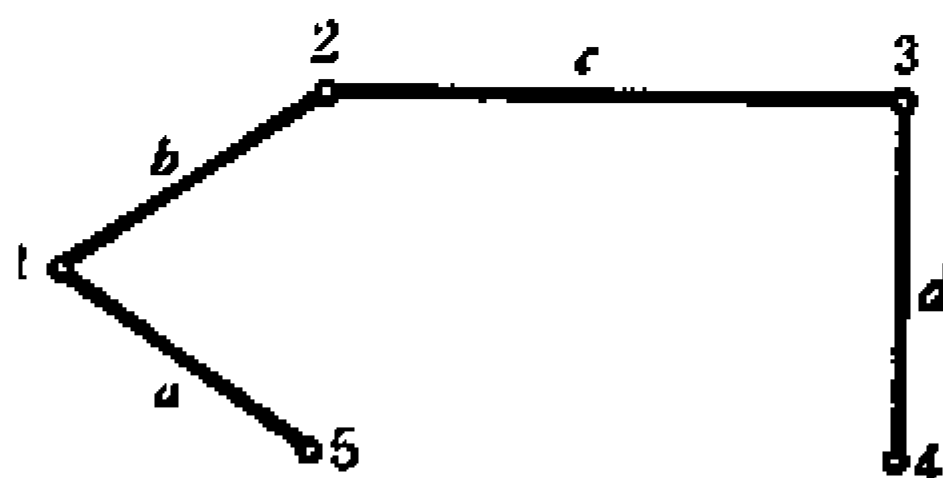


图 6.1-2

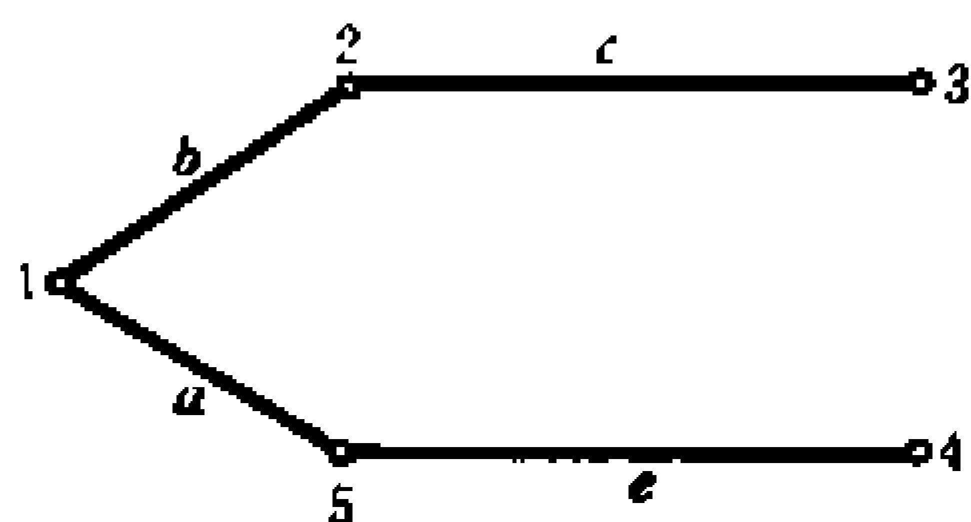
非奇异大子阵	生成树

$$\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a & b & c & d\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

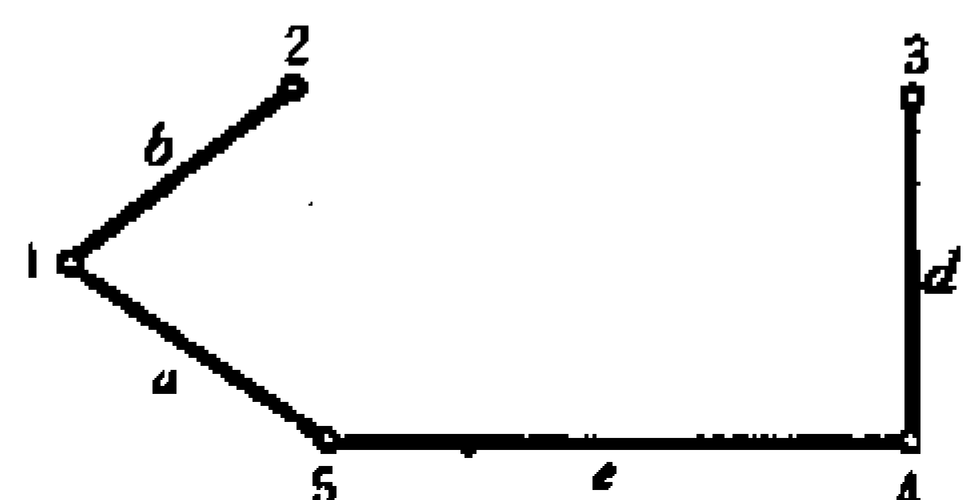


非奇异大子阵					生成树

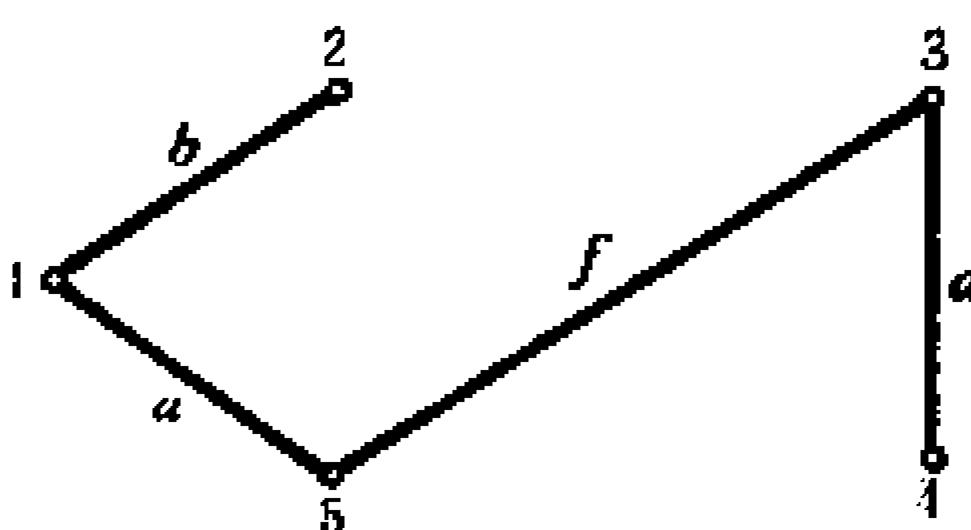
	a	b	c	e
1	1	1	0	0
2	0	1	1	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



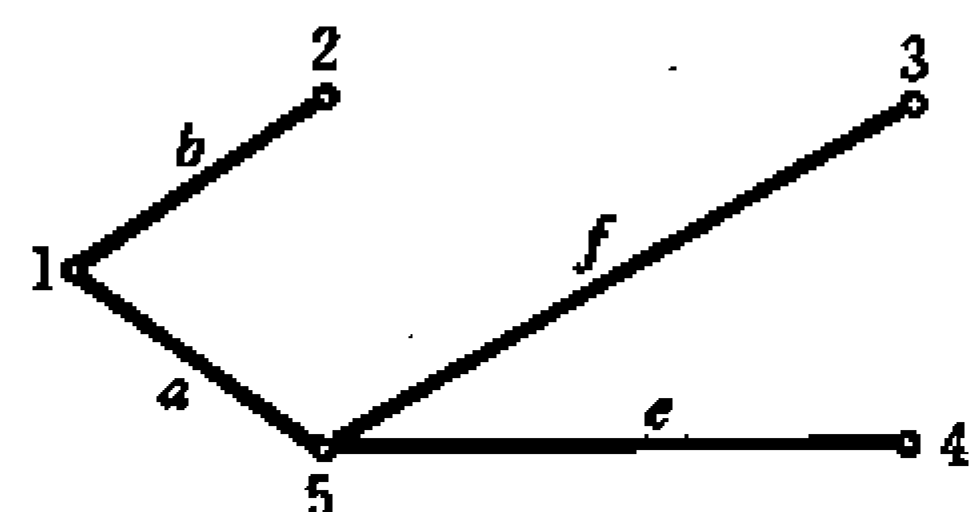
	a	b	d	e
1	1	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1



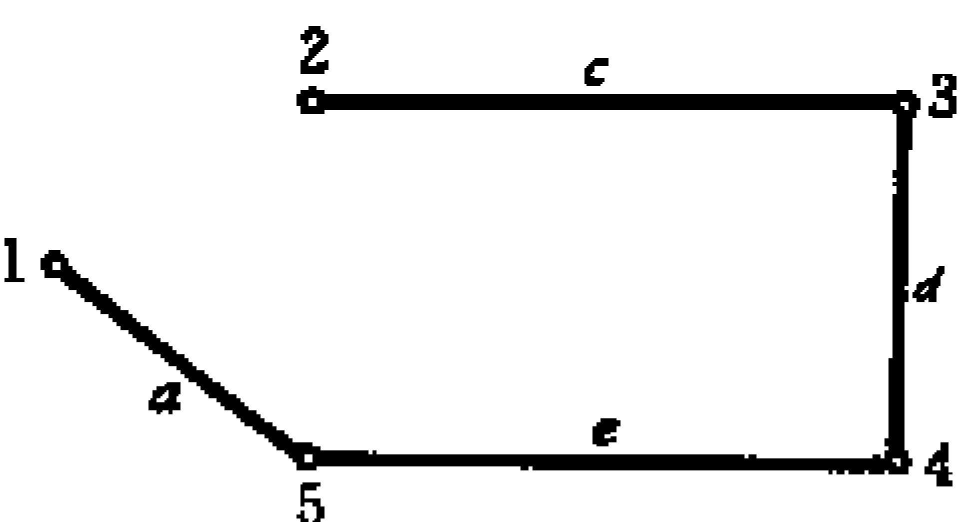
	a	b	d	f
1	1	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	1
4	0	0	1	0



	a	b	e	f
1	1	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	0	1
4	0	0	1	0

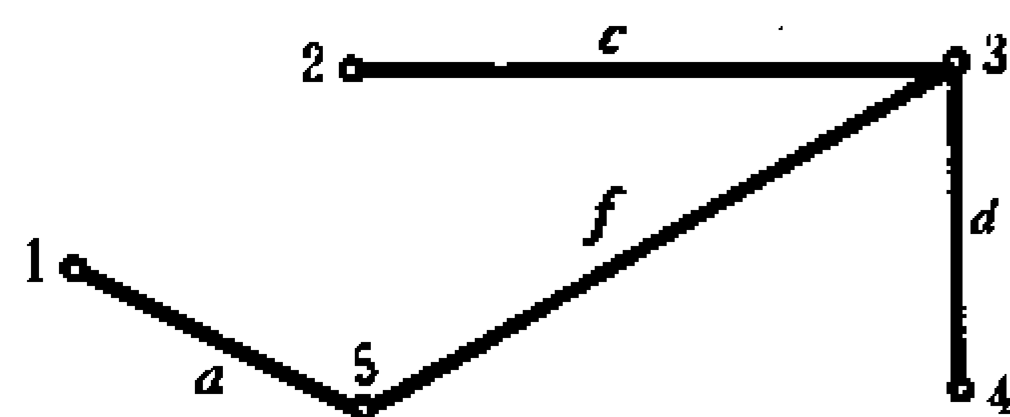


	a	c	d	e
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	0	0	1	1

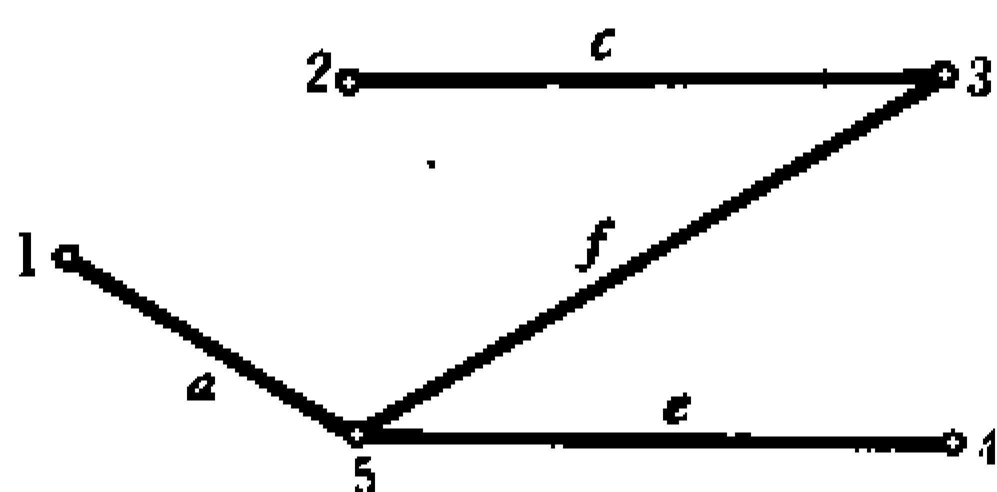


非奇异大子阵 | **生成树**

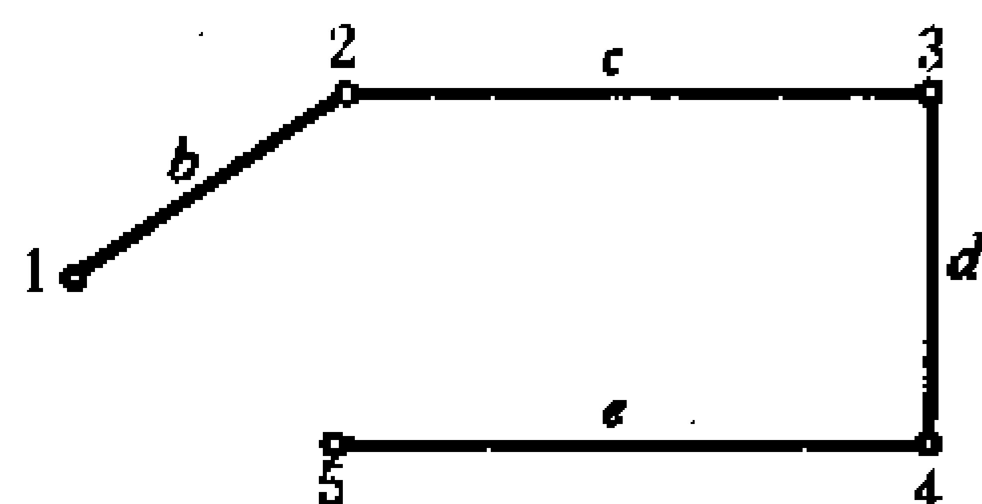
	a	c	d	f
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	0	0	1	0



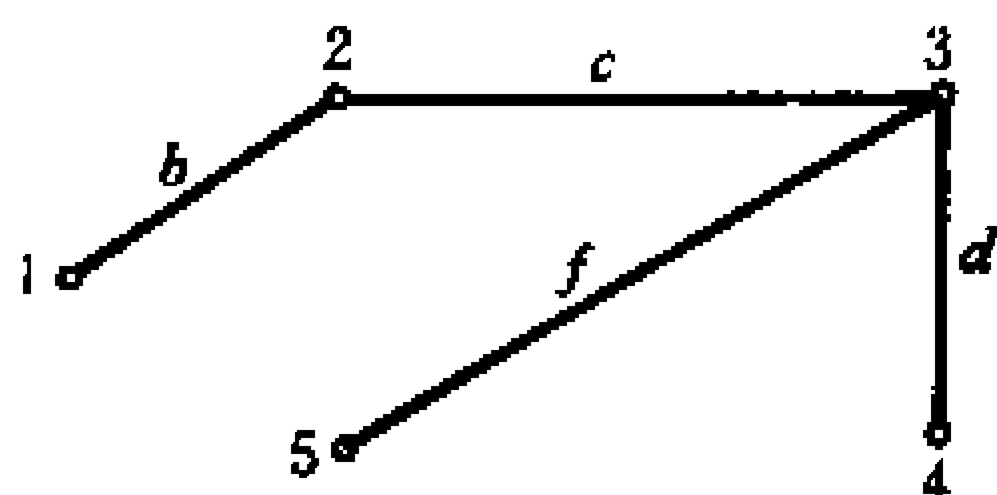
	a	c	e	f
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0



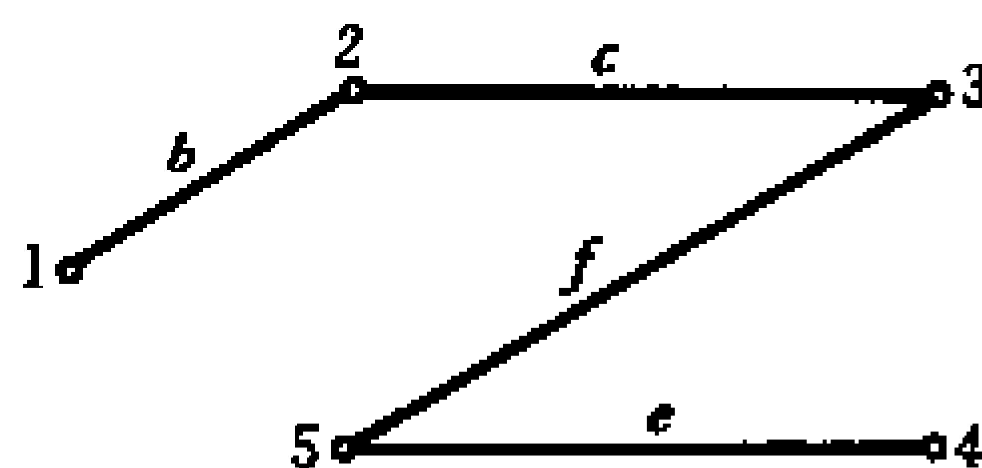
	b	c	d	e
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	0	1	1	0
4	0	0	1	1



	b	c	d	f
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	0	1	1	1
4	0	0	1	0



	b	c	e	f
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0



大子阵：

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

都是奇异的，故$\{a,d,e,f\}$，$\{a,b,c,f\}$，$\{b,d,e,f\}$，$\{c,d,e,f\}$均不是生成树，其中$\{a,d,e,f\}$，$\{b,d,e,f\}$，$\{c,d,e,f\}$均含有圈，而$\{a,b,c,f\}$本身就是一个圈。

6.2 圈 矩 阵

定义 6.2.1 设连通(p,q)图G，令

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若边 } j \text{ 在环路 } i \text{ 中} \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

则称由元素b_{ij}($i=1,2,\cdots,2^{q-p+1}-1$，$j=1,2,\cdots,q$)构成的$(2^{q-p+1}-1)\times q$矩阵为图G的**完全圈矩阵**(com-plete cycle matrix)，记作B_e.

由定义 6.2.1 知。图G的完全圈矩阵的所有行向量是G的圈空间的全部非零元素。

例 6.2.1 求图 6.1-1 所示的图G的完全圈矩阵。

取G的一棵生成树$T=\{a,b,f,d\}$，连枝集是$\{c,e\}$。图G关于T的基本圈为

$$C_1 = \{a,b,c\}$$

$$C_2 = \{a,b,d,e\}$$

求 C_1, C_2 的环和：

$$C_3 = C_1 \oplus C_2 = \{c,d,e\}$$

于是图 G 的完全圈矩阵为

$$B_e = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & e & d & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

定理 6.2.1 连通图 G 的完全圈矩阵的秩等于 $q-p+1$。

定理的证明留给读者。

推论 6.2.1 有 k 个分支的分离图的完全圈矩阵的秩是 $q-p+k$。

定义 6.2.2 图 G 的完全圈矩阵 B_e 中秩为 $q-p+1$ 的 $(q-p+1)\times q$ 矩阵，叫做图 G 的**圈矩阵**(cycle matrix)，记作 B。

在完全圈矩阵 B_e 中，取一个 $q-p+1$ 行 q 列的子矩阵，如果这 $q-p+1$ 行对应的环路是线性无关的，那么这个子矩阵就是一个圈矩阵。

例如，矩阵

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

是图 6.1-1 所示的图 G 的一个圈矩阵。

定义 6.2.3 设 $C_1, C_2, \cdots, C_{q-p+1}$ 是连通图 G 关于生成树 T 的基本圈组，令

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若边 } j \text{ 在基本圈 } C_i \text{ 中} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

则称由元素 $b_{ij}(i=1,2,\cdots,q-p+1,j=1,2,\cdots,q)$ 组成的 $(q-p+1)\times q$ 矩阵为图 G 关于生成树 T 的**基本圈矩阵**(fundamental cgcle matrix),记作 B_f。

因为对连通图 G 的不同的生成树,有不同的基本圈组,所以 G 的基本圈矩阵不是唯一的。但是基本圈矩阵的秩是一个定数,即 $q-p+1$。

定理 6.2.2 连通图 G 关于生成树 T 的基本圈矩阵 B_f 可以写成如下形式的分块矩阵:

$$B_f=[I\ B_{f12}] \tag{6.2-1}$$

其中 I 为 $q-p+1$ 阶单位矩阵,它的列对应于连枝。

[证明] 设 $e'_1,e'_2,\cdots,e'_{q-p+1}$ 是图 G 关于生成树 T 的连枝,$e_1,e_2,\cdots,e_{p-1}$ 是树枝。调整 B_f 的列,使前 $q-p+1$ 列对应连枝,后 $p-1$ 列对应树枝。因为每一条基本圈只含有一条连枝,所以 B_f 可以写成下面的形式:

$$B_f=\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{q-p+1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_{q-p+1} & e_1 & e_2 & \cdots & e_{p-1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & X & X & & X \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & X & X & & X \\ & \cdots & \cdots & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & X & X & & X \end{array}\right) \end{array}=[I\ B_{f12}]$$

其中"X"表示 0 或 1,I 是 $q-p+1$ 阶单位矩阵。∎

例 6.2.2 求图 6.2-1 所示的图 G 的一个基本圈矩阵。

取一棵生成树 $T=\{a,c,e,g\}$,关于 T 的基本圈是

$$C_1=\{a,b,c\},C_2=\{c,d,e\},C_3=\{e,f,g\}$$

连枝集是 $\{b,d,f\}$,于是 G 的关于生成树 T 的基本圈矩阵是

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} b & d & f & a & c & e & g \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

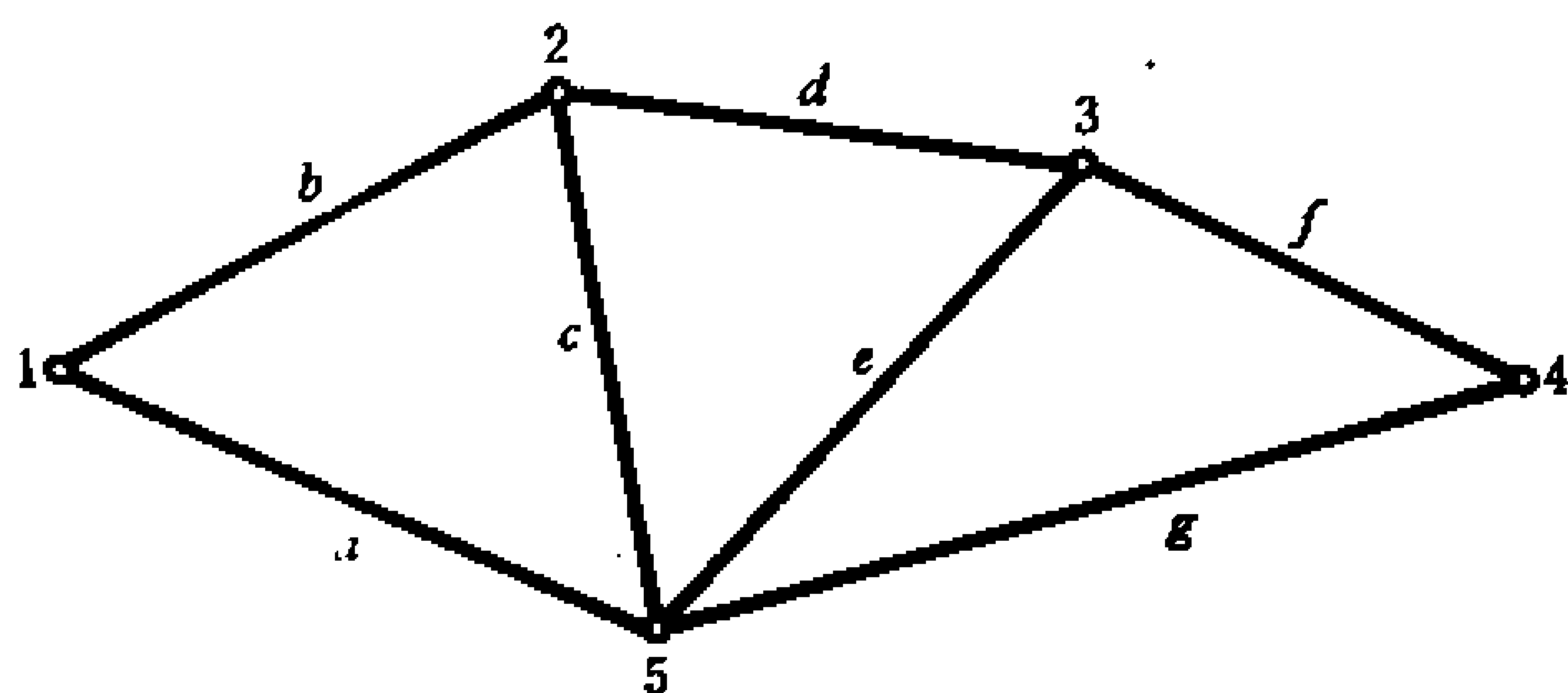


图 6.2-1

下面我们先来证明关于圈矩阵和基本圈矩阵之间的关系的一个定理。

定理 6.2.3 设 B 是图 G 的圈矩阵，B_f 是 G 的基本圈矩阵，那么存在一个非奇异矩阵 C，使得

$$B = CB_f$$

［证明］ 首先，圈矩阵 B 和基本圈矩阵 B_f 有相同的秩。其次，因为任一环路可以表示成若干个基本圈的线性组合，所以 B 中任一行向量可由 B_f 中若干行向量线性表示。因此，矩阵 B 可由对 B_f 进行有限次初等变换得到，对 B_f 的行进行初等变换，相当于用初等矩阵左乘 B_f，而有限个初等矩阵的积是非奇异的。∎

最后，我们来证明与定理 6.1.4 类似的关于圈矩阵的定理。

定理 6.2.4 一个圈矩阵的大子阵是非奇异的充要条件是这个大子阵的列对应于某一生成树的连枝集。

［证明］ 设 B_{11} 是圈矩阵 B 的一个非奇异大子阵，且不妨设

$$B = [B_{11}\ B_{12}]$$

用 B_{11}^{-1}乘上式两端，得

$$B_{11}^{-1}B = [I\ B_{11}^{-1}B_{12}] \qquad (6.2\text{-}2)$$

由定理 6.2.2，基本圈矩阵可以写成如下形式

$$B_f = [I\ B_{f12}] \qquad (6.2\text{-}3)$$

比较(6.2-2)和(6.2-3)两式知，$B_{11}^{-1}B$ 是基本圈矩阵。这就是说，对选定的非奇异大子阵，用它的逆去左乘适当调整了列的次序的圈矩阵，就能够得到基本圈矩阵。因此，圈矩阵的任一非奇异大子阵的列，可以变成基本圈矩阵中单位矩阵的列，再由定理 6.2.2 知，B_{11}的列对应连枝集。必要性得证。

再证充分性。调整圈矩阵 B 的列的次序，使得 B 的列和基本圈矩阵 B_f 的列表示相同的边：

$$B_f = [I\ B_{f12}],\ B = [B_{11}\ B_{12}]$$

由定理 6.2.3，存在非奇异矩阵 C，使得

$$B = CB_f$$

故有

$$[B_{11}\ B_{12}] = C[I\ B_{f12}]$$

由此可得

$$B_{11} = CI = C$$

即 B_{11}是非奇异的。▮

例 6.2.4 在图 6.2-2 所示的图 G 中，$q-p+1=5-4+1=2$，故其圈矩阵为 2×5 矩阵

$$B = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ C_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

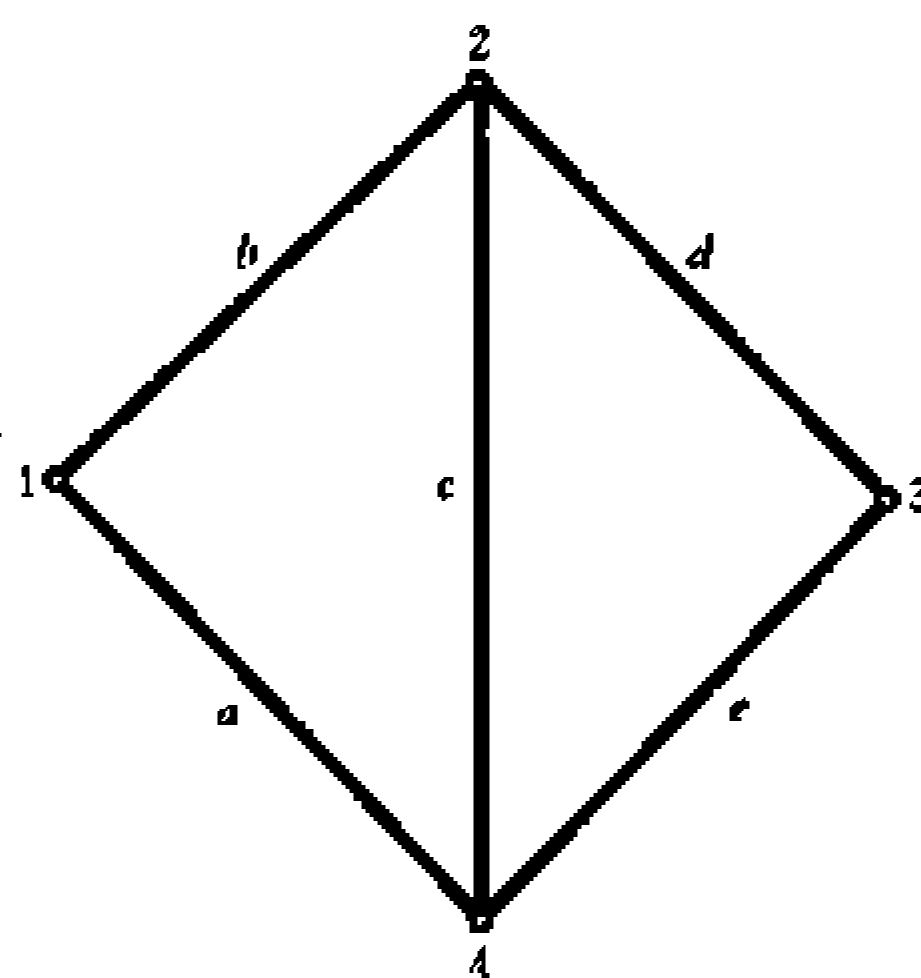
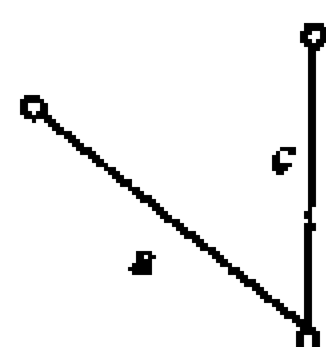
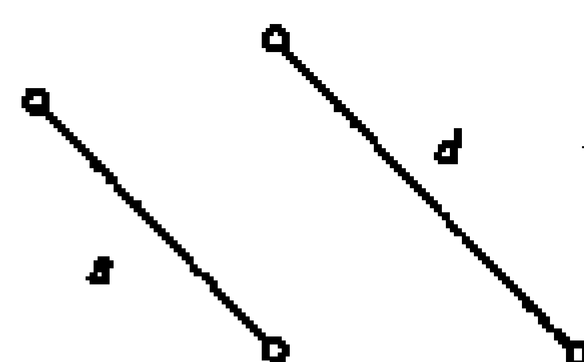
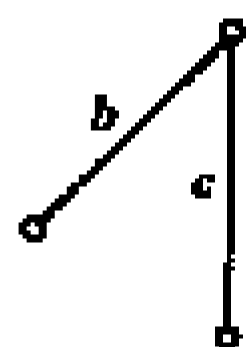
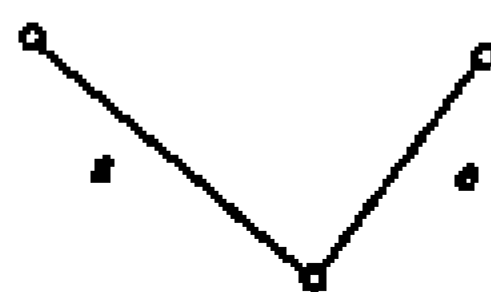
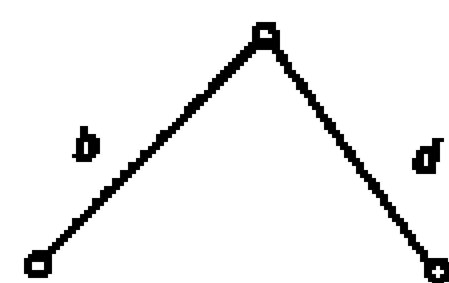
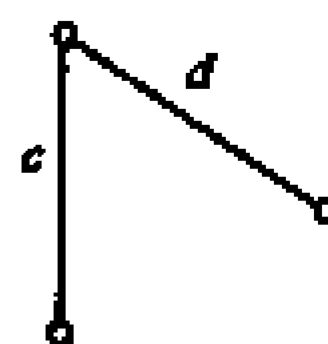
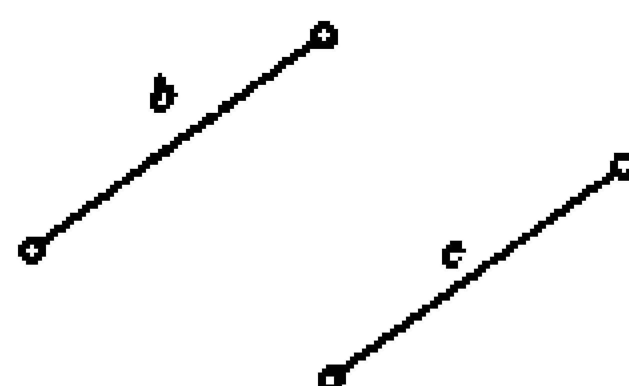
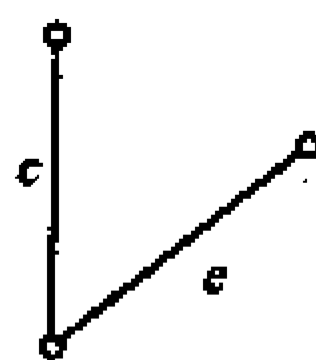


图 6.2-2

非奇异大子阵	连枝
$\begin{matrix} a & c \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{matrix} a & d \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{matrix} b & c \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{matrix} a & e \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{matrix} b & d \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{matrix} c & d \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{matrix} b & e \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	

$$\begin{array}{cc} c & e \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



6.3　割集矩阵

定义 6.3.1　设 G 是连通 (p,q) 图，令

$$q_{ij}=\begin{cases}1，若边 j 在断集 i 中\\0，否则\end{cases}$$

则称由元素 $q_{ij}(i=1,2,\cdots,2^{p-1}-1,j=1,2,\cdots,q)$ 构成的 $(2^{p-1}-1)\times q$ 矩阵为图 G 的**完全割集矩阵**(complete cnt matrix)，记为 Q_e。

由定义知，图 G 的完全割集矩阵的全部行向量，就是 G 的割集空间的全部非零元素。

例 6.3.1　求图 6.2-2 所示的图 G 的完全割集矩阵。

为要求出图 G 的完全割集矩阵，我们来求 G 的断集空间。为此，先求 G 的基本割集组（也可以取三个顶点的关联集，如 $S(1),S(2),S(3)$）。

取 G 的一棵生成树 $T=\{a,c,e\}$，于是基本割集组为

$$S_1=\{a,b\},S_2=\{b,c,d\},S_3=\{d,e\}$$

它们所有可能的环和是：

$$S_4=S_1\oplus S_2=\{a,c,d\}$$
$$S_5=S_1\oplus S_3=\{a,b,d,e\}$$
$$S_6=S_2\oplus S_3=\{b,c,e\}$$
$$S_7=S_1\oplus S_2\oplus S_3=\{a,c,e\}$$

于是图 G 的完全割集矩阵为

$$Q_e = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

因为连通图的割集空间的维数是 $p-1$，所以下面的定理是显然的。

定理 6.3.1 连通图的完全割集矩阵的秩是 $p-1$。

定义 6.3.2 在连通图 G 的完全割集矩阵中，由 $p-1$ 行 q 列组成的秩为 $p-1$ 的子阵，称为 G 的**割集矩阵**(cat set matri)，记作 Q。

和基本圈矩阵类似，由基本割集组成的矩阵叫做基本割集矩阵。它的定义是

定义 6.3.3 设 $S_1, S_2, \cdots, S_{p-1}$ 是连通图 G 关于生成树 T 的基本割集，令

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{若边 } j \text{ 在基本割集 } S_i \text{ 中} \\ 0, \text{否则} \end{cases}$$

则称由元素 $q_{ij}(i=1,2,\cdots,p-1, j=1,2,\cdots,q)$ 构成的 $(p-1)\times q$ 矩阵为图 G 的关于生成树 T 的**基本割集矩阵**(fundamental cut-set matrix)，记作 Q_f。

基本割集矩阵不是唯一的，但是连通图的基本割集的秩一定是 $p-1$。

定理 6.3.2 图 G 的基本割集矩阵 Q_f 可以写成

$$Q_f = [Q_{f_{11}}\ I]$$

其中 I 是 $p-1$ 阶单位矩阵，它的列对应于生成树的树枝，Q_{f11} 的列对应连枝。

这个定理的证明与定理 6.2.2 类似。

定理 6.3.3 图 G 的割集矩阵 Q 的大子阵是非奇异的充要条件是这个大子阵的列对应于某一生成树的树枝。

这个定理的证明将在下节中给出。

6.4 矩阵间的关系

定理 6.4.1 设 M,Q 分别是图 G 的关联矩阵和割集矩阵，那么存在一个非奇异矩阵 C，使

$$Q = CM$$

这个定理的证明与定理 6.2.3 类似，请读者自证。

下面我们证明关联矩阵和完全圈矩阵间的一个关系，这是一个基本的关系。

定理 6.4.2 连通图 G 的关联矩阵和完全圈矩阵 B_e 满足

$$MB_e^T = 0, B_eM^T = 0$$

其中 M^T, B_e^T 分别是 M, B_e 的转置矩阵。

[证明] 调整 M,B_e 的列的次序，使得 M 和 B_e 的列按相同的边的次序排列。把 M,B_e 按行分块，写成列矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix}, \qquad Be = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

其中 $m=p-1, n=2^{q-p+1}-1$。

根据分块矩阵的乘法，有

$$MB_e^T = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} (B_1^T B_2^T \cdots B_n^T) \doteq \begin{pmatrix} M_1B_1^T M_1B_2^T \cdots M_1B_n^T \\ M_2B_1^T M_2B_2^T \cdots M_2B_n^T \\ \cdots \\ M_mB_1^T M_mB_2^T \cdots M_mB_n^T \end{pmatrix}$$

其中

$$M_iB_j^T = \sum_{k=1}^{q} m_{ik}b_{jk} \qquad (6.4\text{-}1)$$

我们来考察(6.4-1)式右端的和式。显然，当 $m_{ik}=0$ 或 $b_{jk}=0$ 时 $m_{ik}b_{jk}=0$，只有当 $m_{ik}=1$ 和 $b_{jk}=1$ 时，该项不为零。而 $m_{ik}=1$ 表示边 k 与顶点 i 关联，$b_{jk}=1$ 表示边 k 在第 j 个环路中。于是 $m_{ik}b_{jk}=1$ 表示顶点 i 在第 j 个环路中，从而顶点 i 的度为偶数。又顶点 i 在环路 j 中的度就是等式(6.4-1)右端的非零项的项数。因而有

$$M_iB_j^T = 0(\text{模 2 加法})$$

这就是说，MB_e^T 的每一个元素均为零，于是

$$MB_e^T = 0$$

从而又有

$$B_eM^T = 0 \qquad \blacksquare$$

定理 6.4.3 设 M,B 分别是图 G 的关联矩阵和圈矩阵，则

$$MB^T = 0, BM^T = 0$$

［证明］ 调整完全圈矩阵 B_e 的行的次序，使

$$B_e = \begin{pmatrix} B \\ B_1 \end{pmatrix}$$

由定理 6.4.2，有

$$MB_e^T = M(B^TB_1^T) = (MB^TMB_1^T) = 0$$

故有

$$MB^T = 0$$

及

$$BM^T = 0 \quad ▮$$

定理 6.4.4 设图 G 的关联矩阵和基本圈矩阵分别写成

$$M = [M_{11}\ M_{12}]\ B_f = [I\ B_{f12}]$$

其中 M_{11} 对应生成树 T 的连枝，那么

$$B_f = [I\ M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1}] \qquad (6.4\text{-}2)$$

[证明] 由定理 6.4.3，有

$$B_f M^T = [I\ B_{f12}]\begin{bmatrix} M_{11}^T \\ M_{12}^T \end{bmatrix}$$

$$= M_{11}^T + B_{f12}M_{12}^T = 0$$

于是

$$M_{11}^T = B_{f12}M_{12}^T$$

因为 M_{12} 是非奇异的，故有

$$B_{f12} = M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1}$$

从而有

$$B_f = [I\ M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1}] \quad ▮$$

定理 6.4.4 表明，由图的关联矩阵可以求出基本圈矩阵，从而可以求出图的全部圈。

例 6.4.1 求图 6.4-1 所示的图 G 关于生成树 $T=\{a,b,c\}$ 的基本圈矩阵和 G 的全部圈。

取顶点 4 为参考点，图 G 的关联矩阵是

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

把矩阵 M 按连枝和树枝的次序从左到右排列，写成

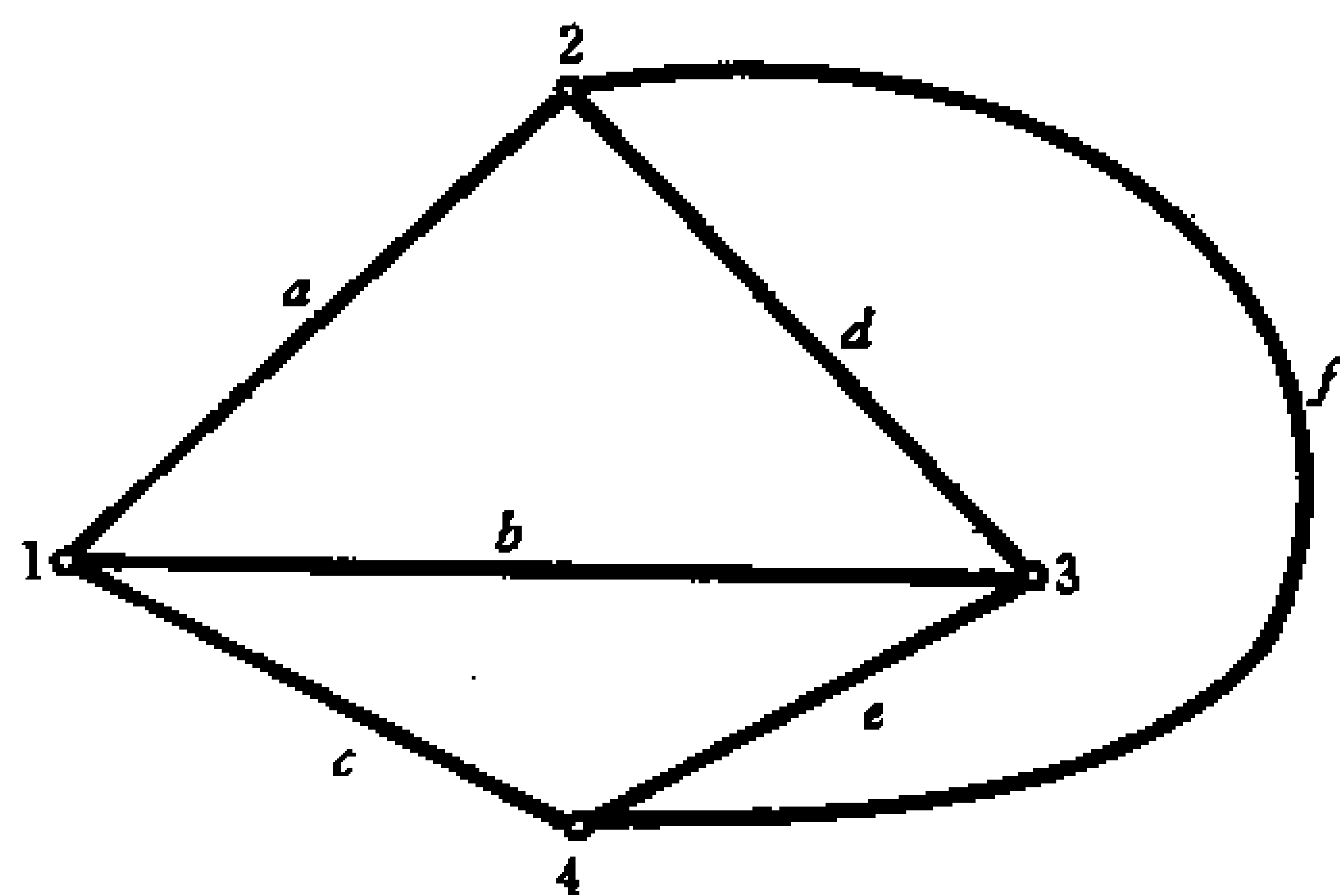


图 6.4-1

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} d & e & f & a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

于是

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

和

$$(M_{12}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

而

$$B_{12} = M_{11}^T (M_{12}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$
B_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} d & e & f & a & b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

作 B_f 的行向量的所有可能的环和，有 $\{a,c,d,e\}$，$\{b,c,d,f\}$，$\{a,b,e,f\}$，$\{d,e,f\}$ 于是图 G 的全部圈是：

$$\{a,b,d\},\{b,c,e\},\{a,c,f\}$$

$$\{a,c,d,e\},\{b,c,d,f\},\{a,b,e,f\},\{d,e,f\}$$

下面我们证明描述割集矩阵和圈矩阵之间关系的一个定理。

定理 6.4.5 设 Q，B_e 和 B 分别是图 G 的割集矩阵，完全圈矩阵和圈矩阵，则有

$$QB_e^T = 0 \ (B_eQ^T = 0)$$

$$QB^T = 0 \ (BQ^T = 0) \qquad (6.4\text{-}3)$$

[证明] 设 M 是图 G 的关联矩阵，由定理 6.4.2 和定理 6.4.3，有

$$MB_e^T = \text{和 } MB^T = 0$$

又由定理 6.3.3，存在一个非奇异矩阵 C，使 $Q=CM$，于是

$$QB_e^T = CMB_e^T = C.0 = 0$$

$$QB^T = CMB^T = C.0 = 0 \quad ∎$$

定理 6.4.6 设图 G 关于生成树 T 的基本圈矩阵和基本割集矩分别是

$$B_f = [I \ B_{f12}],\ Q_f = [Q_{f11} \ I]$$

且它们的列所表示的边的次序相同，则

$$Q_f = [B_{f12}^T \ I],\ B_f = [I \ Q_{f11}^T]$$

[证明] 由定理 6.4.5，有

$$Q_fB_f^T = [Q_{f11} I] \begin{bmatrix} I \\ B_{f12}^T \end{bmatrix} = Q_{f11} + B_{f12}^T = 0$$

于是

$$Q_{f11} = B_{f12}^T$$

故

$$Q_f = [B_{f12}^T I]$$

同样可证

$$B_f = [I \cdot Q_{f11}^T] \quad ∎$$

定理 6.4.6 表明，由基本圈矩阵可以求出基本割集矩阵，由基本割集矩阵可以求出基本圈矩阵。

例 6.4.2 在图 6.4-2 所示的图 G 中，取生成树 $T=\{a,c,e,g\}$。

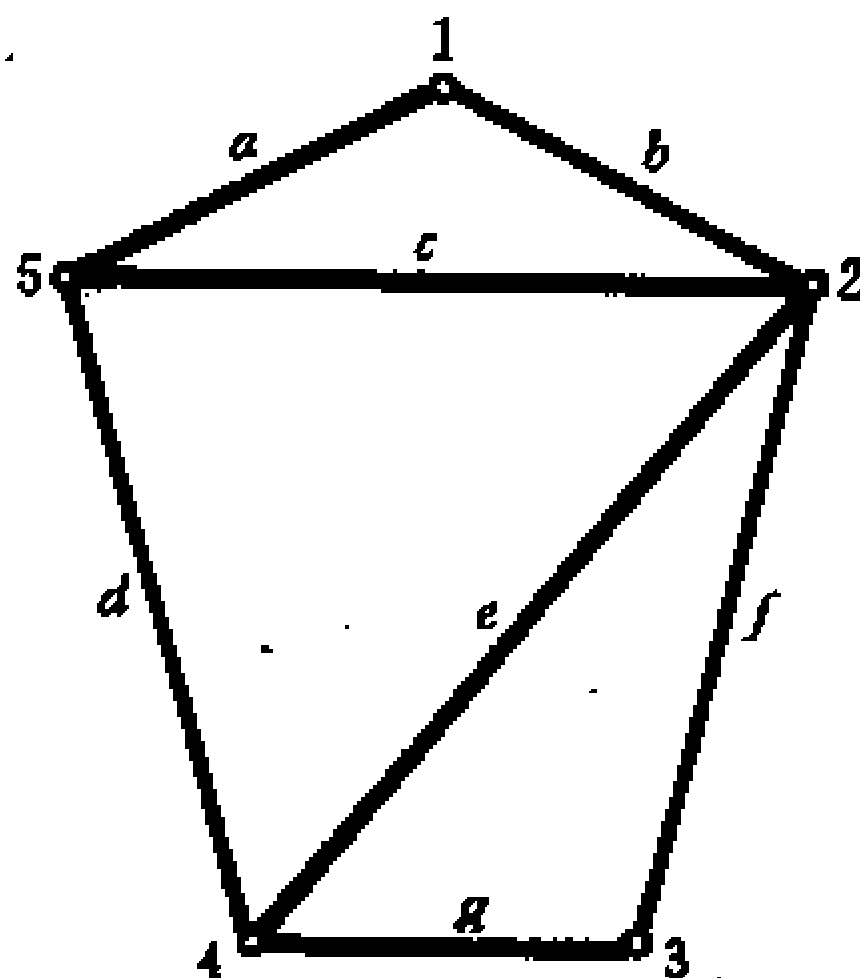


图 6.4-2

图 G 关于生成树 T 的基本圈是：

$C_1=\{a,b,c\}$,

$C_2=\{c,d,e\}$,

$C_3=\{e,f,g\}$

于是 G 关于 T 的基本圈矩阵是

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} b & d & f & a & c & e & g \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

而

$$B_{f12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{f12}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$Q_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} b & d & f & a & c & e & g \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

现在我们来证明定理 6.3.3。

设 Q_{12}是矩阵 Q 的一个大子阵，它的列对应于生成树 T 的树枝，调整 Q 的列把 Q 写成

$$Q = [Q_{11}\ Q_{12}] \tag{A}$$

设 M 是图 G 的关联矩阵，调整 M 的列的次序使与 Q 的列表示相同的边：

$$M = [M_{11}\ M_{12}]$$

由定理 6.4.1，存在一个非奇异的矩阵 C，使 $Q=CM$，于是

$$[Q_{11}\ Q_{12}] = C[M_{11}\ M_{12}]$$

故

$$Q_{12} = CM_{12}$$

由线性代数和定理 6.1.4 知

$$Q_{12}\text{ 的秩} = (CM_{12})\text{ 的秩} = M_{12}\text{ 的秩} = p-1$$

即 Q_{12}是非奇异的。

反之，设 Q_{12}是非奇异的。用 Q_{12}^{-1}左乘(A)式两端，有

$$Q_{12}^{-1}Q = [Q_{12}^{-1}Q_{11}\ I]$$

令 $Q_{12}^{-1}Q=Q_1$，$Q_{12}Q$ $=Q_2$，上式写成

$$Q_1 = [Q_2\ I]$$

因为 Q_{12}^{-1}是非奇异的，所以 $Q_{12}^{-1}Q$ 即 Q_1 是一割集矩阵。

设 B 是图 G 的圈矩阵，把 B 按列分块，得

$$B = [B_{11}\ B_{12}]$$

这里 B_{11}与 Q_{11}的列数相同，B_{12}与 Q_{12}的列数相同，而且由

$$BQ^T = [B_{11}\ B_{12}]\begin{bmatrix} Q_2^T \\ I \end{bmatrix} = B_{11}Q_2^T + B_{12} = 0$$

于是

$$B_{12} = B_{11}Q_2^T$$

故

$$B = [B_{11}\ B_{11}Q_2^T] = B_{11}[I\ Q_2^T]$$

由线性代数，知

$$B \text{ 的秩} \leqslant B_{11} \text{ 的秩}$$

因为 B_{11} 是 B 的子阵，所以

$$B_{11} \text{ 的秩} \leqslant B \text{ 的秩} = q - p + 1$$

于是 B_{11} 是非奇异的。由定理 6.2.4 知，B_{11} 的列对应于图 G 的连枝集，因而 B_{12} 的列对应树枝。由于 Q_{12} 和 B_{12} 的列表示的边相同，故 Q_{12} 的列对应树枝。▮

作为本节的结束，我们把前面所讨论的关联矩阵、圈矩阵和割集矩阵之间的关系总结如下：

$$AB_e^T = 0, B_eA^T = 0$$

$$AB^T = 0, BA^T = 0$$

$$AB_f^T = 0, B_fA^T = 0$$

$$QB_e^T = 0, B_eQ^T = 0$$

$$QB^T = 0, BQ^T = 0$$

$$QB_f^T = 0, B_fQ = 0;$$

$B=CB_f, Q=CA, C$ 为非奇异矩阵，

$$B_f = [I \ (A_{11}^T)(A_{12}^T)^{-1}], \ A = [A_{11}, A_{12}]$$

$$B_f = [I \ Q_{f11}^T],$$

$$Q_f = [B_{f12}^T \ I]。$$

6.5 图的邻接矩阵

当我们需要一个图的非图形表示时（例如使用计算机时），通常我们利用图的邻接矩阵来描述它的结构。

定义 6.5.1 设图 G 的顶点集 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，令

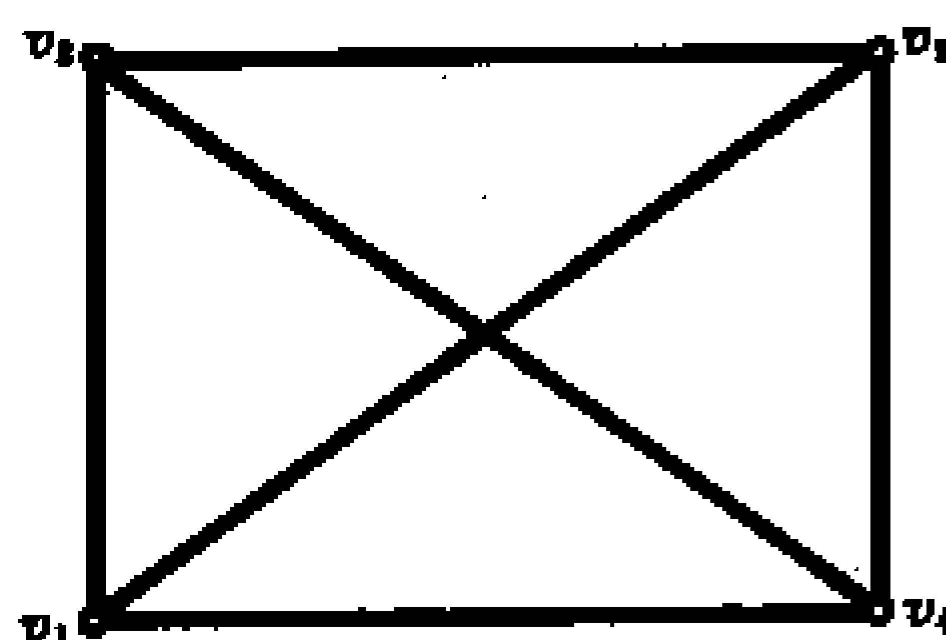
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 邻接} \\ 0, \text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不接或 } i = j \end{cases}$$

则称由元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, p)$ 构成的 p 阶矩阵为图 G 的邻接矩阵

(adjacent matrix)，记作 $A(G)$或简记作 A。

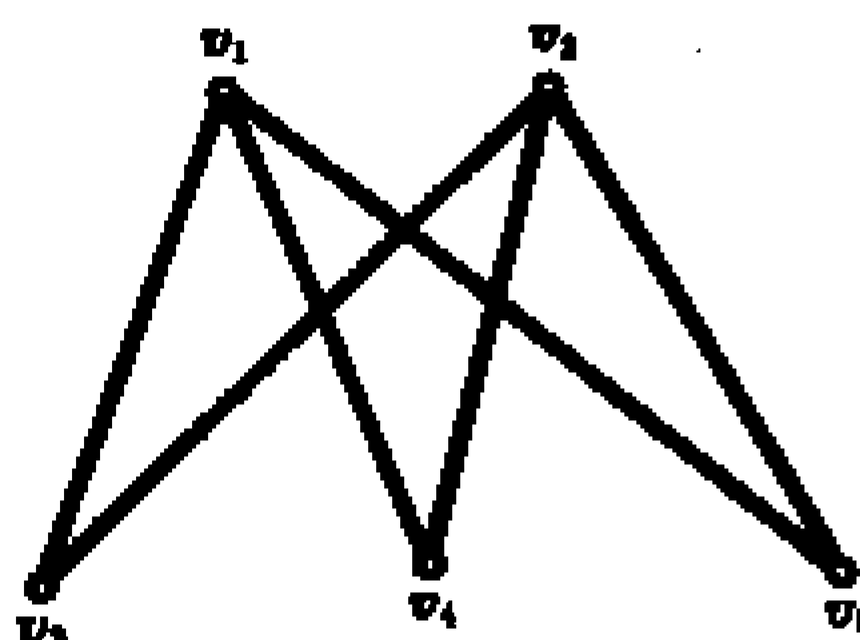
例如，图 6.5-1 所示的 K_4 和 $K_{2,3}$ 的邻接矩阵分别是

$$A(K_4)=\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$



K_4

$$A(K_{2,3})=\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$



$K_{2,3}$

图 6.5-1

由定义 6.5.1 知，图的邻接矩阵是一个主对角线上的元素均为 0，其余元素为 0 或 1 的对称矩阵，并且它的任一行或列的元素的和等于相应顶点的度。反之，若给定一个主对角线上的元素均为 0，其余元素为 0 或 1 的对称矩阵 A，则可以唯一地确定一个图 G，以 A 为其邻接矩阵。于是图的许多性质可以被反映到邻接矩阵中来。譬如：

(1) 邻接矩阵的行与列按相同的顶点次序排列，置换行和相应的列，即重新安排顶点的次序。如在邻接矩阵 A 中交换两行(同时交换相应的两列)，那么 $G_1 \cong G_2$ 当且仅当存在一个置换矩阵 P，使

$$A(G_2)=P^{-1}A(G_1)P \qquad (6.5\text{-}1)$$

事实上，由于邻接矩阵是由标定图做出的，若 A_1 和 A_2 是同一个图 G 的两种不同标定的邻接矩阵，则必存在一个置换矩阵 P，使

$$A_1=P^{-1}A_2P \qquad (6.5\text{-}2)$$

(2) 我们知道，一个图 G 是连通的，当且仅当对 $V(G)$ 的每一个二分划 (V_1, V_2)，恒存在一条边，它的两个端点分别属于 V_1 和 V_2（第一章习题 1-17）。用矩阵的语言来说就是：G 是连通的，当且仅当没有 G 的顶点的一种标定法，使得它的邻接矩阵具有分块形式：

$$A(G) = \begin{pmatrix} A(G_1) & \\ & A(G_2) \end{pmatrix}$$

定理 6.5.1 设 A 是图 G 的邻接矩阵，则 A^k 的 (i,j) 元素 $a_{ij}^{(k)}$ 等于 G 中联结 v_i 与 v_j 的长为 k 的途径的数目。

〔证明〕 对 k 用归纳法。当 $k=0$ 时 $A^0=I$ 为 p 阶单位矩阵。从任一顶点 v_i 到自身有一条长为 0 的途径。任何两个不同的顶点间没有长为 0 的途径，故当 $k=0$ 时定理成立。

今设定理对 k 成立，由 $A^{k+1}=AA^k$，故

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} a_{lj}^{(k)}$$

由于 a_{il} 是联结 v_i 与 v_l 的长为 1 的途径的数目，$a_{lj}^{(k)}$ 是联结 v_l 与 v_j 长为 k 的途径的数目。所以 $a_{il}a_{lj}^{(k)}$ 表示由 v_i 经过一条到 v_l，再经过一条长为 k 的途径到 v_j 的总长为 $k+1$ 的途径的数目，对所有的 l 求和，即得 $a_{ij}^{(k+1)}$ 是所有联结 v_i 与 v_j 的长为 $k+1$ 的途径的数目。由归纳法原理，定理得证。▌

推论 6.5.1

$$a_{ii}^{(2)} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} = \deg(v_i) \qquad (6.1\text{-}3)$$

〔证明〕 因为联结 v_i 与它自身的长为 2 的途径只能是重复一次经过一条关联于 v_i 的边，由定理 6.5.1 即得推论 6.5.1。▌

推论 6.5.2 $a_{ii}^{(3)}$ 是图 G 中以 v_i 为一个顶点的三角形数目的二倍。

〔证明〕 联结 v_i 与其自身的长为 3 的途径只能是以 v_i 为一个顶点的三角形，而每一个这样的三角形按两种不同方向对应于两条不同的途径。▌

定义 6.5.2 图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的行列式 $\det A(G)$ 称为图 G 的行列式，记作 $\det G$，即

$$\det G = \det A(G)$$

定义 6.5.3 图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征多项式称为图 G 的**特征多项式**，记作 $P(G;\lambda)$，即

$$P(G;\lambda) = (-1)^p det[A(G) - \lambda I]$$
$$= \sum_{i=1}^{p} c_i \lambda^{p-i} \quad (6.1\text{-}5)$$

一个图的特征多项式的系数 c_i 与它的导出子图的数目有关。

定理 6.5.2 图 G 的特征多项式的系数

$$c_0 = 1$$
$$c_i = (-1)^i \sum \det H \cdot s(G,H) \quad (6.5\text{-}5)$$

其中 $s(G,H)$ 为 G 中同构于 H 的导出子图的数目，

$\sum$ 是对所有 i 阶导出子图求和

[证明] $c_0 = 1$ 是显然的。

由线性代数知，式(6.5-4)中的系数为

$$c_i = (-1)^i \sum_{A_i} \det A_i$$

其中 $\sum$ 是对 $A(G)$ 的所有 i 阶主子式 A_i 求和。$A(G)$ 的每一个 i 阶主子式是由相应的行对应的顶点所导出的 G 的 i 阶导出子图的行列式。若两个导出子图同构，则它们的行列式相同。按同构的子图合并相应的项，即得式(6.5-5)。 ▌

由线性代数知，实对称矩阵的特征值均为实数，图 G 的邻接矩阵是实对称矩阵，因此，邻接矩阵的特征值为实数。

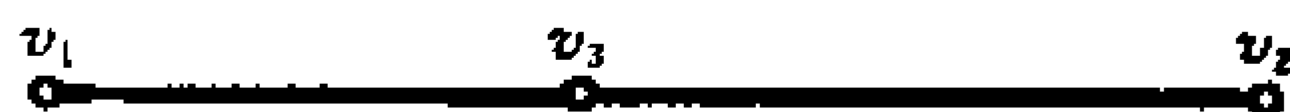
定义 6.5.4 图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值称为**图 G 的特征值**，**G 的全部特征值称为 G 的谱**(spectral)，记作 Spec$G$。

设 $A(G)$ 的不同的特征值为 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_s$，$\lambda_i$ 的重数为 m_i，则图 G 的谱可表示为

$$\text{Spec}G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{pmatrix}$$

下面给出一些图的特征多项式和它的谱的例子。

例 6.5.1



$$A(P_3) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P(P_3;\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda$$

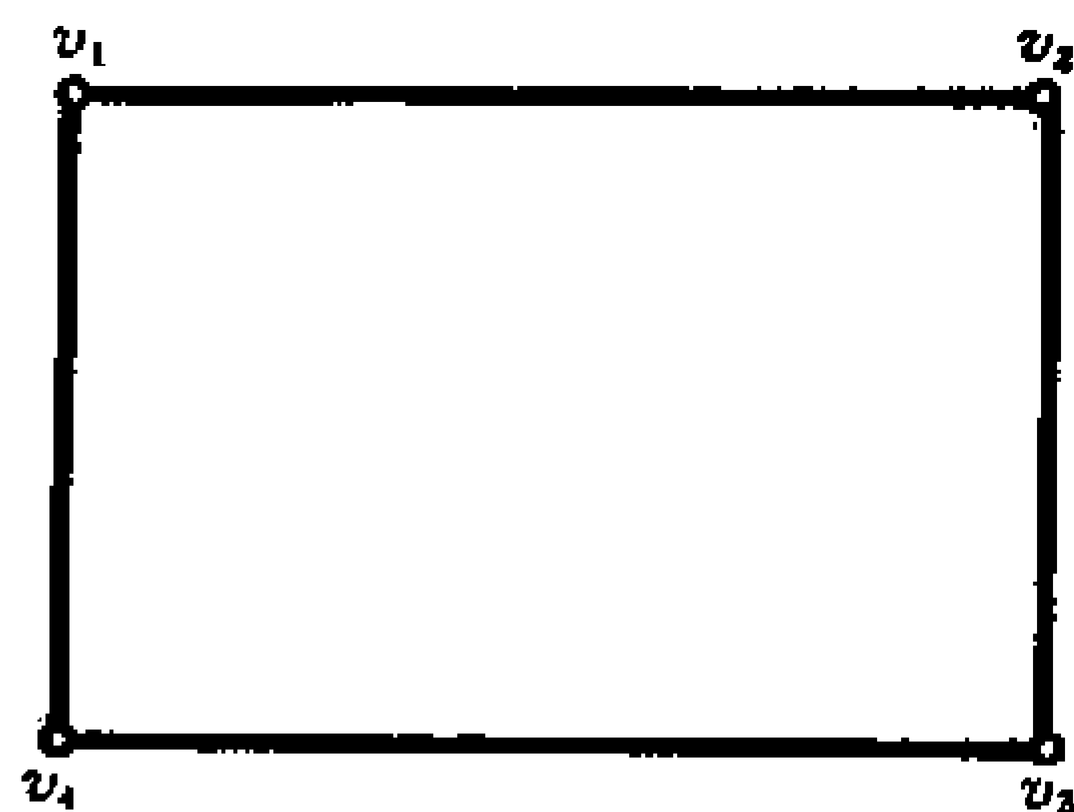
$$\text{Sep}P_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 6.5.2

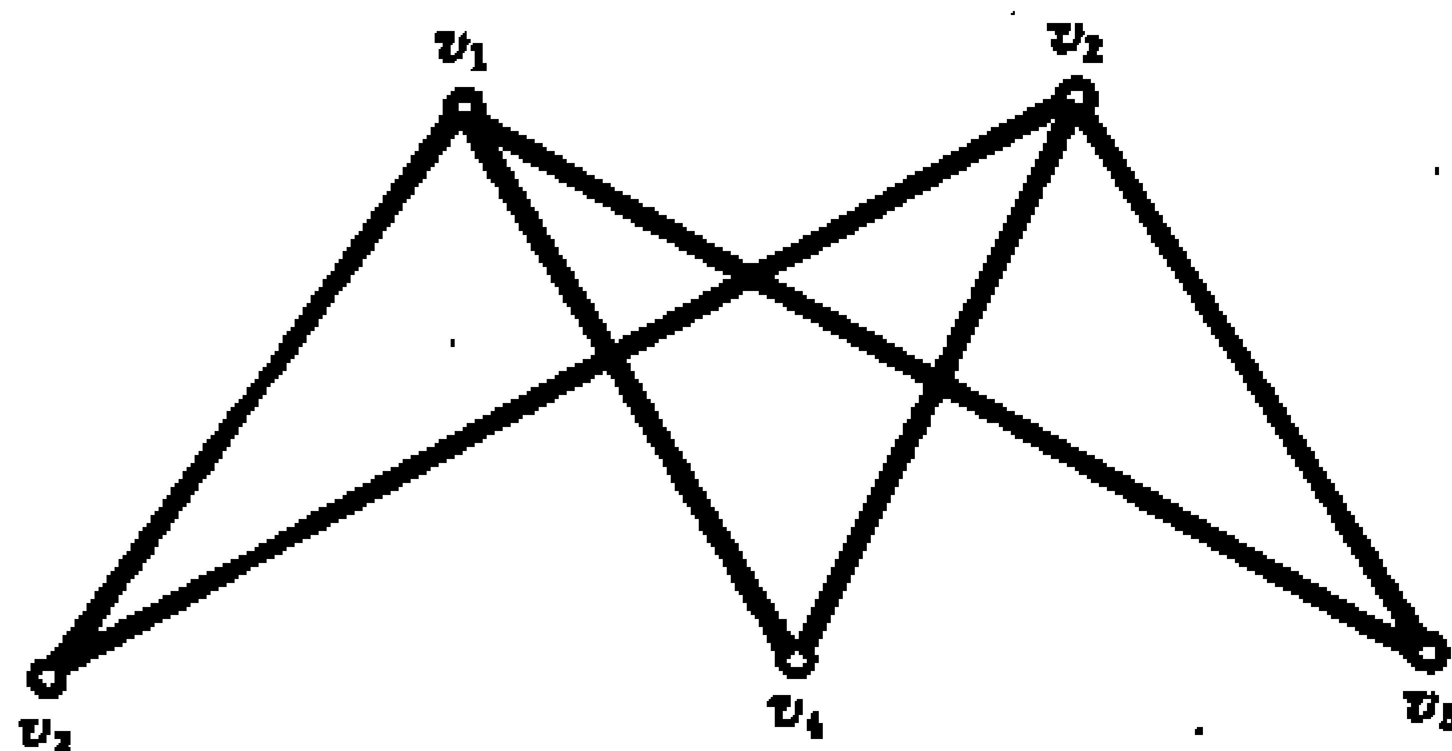
$$A(C_4) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P(C_4,\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2$$

$$\text{Spec}C_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



例 6.5.3



$$A(K_{2,3})=\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$P(K_{2,3};\lambda)=\lambda^5-6\lambda^3$$

定理 6.5.3 p 阶完全图 K_p 的谱是

$$\mathrm{Sepc}K_p=\begin{pmatrix} -1 & p-1 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}$$

[证明] K_p 的邻接矩阵是

$$A(K_p)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

于是 K_p 的特征多项式为

$$P(K_p;\lambda)=(-1)^p\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

利用行列式的性质不难算出：

$$(-1)^p\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^p[\lambda-(p-1)](\lambda+1)^{p-1}$$

即

$$P(k_p;\lambda)=(-1)^p(\lambda-p+1)(\lambda+1)^{p-1}$$

于是 K_p 的特征值是 $p-1$(重数 1),和-1(重数为 $p-1$)。▌

由分块矩阵行列式的性质，可以直接得出下面的结论。

命题 6.5.1 如果 G 是分离图，则 G 的谱是各分支谱的并。

命题 6.5.2 图的特征值的和为零。

［证明］ 图 G 的特征值的和等于 $A(G)$ 的迹，由于 $A(G)$ 主对角线的元素均为 0，所以 $A(G)$ 的迹为 0。▌

定理 6.5.4 设 G 是 r 正则图，则

(1) r 是 G 的一个特征值；

(2) r 的重数等于 G 的分支数；

(3) G 的任一特征值 λ 满足 $|\lambda|\leqslant r$。

［证明］(1) 设 $\bar{a}=\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{p\text{个}}{}^T$，则有

$$A(G)\bar{a}=r\bar{a}$$

故 r 是 G 的一个特征值，$\bar{a}$ 是对应的特征向量。

(2) 因为一个有 k 个分支的分离图的特征多项式是它的每一分支的特征多项的乘积，且一个图是 r 正则的当且仅当它的每个分支都是 r 正则的。所以只要证明 $k=1$，即连通图的情形。

设 $\bar{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_p)^T$ 是 $A(G)$ 的对应于特征值 r 的特征向量。要证明 $b_1=b_2=\cdots=b_p$。不妨设 b_1 在所有的 b_i 中有最大的绝对值。若有 $b_l\neq b_1$，$2\leqslant l\leqslant p$，考虑联结 v_1 与 v_l 的一条道路 $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_t}$，其中 $v_{i_1}=v_1$，$v_{i_t}=v_l$。我们可以得到 s 使得 $b_{i_s}=b_1$，$b_{i_{s+1}}\neq b_1$，因

$$A(G)\bar{b}=r\bar{b}$$

考虑第 i_s 个分量，得

$$\sum_{j=1}^{p}a_{i_sj}b_j=rb_{i_s}$$

上式左端至多有 r 项非零，且每一项的绝对值不超过 $|b_1|=|b_{i_s}|$，即知左端恰有 r 项非零，且每一个非零项等于 b_{i_s}，于是取 $j=i_{s+1}$，则 $a_{i_s,i_{s+1}}=b_{i_{s+1}}=b_{i_s}$，与假设矛盾。从而证明了 $b_1=b_2=\cdots=b_p$。因此，设 p 维向量 $\bar{a}$ 如 1)中所定义，$\bar{b}$ 可表示为 $\bar{b}=b\bar{a}$。于是，$\bar{b}$ 属于 $\bar{a}$ 生成的一维空间，由于对应特征值 r 的特征向量生成的空间是一维的，故 r 是单重特征值。

(3) 设 λ 是 G 的一个特征值，$c=(c_1,c_2,\cdots,c_p)$ 是对应于 λ 的特征向

量，令

$$|c_i| = \max\{|c_s| \ s = 1,2,\cdots,p\}$$

因 $A(G)\bar{c}=\lambda\bar{c}$，考虑第 i 个分量，得

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j = \lambda c_i$$

由

$$|\lambda||c_i| = |\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}c_j| \leqslant r|c_i|$$

故有

$$|\lambda| \leqslant r。 \quad \blacksquare$$

最后，我们简单地提一下所谓谱唯一性问题。由于一个图的谱在它的顶点的重新标定下是不变的，早期的研究者曾希望图的谱将唯一地决定图的结构。但是很快发现，事实上并非如此。例如图 $K_{1,4}$ 和图 $K_1 \cup C_4$（图 6.5-2），具有相同的谱：

$$\mathrm{Sepc}K_{1,4} = \mathrm{Spec}(K_1 \cup C_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

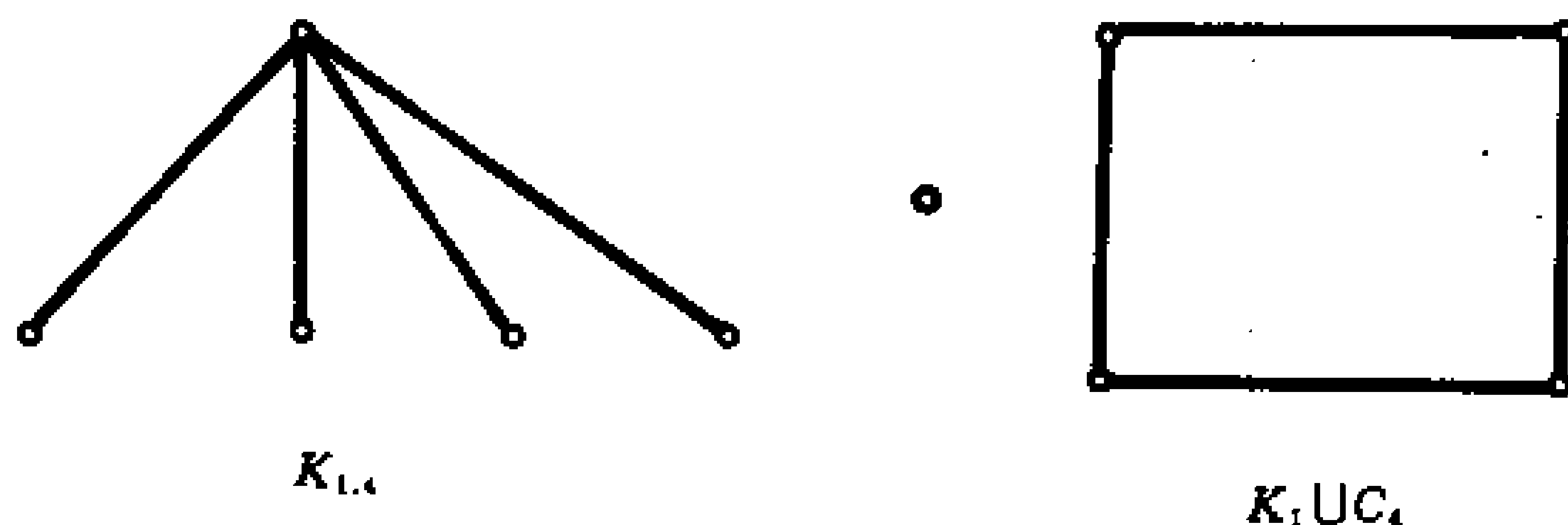


图 6.5-2

但是 $K_{1,4}$ 和 $K_1 \cup C_4$ 不同构。这表明不同构的图可能相同的谱。什么样的图可以由谱唯一确定，换句话说，具有什么样结构的图具有如下性质：

若

$$\mathrm{Spec}G = \mathrm{Spec}H$$

则

$$G \cong H$$

这是图论中一个至今仍没有解决的问题，即所谓的谱唯一性问题。

6.6 割集矩阵的可实现性

在前面几节中，讨论了给定一个图可以写出这个图的关联矩阵、圈矩阵和割集矩阵。若给定一个以 0 和 1 为元素的矩阵(简称为(0,1)矩阵)，它是否是某一个图的关联矩阵或圈矩阵或割集矩阵。

对于关联矩阵，问题很容易解决。一个(0,1)矩阵，只要它的每一列中 1 的个数不超过 2，那么这个矩阵就是某个图的关联矩阵。从关联矩阵找出它所描述的图的方法是：若矩阵的行数是 n，则对应的图有 $n+1$ 个顶点，其中第 $n+1$ 个顶点是参考点。矩阵的列数就是图的边数。若矩阵的某一列有两个 1，则把这两个 1 所在的行对应的顶点连起来，若某一列只有一个 1，则这个 1 所在行对应的顶点与参考点相连，这样得到的图就是该关联矩阵所描述的图。

但是判断一个(0,1)矩阵是不是某一个图的割集矩阵或圈矩阵就不那么容易了。

下面我们来介绍一种判断(0,1)矩阵是不是某个图的割集矩阵或圈矩阵的方法。这个方法是奥凯达提出的。

下面我们就基本割集矩阵进行讨论。

基本割集矩阵可以写成如下形式

$$Q_f = [Q_{f_{11}}\ I] \tag{6.6-1}$$

一个形如(6.6-1)的矩阵，如果存在一个图 G，以它为基本割集矩阵，那么称这个矩阵是**可实现的**。而形如(6.6-1)的矩阵是否是可实现的是基于下述定理：

如果形如(6.6-1)的矩阵是可实现的，那么它有一个奥凯达图形；反之，如果形如(6.6-1)的矩阵有一个广义的奥凯达图形，那么它是可实现的。

所谓奥凯达图形是一个平面图形，它是根据矩阵式(6.6-1)用平面上 $p-1$ 个圆和 $q-p+1$ 条线段构成（这里 $p-1$ 是矩阵式(6.6-1)的行数，$q-p+1$ 是子阵 $Q_{f_{11}}$ 的列数）。$p-1$ 个圆对应于形如式(6.6-1)矩阵的行，$q-p+1$ 条线段对应于式(6.6-1)矩阵中 $Q_{f_{11}}$ 的列。设 $p-1$ 个圆为 $J_1, J_2, \cdots, J_{p-1}$；$q-p+1$ 条线段为 $I_1, I_2, \cdots, I_{q-p+1}$。它们满足条件：

(1) 没有两个 J_k, J_m 是相交的，但允许互相包含；

(2) 没有 I_k 的端点落在 J_h 上($k=1,2,\cdots,q-p+1, h=1,2,\cdots,q-1$)；

(3) 如果矩阵式(6.6-1)的(h,k)位置上的元素是 1，那么 J_h 和 I_k 恰好交于一点，即 J_h 穿过 I_k 的地方。如果(h,k)位置的元素是 0，那么 J_h 和 I_k 不相交；

(4) 每段 I_k 至少交于（即穿过）一个 J_k，两条线段允许互相交叉。

满足上面条件的图形，称为形如式(6.6-1)矩阵的**奥凯达图形**。

如果用简单闭曲线代替圆，用简单弧代替线段，那么满足上述条件的图形，称为**广义奥凯达图形**。

例如

$$
\begin{matrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15
\end{matrix}
$$
$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\tag{6.6-2}
$$

上述矩阵的一个奥凯达图形如图 6.6-1 所示，因此该矩阵是可实现的。

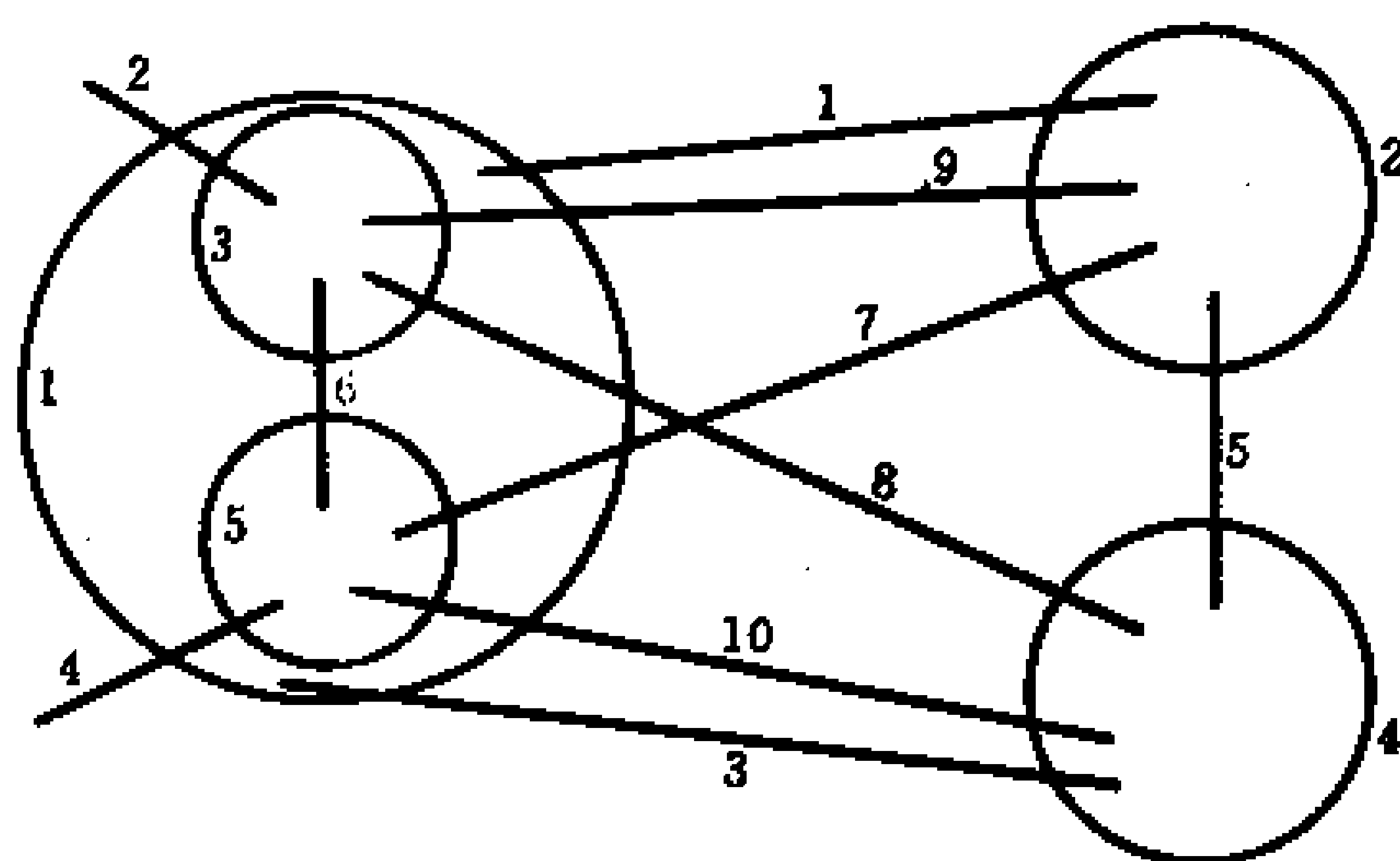


图 6.6-1

矩阵

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1

是不可实现的，事实上，先画出两个圆 J_1, J_2，如图 6.6-2 所示。再画出三个图 J_3, J_4, J_5，如图 6.6-3 所示。

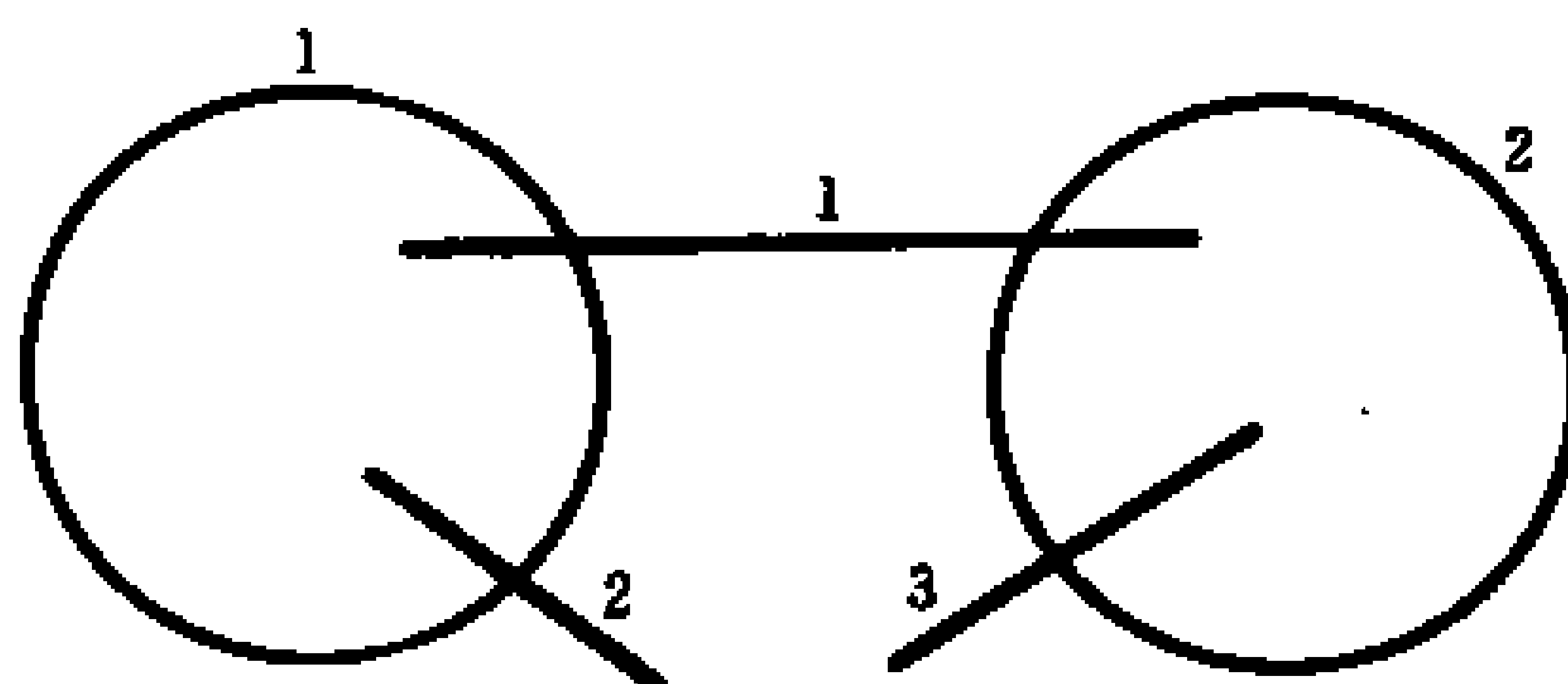


图 6.6-2

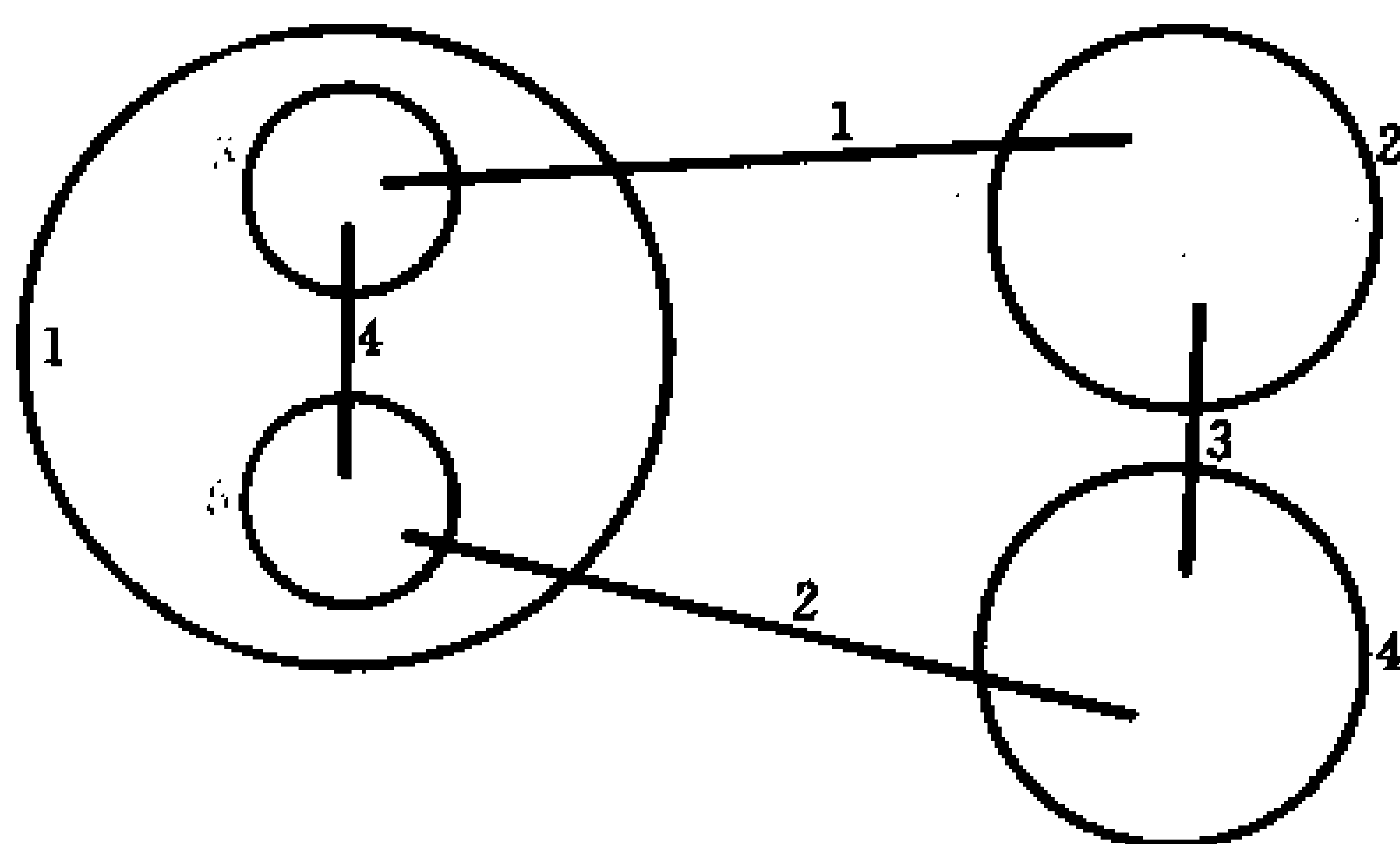


图 6.6-3

最后画出第六个圆 J_6，仅和 I_3、I_4 相交，这是不可能的。这就是说，不可能有一个图以其为基本割集矩阵。

下面我们给出，如果形如(6.6-1)的矩阵是可实现的，画出其相应的图的方法。

$p-1$ 个不相交的简单闭曲线 $J_1,J_2,\cdots,J_{p-1}$ 把平面分成 p 个区域 $R_0,R_1,\cdots,R_{p-1}$ 每个 R_i 的边界是某些 J_k 的并(至少是一个，也可能是全部)。此外，每个 J_k 恰好是 $R_0,R_1,\cdots,R_{p-1}$ 中两个的界，但两个区域中只有一个区域以 J_k 为它的外界。为方便起见，我们不妨设 R_0 为所有简单闭曲线的外部，而 $R_h(h=1,2,\cdots,p-1)$ 是以 J_k 为外界区域。

下面我们以给定矩阵的奥凯达图形为基础，来构造以所给矩阵为基本割集矩阵的图。

对应于区域 $R_h(h=0,1,2,\cdots,p-1)$，取顶点 $v_n(n=0,1,2\cdots,p-1)$，以下述规则作出 q 条边：

(1) 对每个 $J_h(h=1,2,\cdots,p-1)$，若 J_h 是 R_i 和 R_j 的界，则取一条边 e_h 连接 v_iv_j。

(2) 对每个 $I_k(k=1,2,\cdots,q-p+1)$ 它的两个端点在不同的域中，如 $R_s,R_t(s\neq t)$，对应于它，我们取一条边 e_k，连接 v_s 和 v_t。

根据矩阵(6.6-2)的奥凯达图形(6.6-1)，按照上述方法得到如图 6.6-4 所示的图。

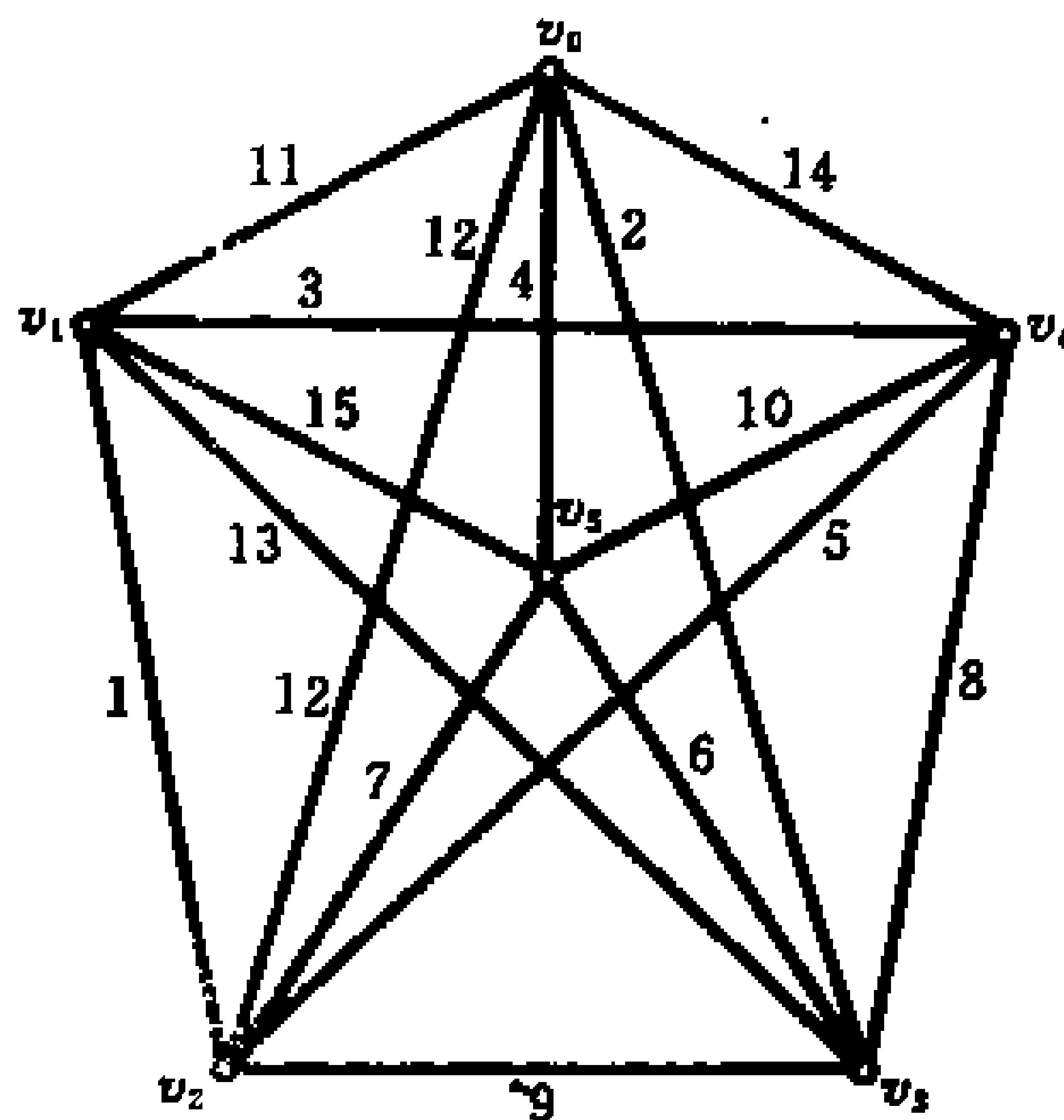
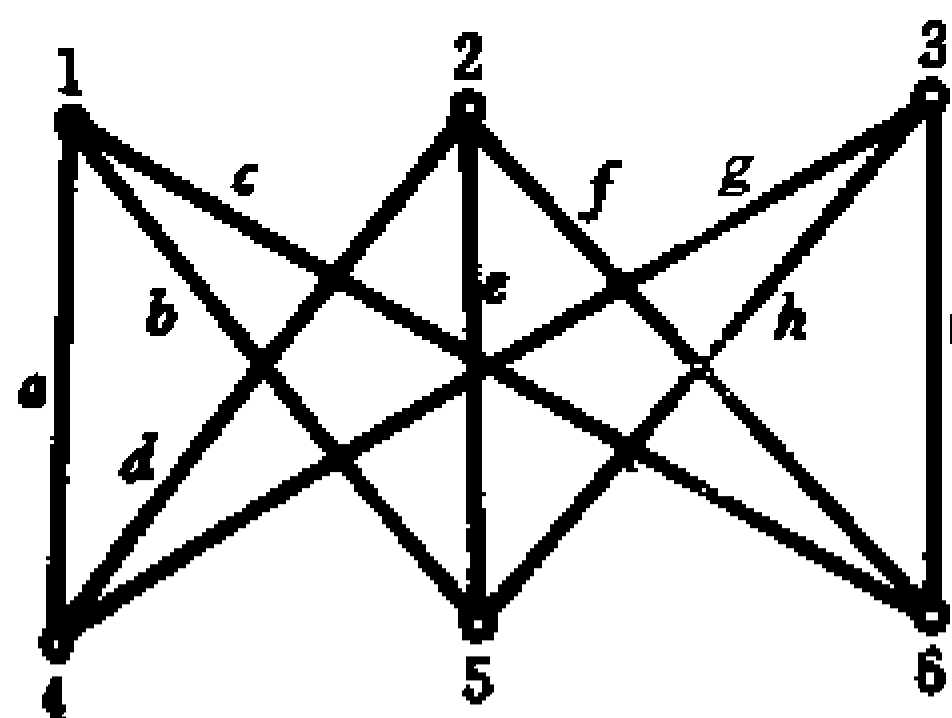


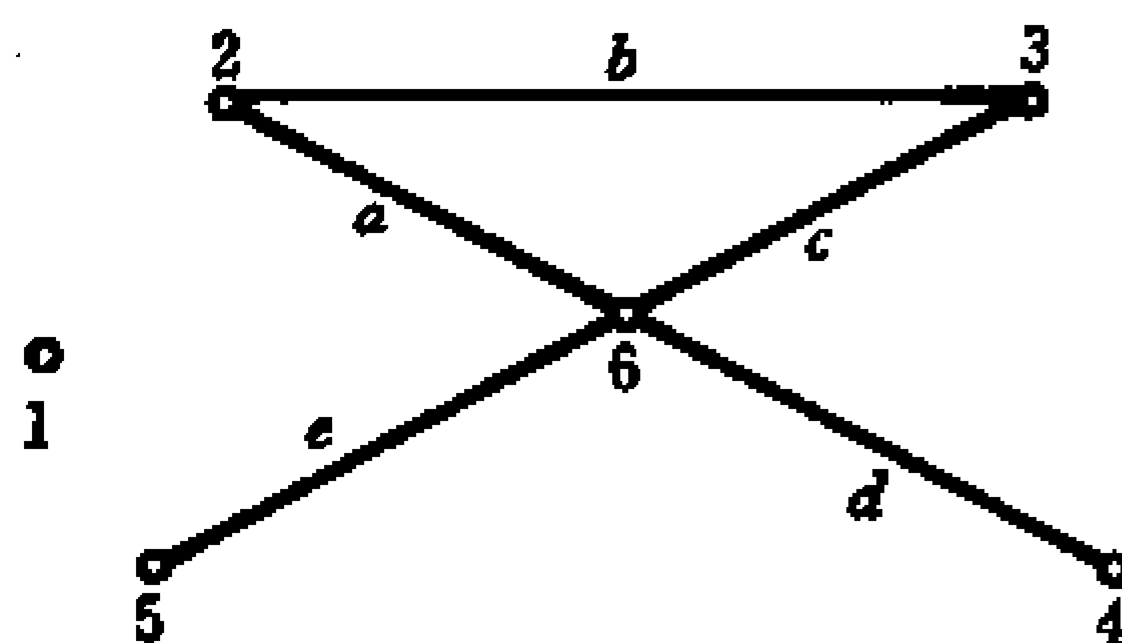
图 6.6-4

习 题 六

6-1 写出下列各图的完全关联矩阵：



G_1



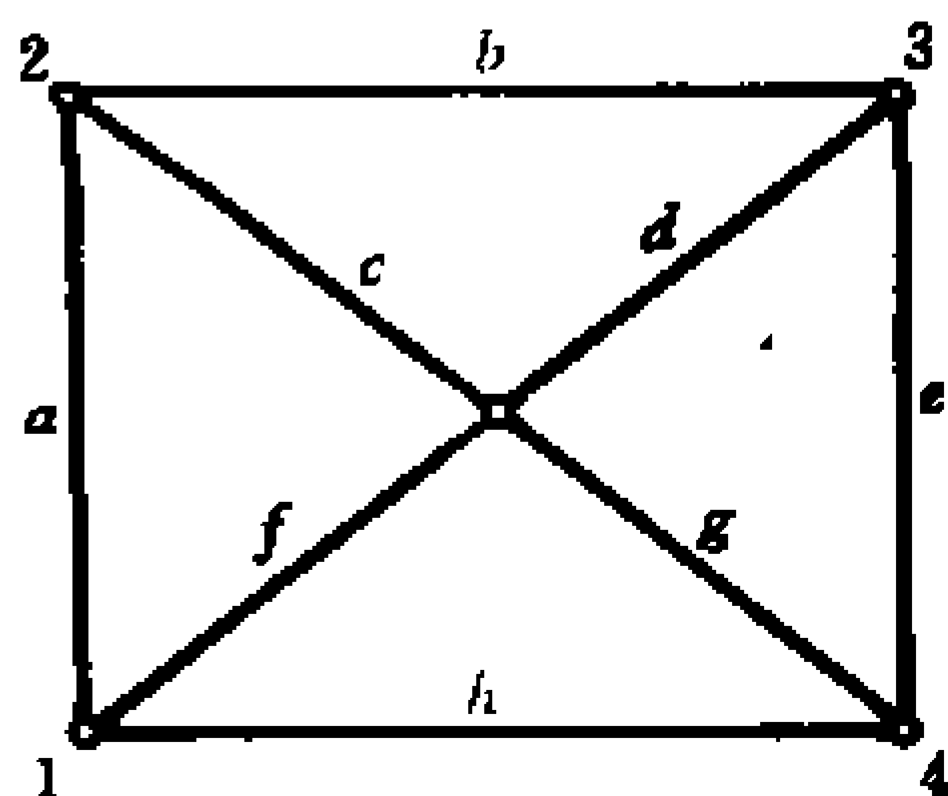
G_2

题 6-1 图

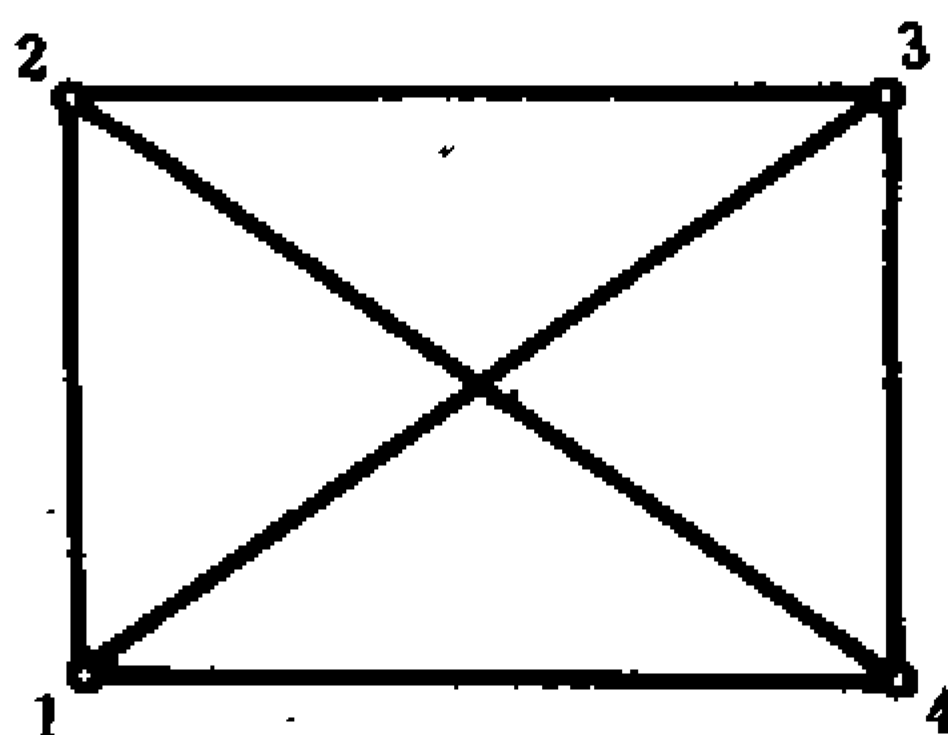
6-2 求出图 G 的关于生成树 $T=\{c,d,f,g\}$ 的基本圈矩阵。

6-3 对 4 阶完全图 K_4，试就同一棵生成树和相同的列的排列次

序，求出该图的 A_r、A，B_r，B，B_f，Q_r，Q_f。



题 6-2 图

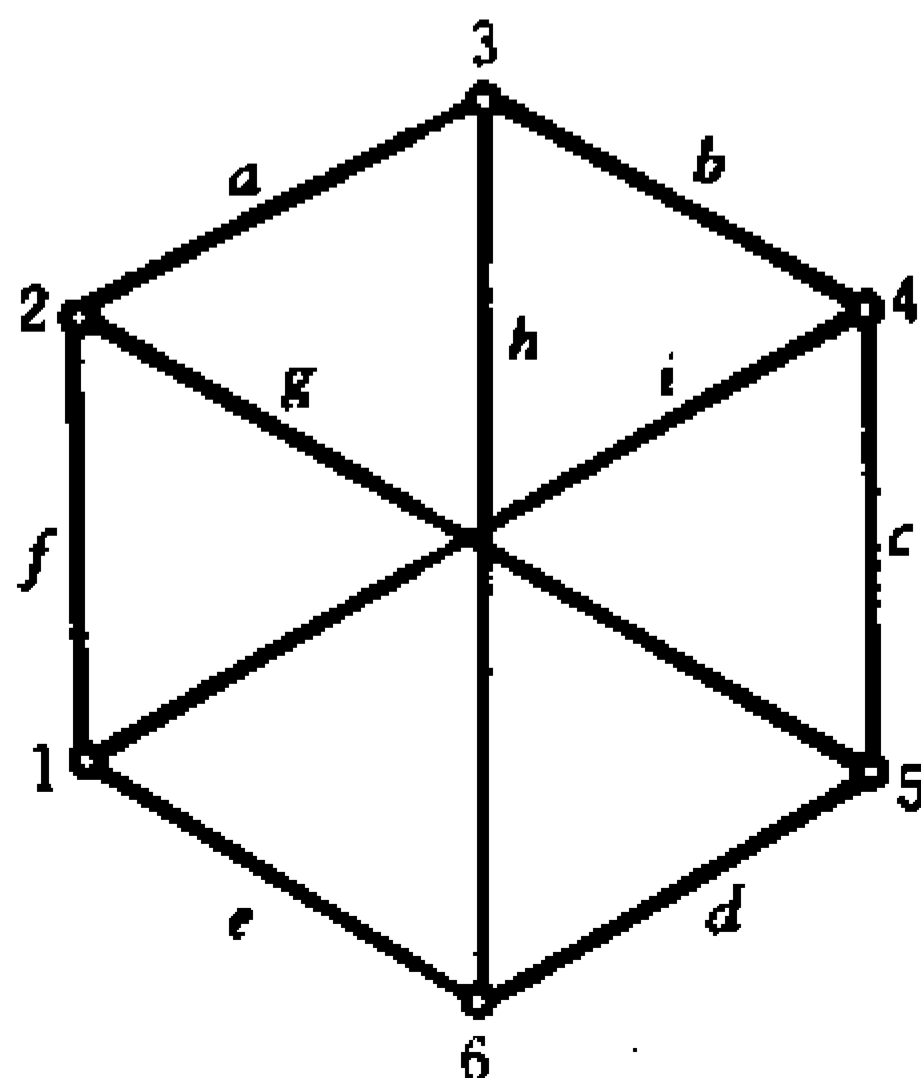


题 6-3 图

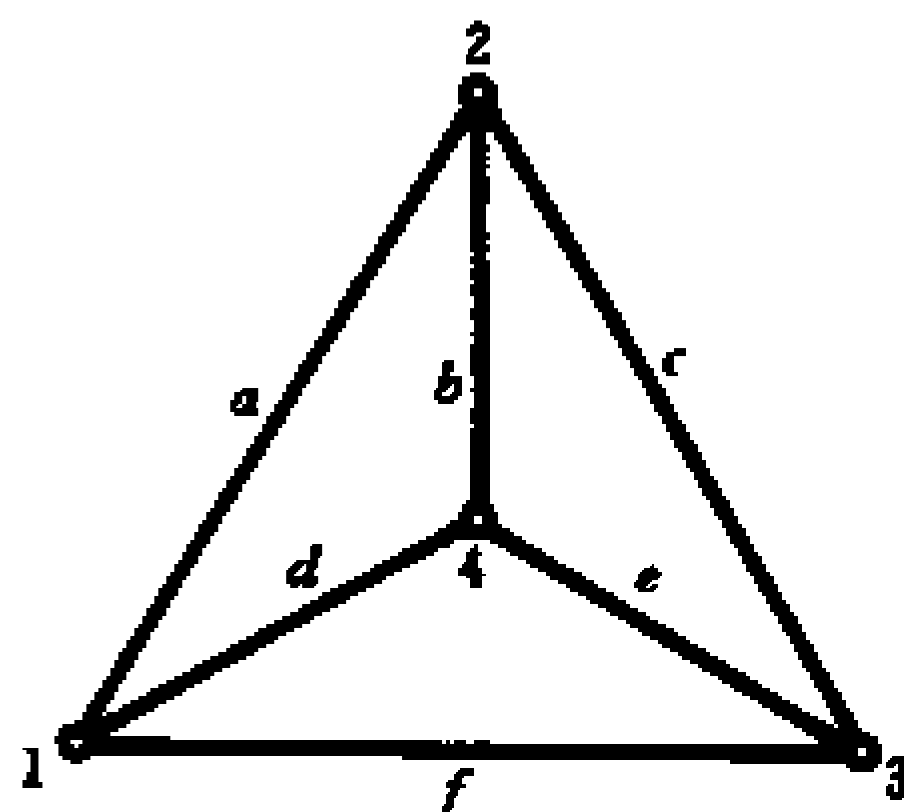
6-4 试求图关于生成树 $T_1=\{a,b,c,d,e\}$，和生成树 $T_2=\{e,f,g,h,i\}$的基本圈矩阵和基本割集矩阵。

6-5 试就题 6-4 图所示的图 G，用关联集求出图 G 的完全割集矩阵。

6-6 写出图 G 的关联矩阵，并由关联矩求出该图的基本圈矩阵和基本割集矩阵。



题 6-4 图



题 6-6 图

6-7 给定两个关联矩阵 M_1 和 M_2，试分别找出其对应的完全关联

矩阵，并画出相应的图 G_1 和 G_2：

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6-8　设 G 为连通图，取生成树 T，对应此生成树的基本圈矩阵 B_f 为

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

求基本割集矩阵。

6-9　连通图 G 的一个基本圈矩阵 B_f 是

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

不用画图，判断下面的叙述是否正确？

(1) $\{b,c,e,f\}$是一棵生成树

(2) $\{a,c,e,f\}$也是一棵生成树

(3) $\{a,b,e,g\}$为割集

(4) $\{b,f,c\}$也是割集

(5) $\{a,b,c,d,g\}$为圈

(6) $\{a,c,d,e,g\}$也是圈

6-10　证明定理 6.1.3

6-11　证明定理 6.2.1

6-12　证明定理 6.3.2

6-13　证明：设 M 是一个有 p 个顶点和 $p-1$ 条边的图的关联矩阵，当且仅当 M 是非奇异时，该图才是一棵树。

6-14　设 A 是连通图 G 的邻接矩阵，对 A 能说点什么？

(1) v_i 是一个割点

(2) (v_i,v_j)是一条割边

6-15　设图 G 的特征多项式为

$$P(G,\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$$

证明：

(1) $C_1=0$

(2) $-C_2$ 等于 G 的边数

(3) $-C_3$ 等于 G 中三角形数目的二倍

6-16　设图 G 的特征多项式为

$$P(G,\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$$

证明：连通图 G 有 m 个不同的特征值，G 的直径为 d，则 $m>d$。

第七章 连 通 性

图的连通度是图论中的重要概念之一，图的许多性质和图的连通度有着密切的关系。我们知道，具有割点或割边的连通图，去掉割点或割边图就不连通。没有割点或割边的连通图则要去掉几个顶点或几条边，图才不连通。在一个没有割点或割边的连通图中至少要去掉几个顶点或几条边，图才不能连通呢？或者说，最多去掉几个顶点或几条边，仍能保持图的连通性。本章讨论图的连通度的概念和 2—连通图的若干性质。

7.1 连通度和边连通度

在图 7.1-1 所示的四个 5 阶图中，G_1 是树。树的任一条边都是割边，且度大于 1 的顶均为割点，因此树是具有最小连通度的图，在图 G_2 中有一个割点而没有割边，因此，在 G_2 中去掉一个割点或一个以上的其他顶点，图才可能不连通；在 G_3 中没有割点和割边。因此，在 G_3 中要去掉两个以上的顶点

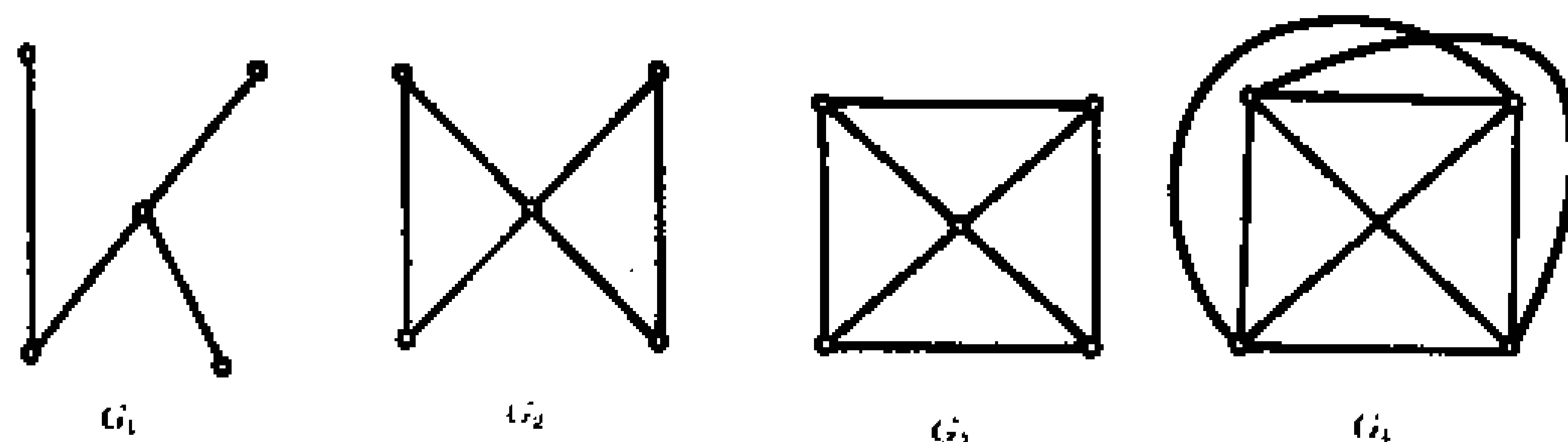


图 7.1-1

或边，图才可能不连通。尽管如此，从图 7.1-1 中可以看出，G_3 的连通程度没有 G_4 好。

我们从直观上看出图 7.1-1 所示的四个图中，右边的比左边的图连通的"程度"要好。那么怎样来衡量一个图的连通程度呢？下面我们来讨论这个问题。

我们先来回忆一下断集的概念。图 $G=(V,E)$ 的断集 S 是一个形如 $E(V_1\times\overline{V}_1)$（$V_1$ 是 $V(G)$ 的一个非空子集）的边集。在 G 中去掉 S 的所有边后，图 G 不连通，即 G-S 是分离图。如果 S 是只含有一条边的集合，那 S 就是割边，因此我们可以把断集看成是割边的推广。

若 $V(G)$ 的一个子集 T，使 G-T 不连通或是平凡图，则称 T 是 G 的一个**顶点割**(Vertex cut)。如果顶点割 T 是只含有一个顶点的集合时，便回到割点的概念。因此顶点割是割点的推广。

例如，在图 7.1-1 所示的图中，诸如{5}，{1,5}，{1,2,5}，{1,2,3,4}等等都是 G_2 的顶点割，顶点割{5}是割点。显然，图的连通程度与顶点割和断集中含有的元素的个数有着密切的关系。

定义 7.1.1 设 G 是连通图，称数

$$\kappa(G) = \min\{|T|, T \text{ 是 } G \text{ 的项点割}\}$$

$$\lambda(G) = \min\{|S|, S \text{ 是 } G \text{ 的断集}\}$$

分别为 G 的(点)**连通度**(Vertexcomectivity)和**边连通度**(edge comnectivity)。

图的(点)连通度我们常常省略"点"字称连通度。图的连通度和边连通度是用来衡量图的连通程度的两个参数。由定义 7.1.1 知，图的连通度是图的所有顶点割中含有顶点个数最少的顶点割的元素的个数；边连通度则是 G 的所有断集

(自然包括割集)中含有边数最少的断集的元素的个数。例如,在图 7.1-1 中,对图 G_1 和 G_2,有

$$\kappa(G_1)=1,\lambda(G_1)=1$$

$$\kappa(G_2)=1,\lambda(G_2)=2$$

显然,如果 G 是平凡的或是非连通时 $\kappa(G)=0$;如果是平凡的定义 $\lambda(G)=0$. 那么当 G 是平凡的或非连通时 $\lambda(G)=0$。

对于完全图 K_p,去掉其中任意 $r(r<p)$ 个顶点,图仍然连通,只有去掉 $p-1$ 个顶点后,图变成平凡图,因此 $\kappa(K_p)=p-1$。

定理 7.1.1 对一个图 G,有

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G) \qquad (7.1\text{-}1)$$

其中 $\delta(G)$ 是图 G 的顶点的最小度。

[证明] 设 v 是 G 中度最小的顶点,即 $\deg v=\delta(G)$。显然,v 是图 $G\text{-}S(v)$($S(v)$ 是 v 的关联集)的一个孤立点。于是

$$\lambda(G)\leqslant|S(v)|=\delta(G)$$

下面对 λ 用归纳法证明 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)$。

当 $\delta(G)=0$ 或 1 时,显然 $\kappa(G)=\lambda(G)$。

若对所有 $\lambda(G)=\lambda_0\geqslant2$ 的图 G,有 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)$。今设 $\lambda(H)=\lambda_0+1$,T 是 H 的一个断集,且 $|T|=\lambda_0+1$。若边 $e=(u,v)\in T$,易知 $\lambda(H-e)=\lambda_0$ 故 $H-e$ 有一个顶点割 S,$|S|\leqslant\lambda_0$ 但此时 $S\cup\{u\}$ 就是 H 的一个顶点割,即

$$\kappa(H)\leqslant|S\cup\{u\}|\leqslant\lambda_0+1=\lambda(H)$$

由归纳法原理知,对任何 λ,(7.1-1)式成立。▮

定理 7.1.2 对任何图 G,有

$$\kappa(G)\leqslant\left[\frac{2q}{p}\right],\lambda(G)\leqslant\left[\frac{2q}{p}\right] \qquad (7.1.\text{-}2)$$

[证明] 由定理 1.3.1 有

$$\frac{1}{p}\sum_{v\in V(G)}\deg(v) = \frac{2q}{p}$$

上式左端是顶点度的算术平均值，故

$$\min_{v\in V(G)} \deg(v) \leqslant \frac{1}{p}\sum_{v\in V(G)}\deg(v)$$

于是

$$\delta(G) \leqslant \frac{2q}{p}$$

因为 $\delta(G)$ 只能取整数，并由定理 7.1.1，有

$$\kappa(G) \leqslant \left[\frac{2q}{p}\right], \lambda(G) \leqslant \left[\frac{2q}{p}\right] \quad \blacksquare$$

定理 7.1.3 设 G 为 p 阶图，若 $\delta(G)\geqslant\left[\frac{p}{2}\right]$，则

$$\lambda(G) = \delta(G) \tag{7.1-3}$$

［证明］ 显然 G 是连通的。设 S 是 G 的断集 $|S|=\lambda(G)$。G_1 和 G_2 是 $G-S$ 的两个分支，不妨设 $|V(G_1)|=p_1\leqslant\left[\frac{p}{2}\right]$。

若 $p_1=1$，设 $V(G)=\{v\}$，则

$$\lambda(G) = |S| = \deg(v) \geqslant \delta(G)$$

再由(7.1-1)式有 $\lambda(G)=\delta(G)$

若 $p_1\geqslant2$，考虑 G_1 中各顶点在 G 中的度的和 Σ_1。

一方面，由 $\delta(G)$ 的定义，有

$$\Sigma_1 \geqslant p_1\delta(G) \tag{7.1.-4}$$

另一方面，分别考虑 G_1 和 S 中的边，有

$$\Sigma_1 \leqslant p_1(p_1 - 1) + \lambda(G) \leqslant p_1(p - 1) + \delta(G) \tag{7.1-5}$$

由(7.1-4)和(7.1-5)两式，得

$$p_1\delta(G) \leqslant p_1(p_1 - 1) + \lambda(G) \leqslant p_1(p_1 - 1) + \delta(G)$$

在上面不等式的每一项中减去 $\delta(G)$，然后除以 $p-1$，再由定

理的假设，得

$$\left[\frac{p}{2}\right] \leqslant \delta(G) \leqslant p_1 + \frac{\lambda(G_1) - \delta(G)}{p_1 - 1} \leqslant p_1 \leqslant \left[\frac{q}{2}\right]$$

于是

$$\lambda(G) = \delta(G) = p_1 = \left[\frac{q}{2}\right] \quad \blacksquare$$

定义 7.1.2 如果 $\kappa(G) \geqslant h$，则称 G 是 **h-连通的**；如果 $\lambda(G) \geqslant f$，则称 G 是 **f-边连通的**。

显然，所有的非平凡图都是 1-连通的和 1-边连通的。p 阶完全图是 $(p-1)$-连通的。由定义知，若 $h_1 > h_2$，那么 h_1-连通的必是 h_2-连通的；若 $f_1 > f_2$，则 f_1 一边连通的必是 f_2 一边连通的。

定理 7.1.4 设图 G 是 h-连通的，则 G 的每个顶点的度均 $\geqslant h$。

[证明] 设 v 是 G 的一个顶点，如果 $\deg(v) = h-1$，即 v 与 $h-1$ 条边关联．设与 v 邻接的 $h-1$ 个顶点构成集合 T，因为 G 是 h-连通的，故有

$$h - 1 \leqslant (p-1) - 1 = p - 2$$

这就是说，在 G 中存在一个顶点，异于 v 且不在 T 内，于是 T 是一个顶点割，因 $|T| = h-1 < h$，故 G 不是 h一连通的，与假设矛盾。 $\blacksquare$

定理 7.1.5 设图 G 是 h-连通的，v 是 G 中的一个顶点，则 $G-v$ 是 $(h-1)$ 连通的。

[证明] 由 $h \leqslant p$，有

$$h - 1 \leqslant p - 1$$

又，为了使 $G-v$ 分离，则至少要去掉 $h-1$ 个顶点，故 $G-v$ 是 $(h-1)$-连通的。 $\blacksquare$

7.2 2-连通图

在2.2中我们曾定义过不可分图，这一节我们来进一步讨论不可分图的一些性质。

定义7.2.1 图的一个最大不可分子图称为图G的一个**块**(block)。

若图G是不可分的，G本身就常常称为一个块。

下面的定理是显然的。

定理7.2.1 图G是不可分的，当且仅当G是2-连通的。

定义7.2.2 设P,Q是图G的两条(u,v)道路。如果除端点u,v外，P和Q没有其他公共顶点，则称P和Q是**内部不相交的**。

定理7.2.2 设G是$p>3$的图，G是2-连通的充要条件是G的任意两个顶点至少由两条内部不相交的道路所连通。

[证明] 充分性。若G的任意两个顶点至少由两条内部不相交的道路所连通。显然，G是连通的，并且没有割点，因此G是2-连通的。

必要性。设G是2-连通的，u,v是G中的任意两个顶点。我们对u,v间的距离$d(u,v)$用归纳法。

当$d(u,v)=1$时，由于G是2-连通的，所以$e=(u,v)$不是割边。由定理2.2.1知，e包含在某一圈中，于是u,v由两条内部不相交的道路所连通。

假设距离小于k的任意两个顶点定理成立，并设$d(u,v)=k>2$。

我们来考察一条长为k的(u,v)道路。设w是这条道路上顶点v前面那个顶点(图7.2-1)。

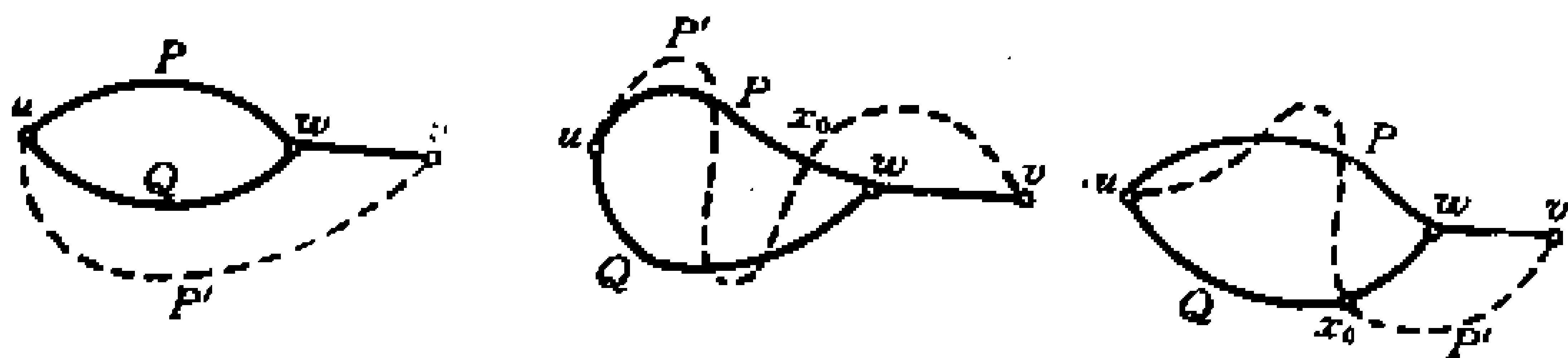


图 7.2-1

因为 $d(u,w)=k-1$，由归纳法的假设，在 G 中至少有两条内部不相交的 (u,w) 道路，记作 P 和 Q。因为 G 是 2-连通的，所以 $G-w$ 是连通的(定理 7.1.5)。因此，在 $G-w$ 中存在一条 (u,v) 道路 P'，道路 P' 与道路 P,Q 间的关系无非是图 7.2-1 中所示的三种情况，其中 x 是 P' 中的与 v 最近且在 $P\cup Q$ 上的顶点(因为 u 在 $P\cup Q$ 中，所以这样一个顶点 x 是存在的)。假如 x 在 P 中(图 7.2-1(*b*))。于是 G 有两条内部不相交的 (u,v) 道路：一条是由 P 的 (u,x) 节和 P' 的 (x,v) 节组成，另一条是由 Q 和边 (w,v) 组成。对于其他两种情况，同样可以找出两条内部不相交的 (u,v) 道路。▮

定理 7.2.3 若 G 是 2-连通的，则 G 的任意两个顶点都位于同一个圈上。

[证明] 由定理 7.2.2 知，若 G 是 2-连通的，那么 G 中的任意两个顶点至少有两条内部不相交的道路。又当且仅当两个顶点由两条内部不相交的道路连通的，该两个顶点才在同一条圈上，于是若 G 是 2-连通的，则 G 的任意两个顶点均在同一个圈上。▮

定理 7.2.4 若 G 是 $p\geqslant 3$ 的一个 2-连通图，则 G 的任意两条边都在同一个圈上。

[证明] 设 G 是一个 $p\geqslant 3$ 的 2-连通图，并且 e_1 和 e_2 是 G 的两条边。在 G 中去掉 e_1，并用一条连接它的两个端点的长

为 2 的道路代替，这条道路的那个内部顶点是一个新的顶点，记为 v_1；同样去掉 e_2 边，并用一条连接 e_2 的两个端点的长为 2 的道路来代替．记这条道路的内部顶点为 v_2，这样我们得到一个图 G'（图 7.2-2）。

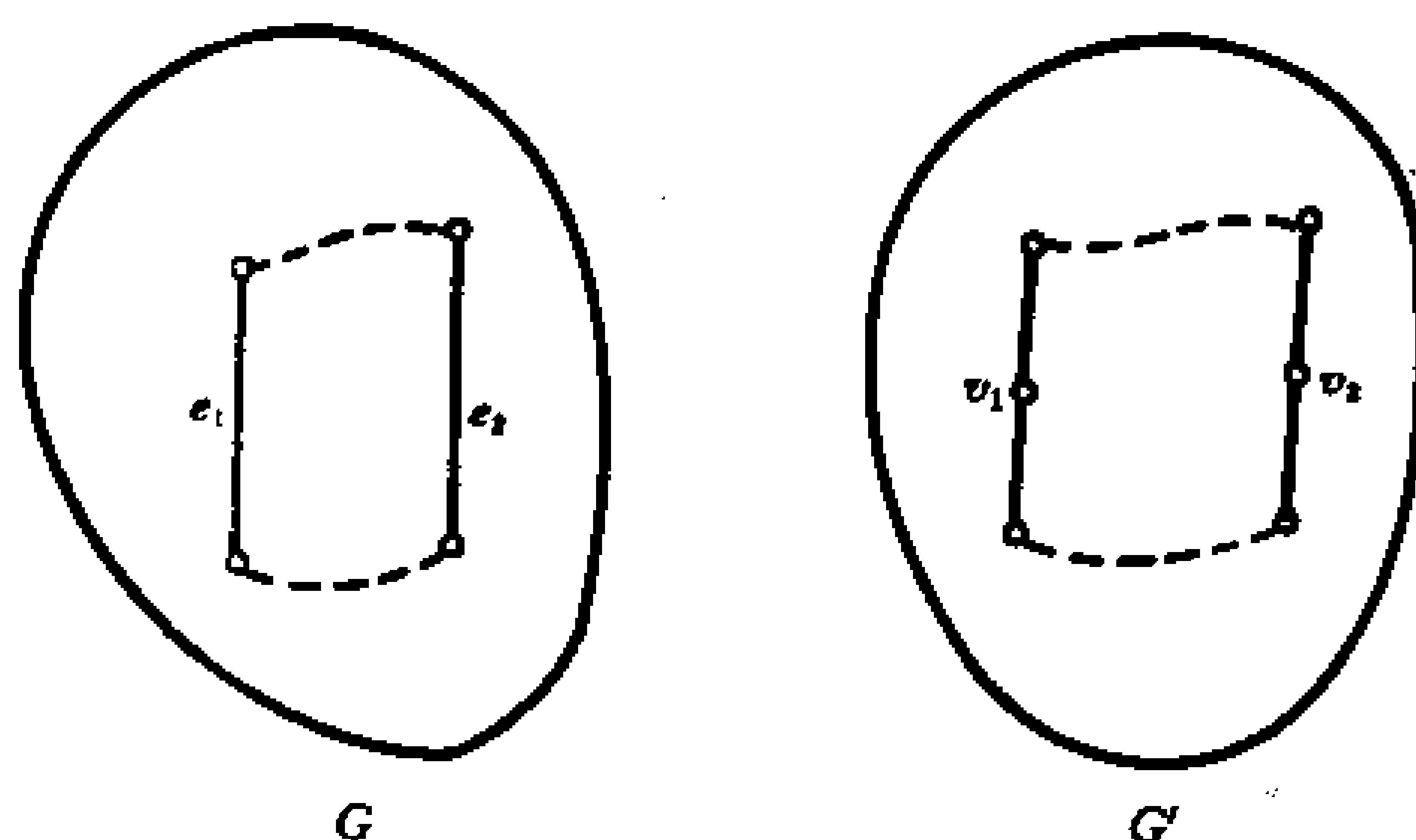


图 7.2-2

显然，G'是一个至少有五个顶点的 2-连通图，由定理 7.2.2知，v_1 和 v_2 在 G'的同一个圈上，于是 e_1 和 e_2 在 G 的同一个圈上。▌

综上所述，对于一个无环且无孤立点的图 G，下面的条件是等价的：

(1) 图是不可分的；

(2) 图是 2-连通的；

(3) 过任意两个顶点总有一个圈；

(4) 过任意两条边总有一个圈。

习 题 七

7-1 对下列二图作出两个顶点割

7-2 确定上题中两个图的连通度和边连通度。

7-3 试作出一个连通图 G，使之满足等式

$\kappa(G)=\lambda(G)=\delta(G)$

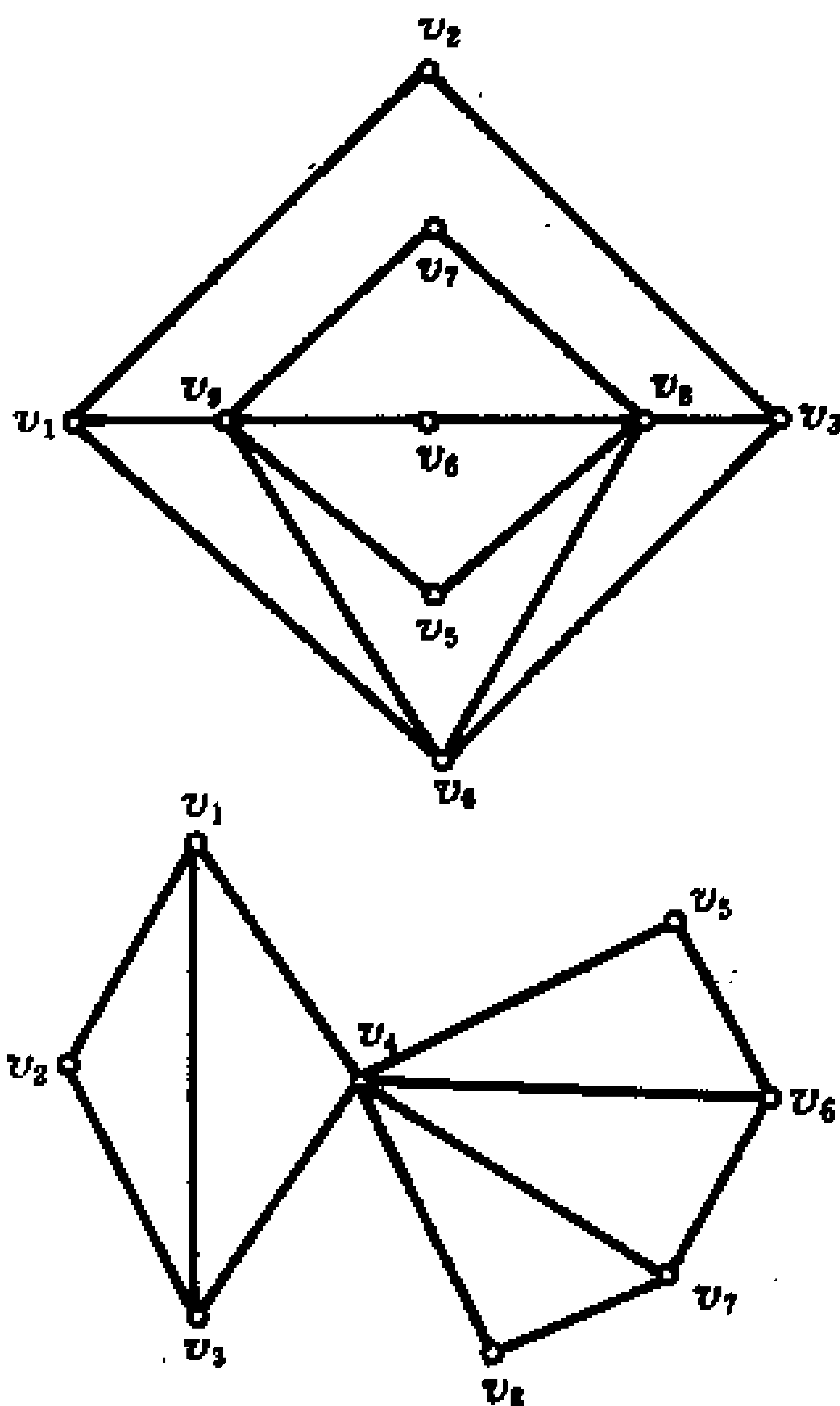
7-4 证明：当且仅当某图的任意两个顶点由至少两条边不重的道路所连接时，此图才是 2-边连通的。

7-5 证明定理 7.2.1

7-6 证明：若 G 是 f-边连通的，且 $f>0$，E' 是 G 的 f 条边的集合，则 $\kappa(G-E')\leqslant 2$。

7-7 证明：一个不是块的连通图 G，至少存在两个块，它们仅包含 G 的一个割点。

7-8 举例说明：若 P 是一条 2-连通图中的 (u,v) 道路，则 G 未必包含另一条与 P 内部不相交的 (u,v) 道路 Q。



题 7-1 图

7-9 证明：若 G 是 k-边连通的，则 $q\geqslant\frac{1}{2}kp$。

7-10 证明：若 G 是 k-边连通的，且 $k>0$，E' 是 G 的 k 条边的集合，则 $\kappa(G-E')\leqslant 2$。

第八章 匹　　配

这一章讨论匹配和完美匹配。"匹配"是图论中的一个重要内容，也是图论的一个活跃的研究领域。匹配在所谓"人员分配问题"和"最优分配问题"中有重要应用。

8.1 最大匹配

定义 8.1.1 设 M 是 $E(G)$ 的一个子集，如果 M 中任意两条边在 G 中均不邻接，则称 M 是 G 的一个**匹配**(matching)。M 中的一条边的两个端点叫做在 M 下是**配对的**(matched)。

定义 8.1.2 若匹配 M 的一条边与顶点 v 关联，则称 M **饱和**(saturates)顶点 v，并且称 v 是 **M-饱和的**(M-saturates)，否则称 v 是 **M 不饱和的**(unsaturated)。

定义 8.1.3 如果图 G 中没有另外的匹配 M'，使 $|M'|>|M|$，则称 M 是**最大匹配**(maximumaching)。

例 8.1.1 在图 8.1-1 所示的图 G 中，给出图 G 的一个匹配和最大匹配(图中分别用粗线表示)。

定义 8.1.4 设 M 是 G 的一个匹配，其边在 $E(G)\setminus M$ 和 M 中交错出现的道路，称为 G 的一条 **M-交错道路**(M-alternating path)。起点和终点都是 M-不饱和的 M-交错道路，称为 **M-增广道路**(M-augmenting path)。

例如，图 8.1-2 所示的图中，$v_1v_2v_4v_5v_7v_8$ 是一条 M-增广

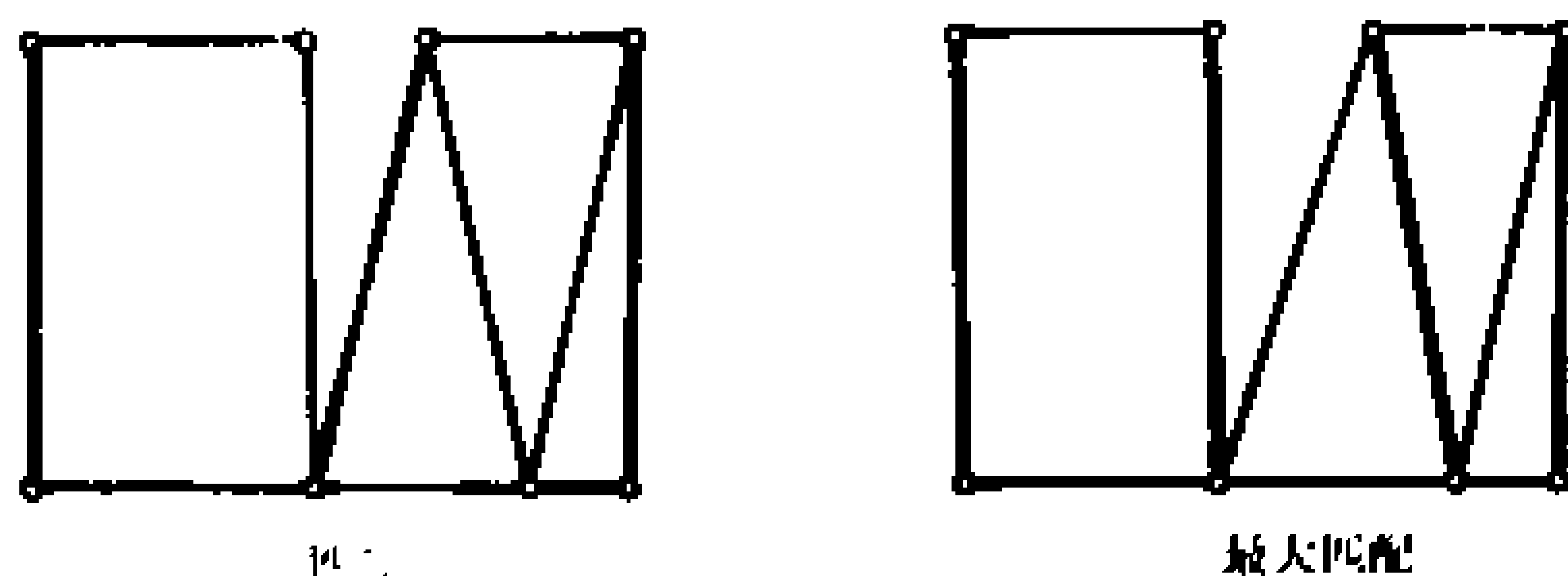


图 8.1-1

道路，$v_2v_4v_5v_7v_9v_1$ 是一条 M-交错道路（图中的粗线表示 G 的一个匹配 M）。

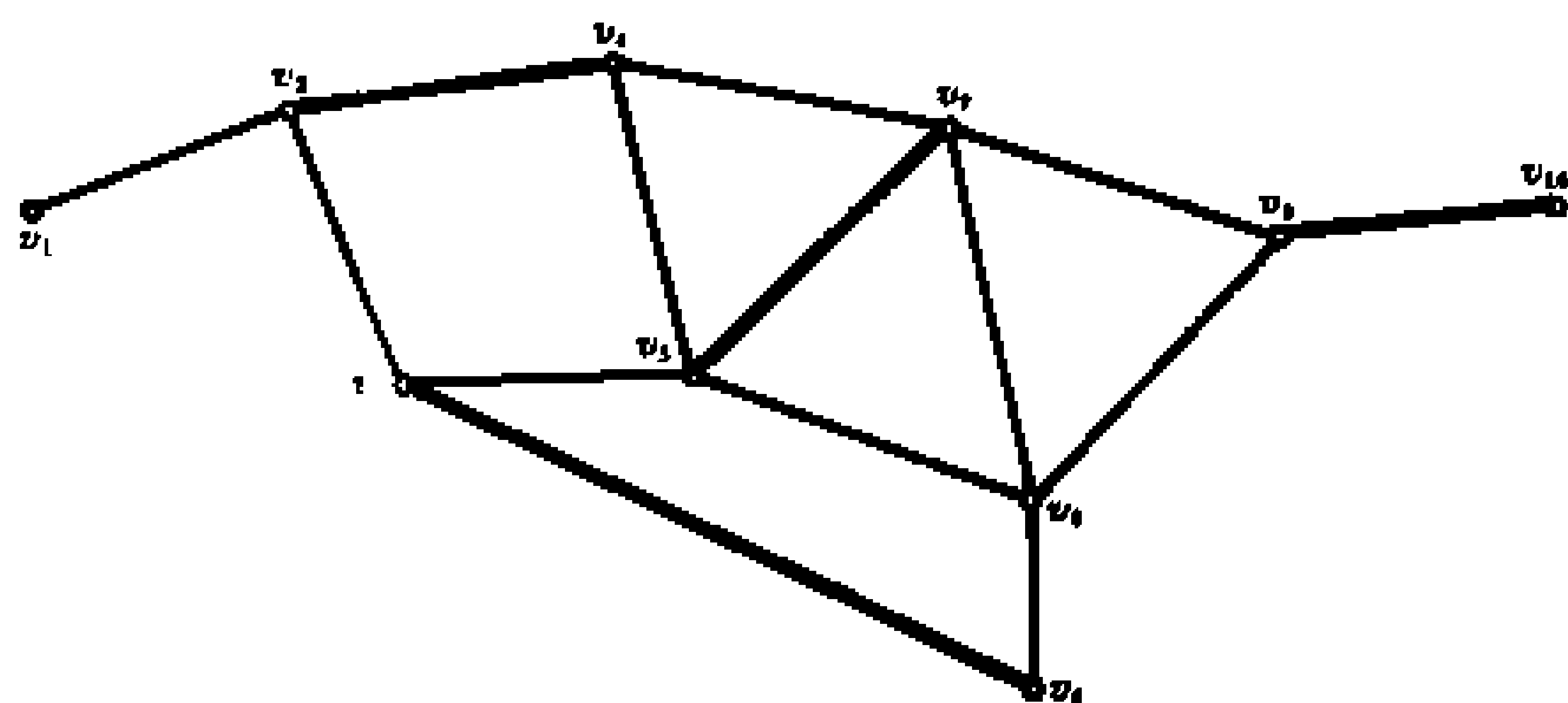


图 8.1-2

定理 8.1.1 图 G 的一个匹配 M 是最大匹配的充要条件是 G 不包含 M-增广道路。

［证明］ 设 M 是 G 的一个匹配，并设 G 包含一条 M 增广道路 $v_0v_1\cdots v_{2m+1}$。设

$$M' = (M\setminus\{(v_1,v_2),(v_3,v_4),\cdots,(v_{2m-1},v_{2m})\})$$
$$\cup\ \{(v_2,v_3),\cdots(v_{2m},v_{2m+1})\}$$

显然，$M'\subseteq E(G)$，且 M' 是 G 的一个匹配。因 $|M'|>|M|+1$，所以 M 不是最大匹配。

反之，假设 M 不是最大匹配，且令 M' 是 G 的一个最大匹

配，那么

$$|M'| > |M| \quad (8.1\text{-}1)$$

设 H 是由 $M \oplus M'$ 导出的 G 的子图，那么 H 的每个顶点在 H 中的度不是 1 就是 2。因为它最多只能和一条 M 的边以及 M' 的边关联。因此，H 的每个分支或是一条边在 M 和 M' 中交错的偶圈，或是一条边在 M 和 M' 中交错的道路。由式(8.1-1)，H 包含的 M' 的边多于 M 的边，因而必定有 H 的一条道路 P 开始于 M' 的边且终止于 M' 的边。故在 H 中被 M' 所饱和的 P 的起点和终点在图 G 中就是 M-不饱和的，于是 P 是 G 的一条 M-增广道路。∎

定理 8.1.2 设 M_1 和 M_2 是简单图 $G=(V,E)$ 的两个匹配。记 $G'=(V',E')$ 是以 $M_1 \oplus M_2$ 为边集的边导出子图，那么 G' 的每一个分支是下列情况之一：

(1) 边在 M_1 和 M_2 中交错出现的偶圈

(2) 边在 M_1 和 M_2 中交错出现的道路其端点在 M_1 或 M_2 中不饱和。

[证明] 对任意顶点 $v \in V(G')$

情况 1：$v \in V(M_1 - M_2)$ 和 $v \notin V(M_2 - M_1)$

在这情况下，v 是 $M_1 - M_2$ 中边的端点。因为 M_1 是匹配，所以 $M_1 - M_2$ 没有其他的边与 v 关联进而没有 $M_2 - M_1$ 中的边与 v 关联，因为 $v \notin V(M_2 - M_1)$。于是在这种情况下 G' 中的顶点 v 的度等于 1。

情况 2：$v \in V(M_1 - M_2)$ 和 $v \in V(M_2 - M_1)$。

在这种情况下，$M_1 - M_2$ 和 $M_2 - M_1$ 中均有唯一的一条边与 v 关联，因此 v 的度等于 2。

综上所述，G' 中的最大度是 2。因此 G' 的分支必是定理中所述的两者之。∎

8.2 二部图的匹配和覆盖

定义 8.2.1 设 V_0 是图 G 的任一顶点子集，G 中与 V_0 的顶点邻接的所有顶点的集合，称为 V_0 的**邻集**(neighbour set)，记作 $N_G(V_0)$。

设 G 是有二分划 (V_1, V_2) 的一个二部图。在许多应用中总是希望能找到 G 的一个匹配，使它饱和 V_1 的每个顶点。

定理 8.2.1 设 G 是有二分划 (V_1, V_2) 的二部图，则 G 含有饱和 V_1 的每个顶点的匹配的充要条件是，对所有的 $V_0 \subseteq V_1$

$$|N_G(V_0)| \geqslant |V_0| \tag{8.2-1}$$

[证明] 设 G 含有匹配 M，它饱和 V_1 的每个顶点，并设 V_0 是 V_1 的一个子集。由于 V_0 的顶点在 M 下和 $N_G(V_0)$ 中相异顶点配对，故 $|N_G(V_0)| > |V_0|$。

反之，假设 G 是满足(8.2-1)式的二部图，但不含饱和 V_1 的所有顶点的匹配。设 M^* 是 G 的一个最大匹配，根据假设，M^* 不饱和 V_1 的所有顶点。设 u 是 V_1 的一个 M^*-不饱和顶点，并设 Q 表示通过 M^*-交错道路与 u 连接的所有顶点的集合。由于 M^* 是最大匹配，由定理 8.1.1 知，u 为 Q 中唯一的 M^* 不饱和顶点。

设 $V_0 = Q \cap V_1$，$V_0' = Q \cap V_2$(图 8.2-1)。

显然，$V_0 \backslash \{u\}$ 中的顶点，在 M^* 下与 V'_0 中的顶点配对。因此，

$$|V'_0| = |V_0| - 1 \tag{8.2-2}$$

和

$$N_G(V_0) = V_0'$$

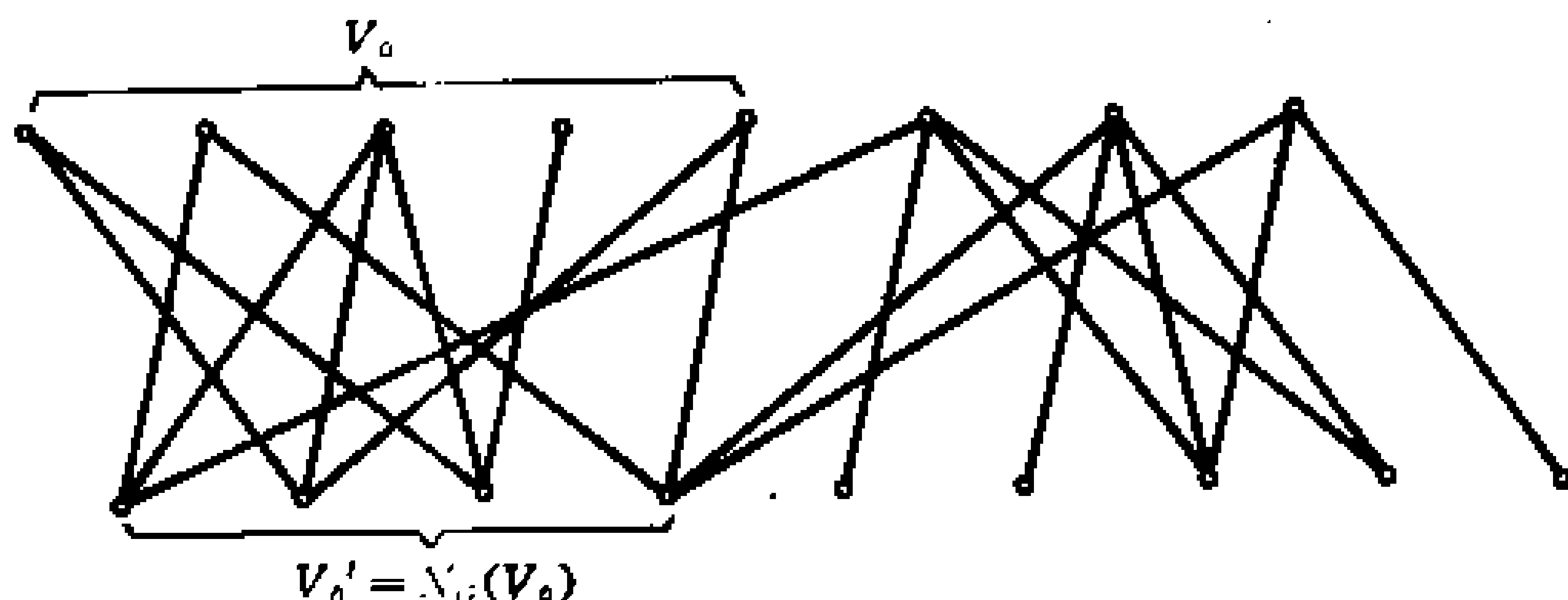


图 8.2-1

实际上，我们有

$$N_G(V_0) = V_0' \tag{8.2-3}$$

这是因为 $N_G(V_0)$ 中的每个顶点均通过一个 M^*-交错道路连接于 u。但是(8.2-2)和(8.2-3)都蕴含着

$$|N_G(V_0)| = |V_0| - 1 < |V_0|$$

这与(8.2-1)式矛盾。▌

定理 8.2.2 设 $G=(V_1,V_2;E)$是一个二部图。M_i 是子集 $X_i \subseteq V_1$ 中的顶点与子集 $Y_i \subseteq V_2$ 中的顶点配对的匹配($i=1,2$)。那么存在一个匹配

$$M' \subseteq M_1 \cup M_2$$

饱和 X_1 和 Y_2。

［证明］ 考虑二部图 $G'=(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2; M_1 \cup M_2)$。那么 G' 中的顶点的度是 1 或 2。这是因为，这个图的每个分支不是道路就是边在 M_1 和 M_2 中交错出现的圈(参看定理 8.1.2 的证明)。

对$\forall\ y \in Y_2 - Y_1$ 它在 G' 中的度为 1。这样，分支是一条从顶点 y 到顶点 $x \in X_2 - X_1$ 或到顶点 $z \in Y_1 - Y_2$ 的道路 P_y。在

前一种情形，P_y 的最后一条边在 M_2 中，于是 $M_1 \oplus P_y$ 中的边使 $X_1 \cup \{x\}$ 和 $Y_1 \cup \{y\}$ 中的顶点配对。在后一种情形，P_y 的最后一条边在 M_1 中且 $M_1 \oplus P_y$ 使 X_1 与 $(Y_1 - z) \cup \{y\}$ 中的顶点配对。总之，$M_1 \oplus P_y$ 饱和 $Y_1 \cap Y_2$。于是 $M_1 \oplus P_y$ 饱和 $y \in Y_2 - Y_1$ 和 X_1 中的所有顶点以及 $Y_1 \cap Y_2$。

设

$$P = \bigcup_{y \in Y_2 - Y_1} P_y$$

那么 $M_1 \oplus P$ 是饱和 X_1 和 X_2 的匹配。这就是所要求的匹配 $M' \subseteq M_1 \cup M_2$。▮

定理 8.2.3 设 $G=(V_1, V_2; E)$ 是一个二部图，那么在 G 中存在一个匹配饱和 G 中所有最大度的顶点。

［证明］ 设 $X \subseteq V_1, Y \subseteq V_2$ 且包含 G 中所有最大度的顶点。那么存在一个匹配 M_1，饱和 X 中的顶点和存在一个匹配 M_2，饱和 Y 中的顶点。根据定理 8.2.2，存在匹配 $M' \subseteq M_1 \cup M_2$ 饱和 X, Y 的所有顶点。因此，M' 就是饱和 G 中所有最大度顶点的匹配。▮

定理 8.2.4 具有最大度为 Δ 的二部图 $G=(V_1, V_2; E)$ 其边集可分解成 Δ 个匹配。

［证明］ 根据定理 8.2.3，存在一个饱和所有度为 Δ 的匹配 M_1，那么 $G' = (V_1, V_2; E - M_1)$ 则是具有最大度为 $\Delta - 1$ 的二部图，因而有饱和全部度为 $\Delta - 1$ 的顶点的匹配 M_2，继续这个过程，我们可以构造一个边不相交的匹配序列 M_1，$M_2, \cdots, M_\Delta$，这就是 G 的边集的一个分解。▮

下面我们引进一个与匹配有着密切关系的所谓图的覆盖。

定义 8.2.2 设 K 是 $V(G)$ 的一个子集，如果图 G 的每

条边至少都有一个端点在 K 中，则称 K 是 G 的一个**覆盖**(covering)。

如果 G 中没有适合 $|K'|<|K|$ 的覆盖 K'，则称 K 是 G 的**最小覆盖**(minimun covering)。最小覆盖中元素的个数记作 β_0。

图 8.2-2 中分别给出一个图的覆盖和最小覆盖。

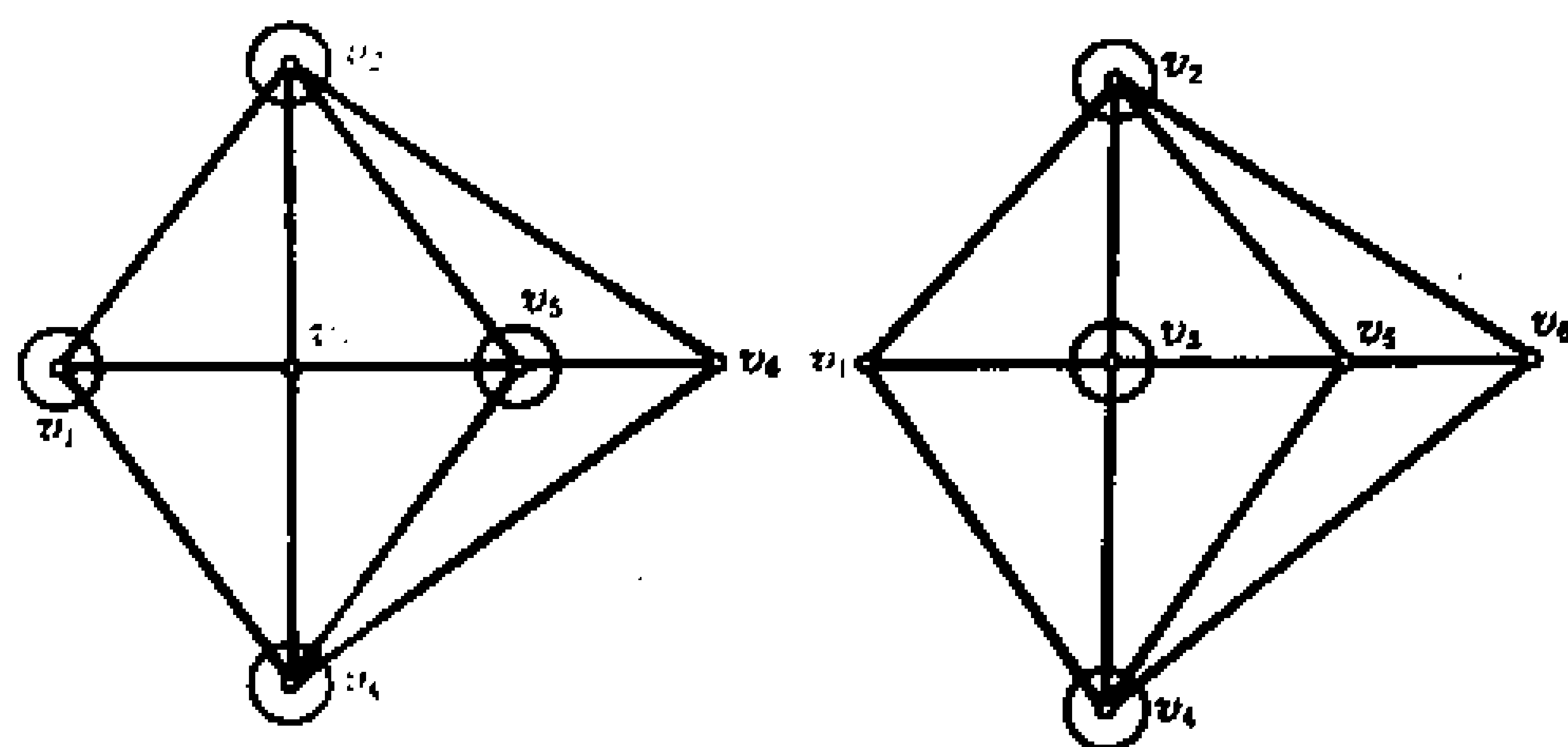


图 8.2-2

点集 $\{v_1v_2v_4v_5\}$ 是一个覆盖，点集 $\{v_2v_3v_4\}$ 是一个最小覆盖。

若 K 是 G 的一个覆盖，M 是 G 的一个匹配，则 K 至少含有 M 中每条边的一个端点。于是，对任何匹配 M 和任何覆盖 K，均有 $|M|\leqslant|K|$。实际上，若 M^* 是一个最大匹配，$\tilde{K}$ 是一个最小覆盖，则

$$|M^*|\leqslant|\tilde{K}| \tag{8.2-4}$$

下面我们来证明关于最大匹配和最小覆盖的一个定理。

定理 8.2.5 设 M 是一个匹配，K 是一个覆盖，它们满足 $|M|=|K|$，则 M 必定是最大匹配，K 必定是最小覆盖。

[证明] 若 M^* 是最大匹配，$\tilde{K}$ 是最小覆盖，则由(8.2-

4)式，有

$$|M| \leqslant |M^*| \leqslant |\tilde{K}| \leqslant |K|$$

由于$|M|=|K|$，所以$|M|=|M^*|$，$|\tilde{K}|=|K|$。∎

定理 8.2.6 在二部图 G 中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。

［证明］ 设 G 是具有二分划(V_1,V_2)的二部图，M^* 是 G 的最大匹配。用 U 表示 V_1 中的 M^*-不饱和的顶点集合，用 Q 表示通过 M^*-交错道路与 U 中的顶点相连接的所有顶点的集合。

设 $V_0=Q\cap V_1$，$V_0'=Q\cap V_2$。和定理 8.2.1 的证明一样，可知 V_0 中的每个顶点都是 M^*-饱和的，并且 $N_G(V_0)=V_0'$。定义 $\tilde{K}=(V_1\backslash V_0)\cup V_0'$（图 8.2-3），则 G 的每条边必然至少有一个端点在 $\tilde{K}$ 中。因为否则就存在一条其一个端点在 V_1 中，而另一个端点在 $V_2\backslash V_0'$ 中的边，这与 $N_G(V_0)=V_0'$ 矛盾。于是

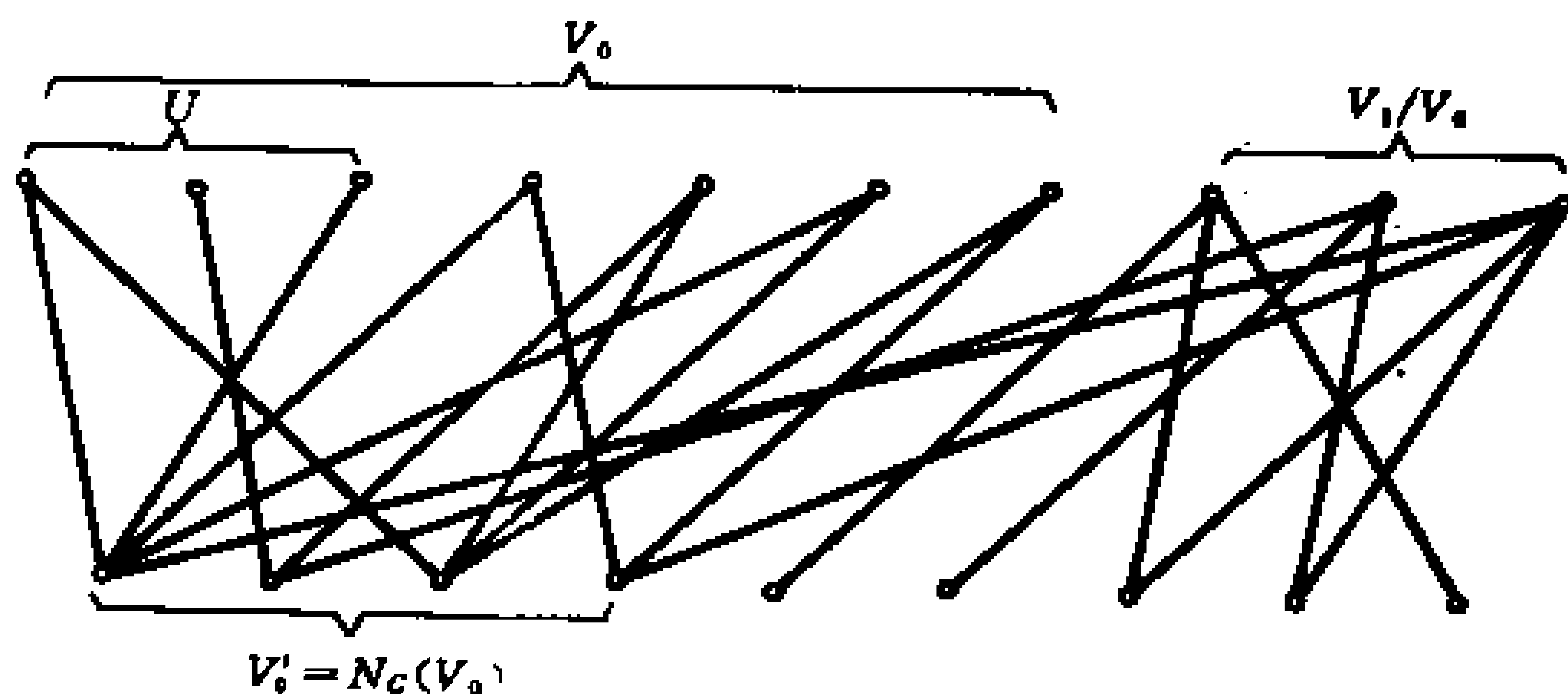


图 8.2-3

$\tilde{K}$ 是 G 的一个覆盖，并且显然有

$$|M^*| = |\tilde{K}|$$

由定理 8.2.5 知，$\tilde{K}$ 是最小覆盖。∎

8.3 完美匹配

定义 8.3.1 设 M 是图 G 的一个匹配，如果 G 的每一个顶点是 M-饱和的，则称 M 是**完美匹配**(perfect matching)。

例如，图 8.3-1 所示的图 G 中

$$M = \{(v_1,v_2),(v_3,v_4),(v_5,v_6),(v_7,v_8)\}$$

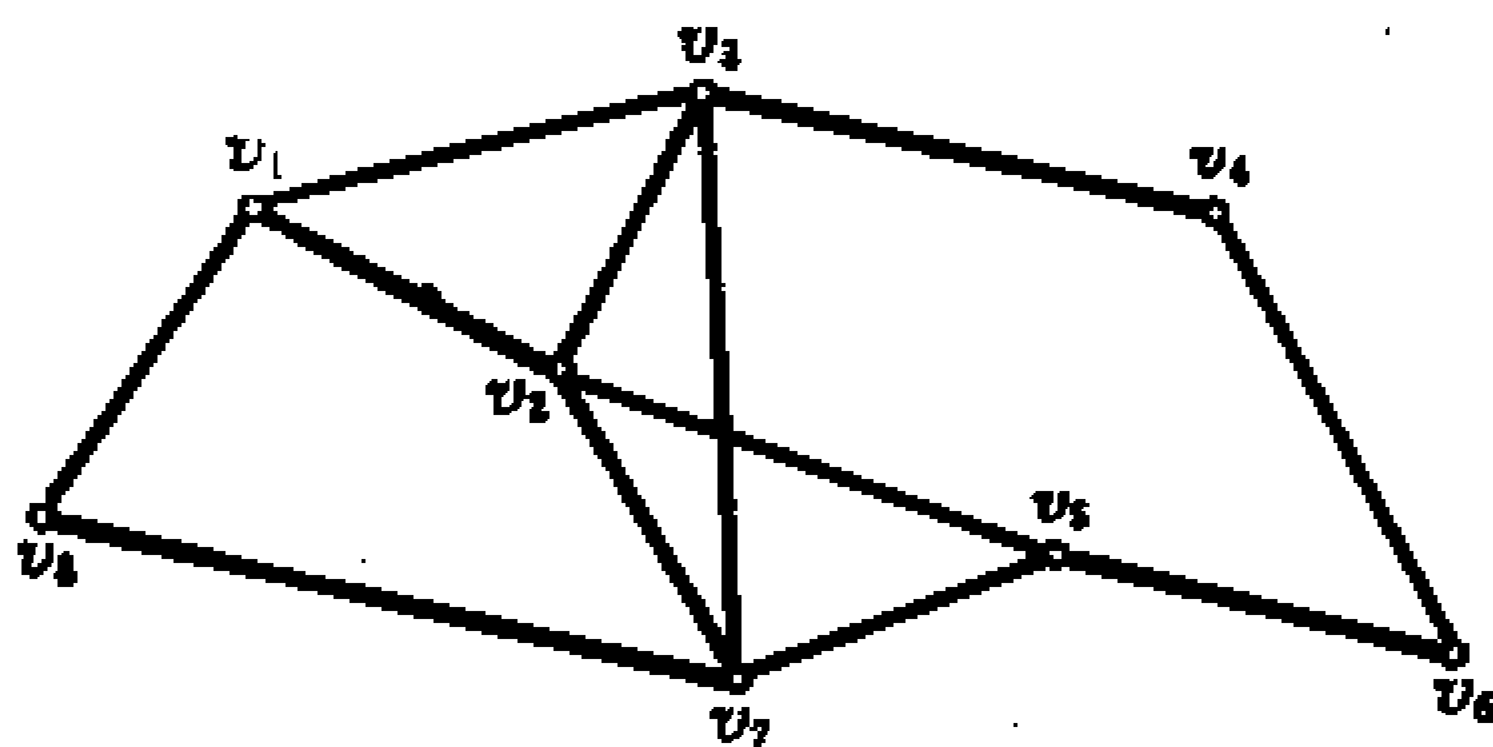


图 8.3-1

是一个完美匹配。

根据定理 8.2.1，可以证明下面的命题。

命题 8.3.1 若 G 是一个 k-正则二部图($k>0$)，则 G 有一个完美匹配。

[证明] 设 G 是一具有二分划(V_1,V_2)的 k-正则二部图($k>0$)，由于 G 是 k-正则的，$k|V_1|=|E|=k|V_2|$，并且由于 $k>0$，所以 $|V_1|=|V_2|$。设 V_0 是 V_1 的一个子集，并且用 E_1 和 E_2 分别表示与 V_0 和 $N(V_0)$中顶点关联的边集。根据 $N(V_0)$ 的定义，$E_1\subseteq E_2$，因而有

$$k|N(V_0)| = |E_2| \geqslant |E_1| = k|V_0|$$

由此可知

$$|N(V_0)| \geqslant |V_0|$$

再由定理 8.2.1 知，G 有一个对于 V_1 的每个顶点都饱和的匹配 M，由于 $|V_1|=|V_2|$，故 M 是一个完美匹配。 ▌

如果一个图的某个分支有奇数个顶点，则称为**奇分支**，如果有偶数个顶点，称为**偶分支**。我们用 $O(G)$表示 G 的奇分支的数目。我们有下面的定理：

定理 8.3.1 图 G 有完美匹配的充要条件是

$$O(G-V_0)\leqslant |V_0|，对所有的 V_0\subset V(G) \quad (8.3\text{-}1)$$

[证明] 显然，只要对简单图证明这个定理就行了。

首先假设 G 有一个完美匹配 M。设 V_0 是 $V(G)$的一个真子集，并设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 $G-V_0$ 的奇分支。因为 G_i 是奇分支，所以 G_i 的某一个顶点 u_i 一定在 M 下和 V_0 的一个顶点 V_i 配对(图 8.3-2)。

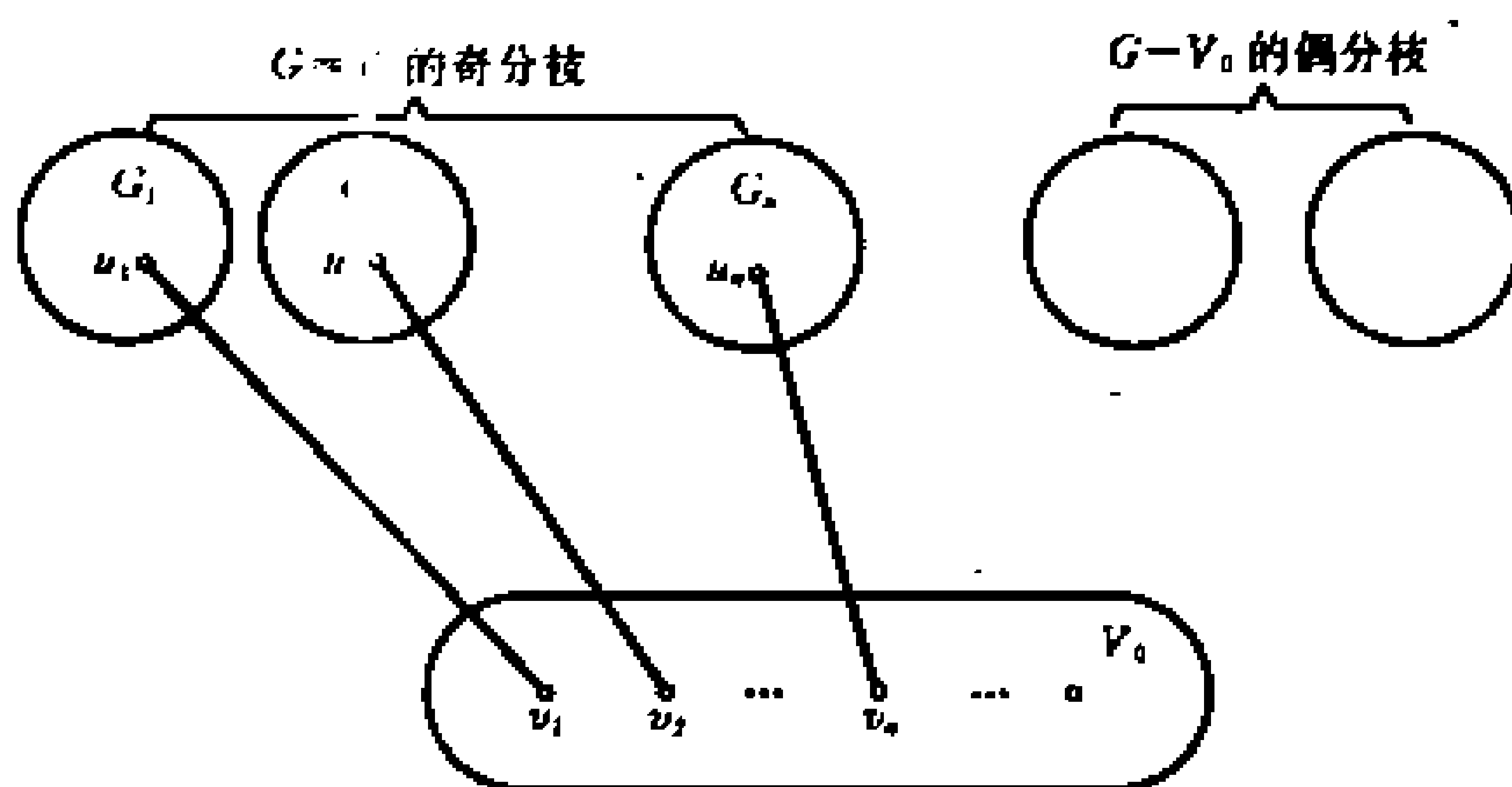


图 8.3-2

由于$\{v_1v_2,\cdots v_n\}\subseteq V_0$，因而有

$$O(G-V_0)=n=|\{v_1,v_2,\cdots v_n\}|\leqslant |V_0|$$

反之，假设 G 满足条件(8.3-1)，但没有完美匹配。那么 G 是没有完美匹配的最大图 G^* 的一个生成子图。由于 $G-V_0$ 是 G^*-V_0 的生成子图。我们有

$$O(G^*-V_0)\leqslant O(G-V_0)$$

且由(8.3-1)式，有

$$O(G^*-V_0)\leqslant |V_0|，对所有的 V_0\subset V(G^*) \quad (8.3\text{-}2)$$

特别地，设 $V_0=\varnothing$，则有 $O(G^*)=0$，因而 G^* 的顶点数为偶数。

因 U 表示 G^* 中度为 $p-1$ 的顶点集合。由于当 $U=V$ 时，G^* 显然的完美匹配，因此假设 $U\neq V$。

下面我们来证明：G^*-U 是完全图的不相交的并。

假如不然，G^*-U 的某一分支不是完全的，则在该分支中存在顶点 u,v,w，使

$$(u,v)\in E(G^*),(v,w)\in E(G^*),(u,w)\notin E(G^*)$$

此外，由于 $v\notin U$，在 $G-U$ 中存在一个顶点 x，使 $(v,x)\notin E(G^*)$。我们把这种情况用图 8.3-3 来表示。

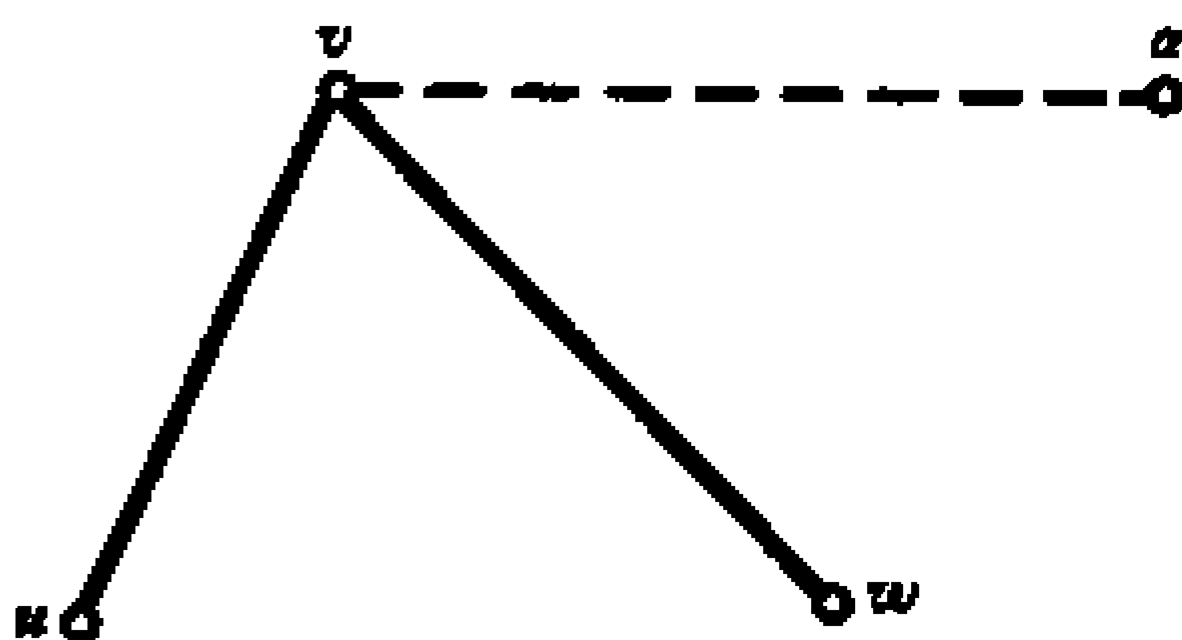


图 8.3-3

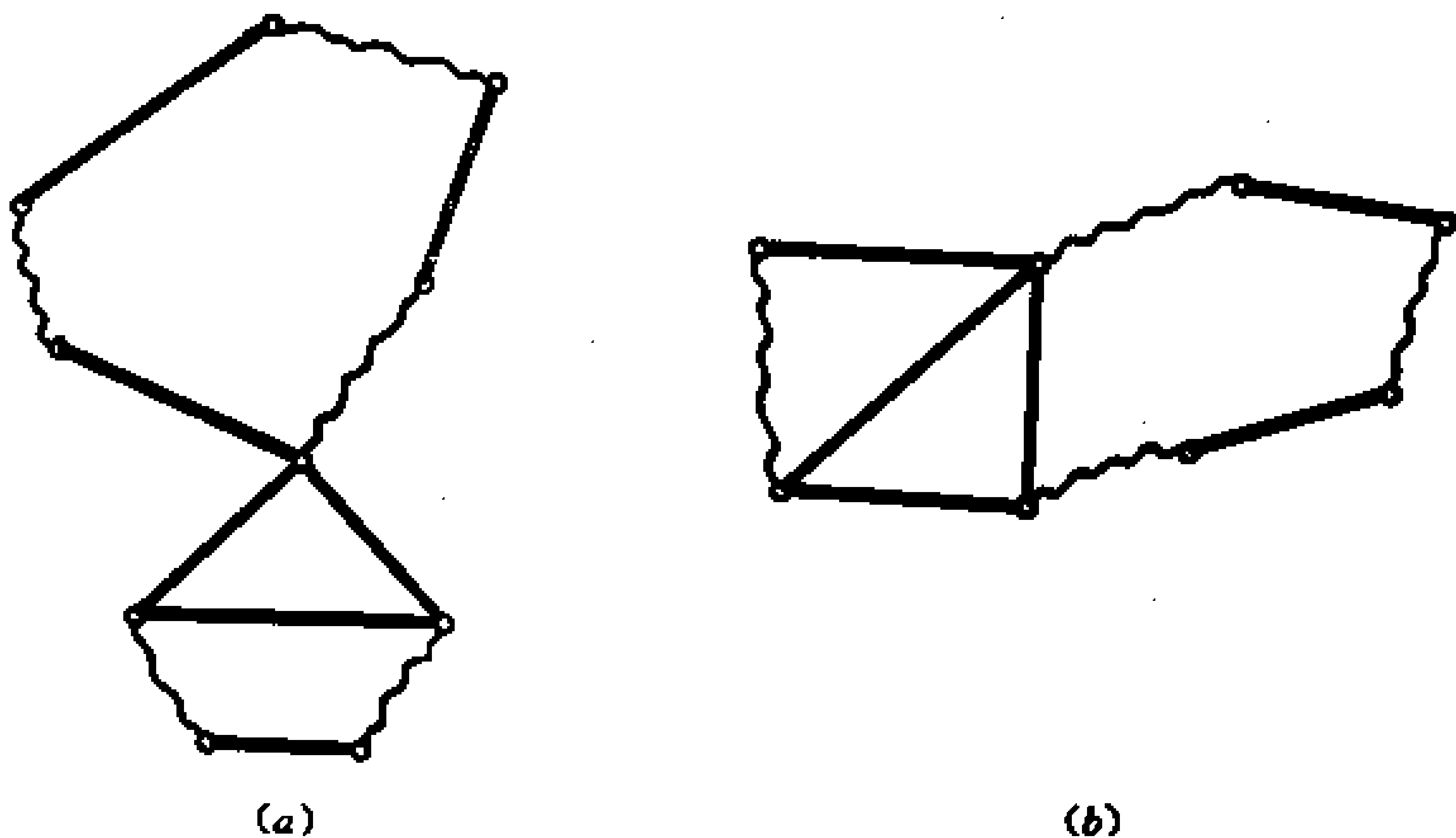
由于 G^* 是不包含完美匹配的最大图，故对所有 $e\notin E(G^*)$，G^*+e 都包含一个完美匹配，设 M_1 和 M_2 分别是 $G^*+(u,w)$ 和 $G^*+(v,x)$ 的完美匹配，H 是由 $M_1\oplus M_2$ 导出的 $G^*\cup\{(u,w),(v,x)\}$ 的子图。由于 H 的每个顶点的度为 2，所以 H 是环路。进而由于构成这个环路的各圈的 M_1 和 M_2 的边是交错的，因此所有这些圈都是偶圈。分两种情况：

情况 1：(u,w) 和 (v,x) 在 H 的不同分支中(图 8.3-4(a))。那么，若 (v,x) 在 H 的圈 C 中，则在 C 中 M_1 的边连同不在 C 中的 M_2 的边一起组成 G^* 的一个完美匹配，这与 G^* 的假设矛盾。

情况 2：(u,w) 和 (v,x) 在 H 的同一分支中。根据 u 和 w 的对称性，我们可以假定 u,v,x,w 依次出现在圈 C 上(图 8.3-4(b))。则在 C 的 $vx\cdots w$ 部分中 M_1 的边和不在 C 的 $vx\cdots w$ 部分中的 M_2 的边以及边 (v,w) 一起组成 G^* 的一个完美匹配，再次与 G^* 的假设矛盾。

因此，不论情况 1 或情况 2 都导致矛盾，于是 G^*-U 是完全图的不相交的并。

现在，根据(8.3-1)式，有



M_1:粗线;M_2:波浪线

图 8.3-4

$$O(G^* - U) \leqslant |U|$$

因此,G^*-U 的奇分支数最多是$|U|$,这样,G^*就显然有一个完美匹配 G^*-U 的各奇分支的一个顶点和 U 的一个顶点配对,U 中和 G^*-U 的各分支中余下的顶点也是配对的。如图 8.3-5 所法的那样。

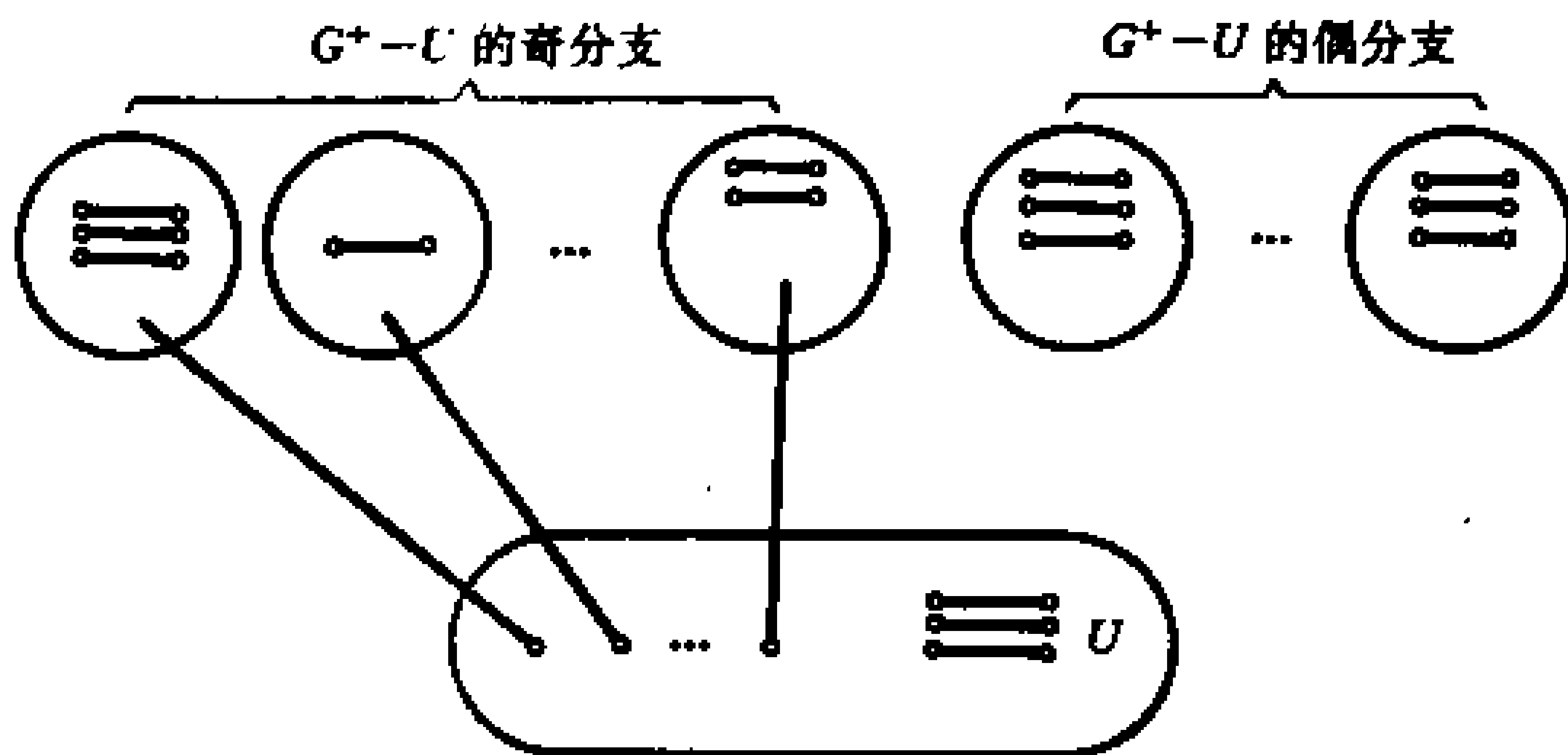


图 8.3-5

由于假设 G^* 没有完美匹配，因而从得到的矛盾中知 G 包含完美匹配。∎

这个定理的证明较长，有兴趣的读者可以阅读。

推论 8.3.1 每个没有割边的 3-正则图都有完美匹配。

［证明］ 设 G 是一个没有割边的 3-正则图。并设 V_0 是 $V(G)$ 的一个真子集。用 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，表示 $G-V_0$ 的奇分支，又设 m 是一个端点在 G_i 中，另一个端点在 V_0 中的边的数目。由于 G 是 3-正则的，故

$$\sum_{v\in V(G_i)} \deg(v) = 3|V(G_i)|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{8.3-3}$$

并且有

$$\sum_{v\in V_0} \deg(v) = 3|V_0| \tag{8.3-4}$$

由(8.3-3)式知

$$\sum_{v\in V(G_i)} \deg(v) - 2E(G_i) = m_i$$

是奇数，又由于 G 没有割边，所以 $m_i \neq 1$，因此上式对 $1 \leqslant i \leqslant m$，$m_i \geqslant 3$ 成立

于是，有

$$O(G-V_0) = m \leqslant \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant \frac{1}{3}\sum_{v\in V_0} \deg(v) = |V_0|$$

由定理 8.3.1，G 有完美匹配。∎

8.4 二部图完美匹配的算法

在这一节中，我们来介绍求二部图完美匹配的一种算法，这种算法叫做匈牙利算法。

求二部图完美匹配的一个典型问题是所谓“全体人员分

配问题"：给 n 个工作人员安排 m 项工作。n 个人用 $V_1=\{u_1, u_2,\cdots u_n\}$ 表示，m 项工作用 $V_2=\{v_1,v_2\cdots v_m\}$ 表示。n 个工作人员中每个人能胜任一项或几项工作，不是所有的工作人员都能从事任何一项工作，比如 u_1 能做 v_1,v_2 工作，u_2 能作 v_2,v_3,v_4 工作等等。这样便提出一个问题：对所有的工作人员能不能分配一件他所能胜任的工作？

我们构造一个具有二分划 (V_1,V_2) 的二部图 G，这里 $V_1=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$，$V_2=\{v_1,v_2,\cdots v_m\}$，并且当且仅当工作人员 u_i 胜任工作 v_j 时 u_i 与 v_j 才邻接。于是问题转化为求二部图 G 的一个完美匹配。

匈牙利算法的基本思想是很简单的。

从任意的匹配 M 开始，若 M 饱和 V_1 中的每一个顶点，则 M 就是所需要的匹配。否则，在 V_1 中选择一个 M-不饱和的顶点 u_i，考察一条以 u_i 为起点的 M-增广道路。如果能找出这样的道路 P，则令 $\tilde{M}=M\oplus E(P)$，那么 $\tilde{M}$ 就是比 M 更大的匹配，因而它饱和 V_1 中更多的顶点。我们重复以 $\tilde{M}$ 代替 M 的这个程序。如果这样的道路不存在，则用 M—交错道路与 u_i 相连接的那些顶点的集合 Q 已找到。于是（如同定理 8.2.1 的证明那样）$V_0=Q\cap V_1$ 满足 $|N_G(V_0)|<|V_0|$。

下页给出算法的框图。

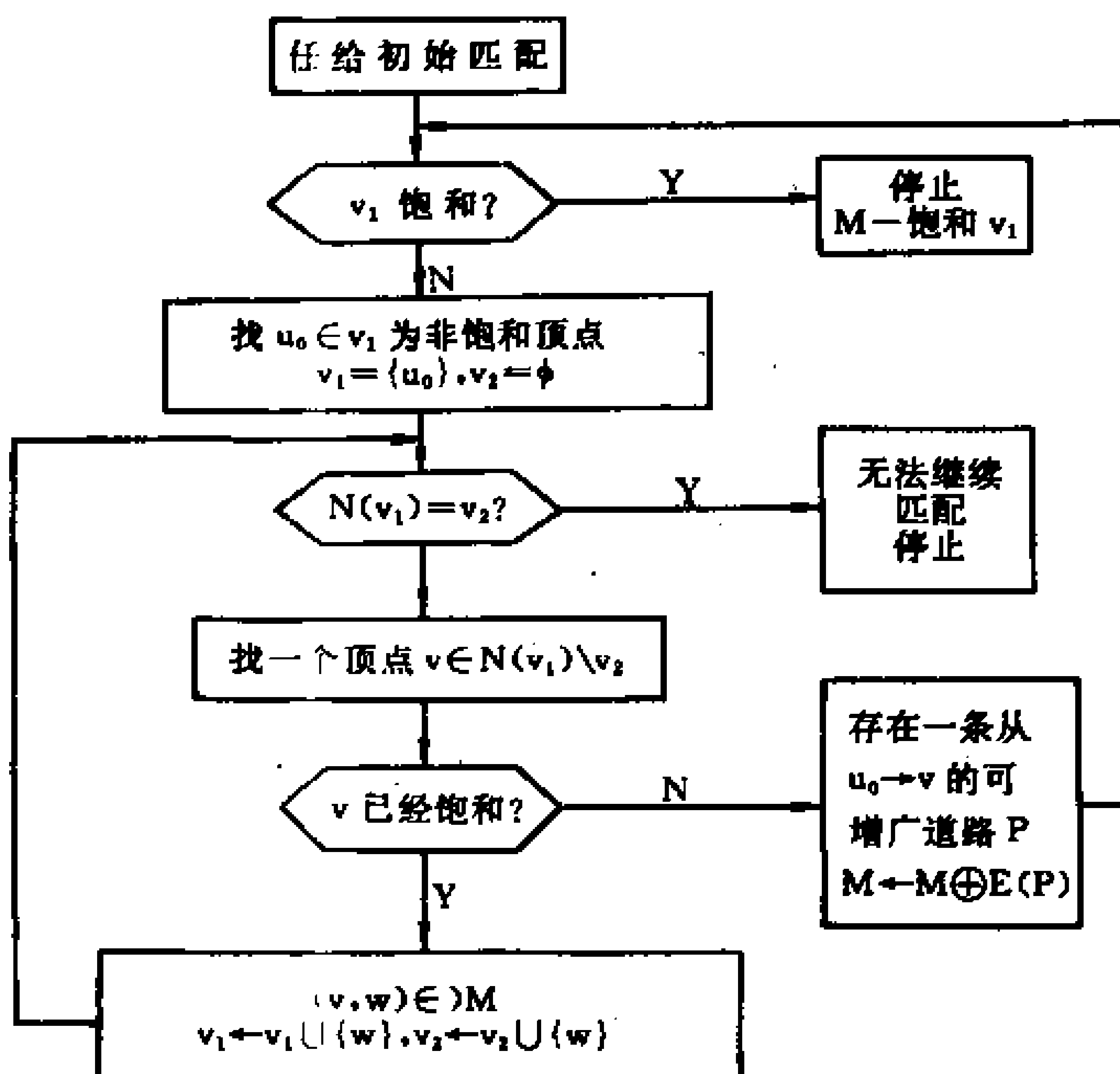
例 8.4.1 求图 8.4-1 所示的二部图 G 的完美匹配。

第一步：任取一初始匹配 M_0，如图 8.4-2 所示。匹配 M_0 中的边用实线表示，其余边用虚线表示。

$$M_0=\{(u_1,v_1),(u_3,v_5),(u_5,v_3)\}$$

第二步：V_1 尚未饱和，找出其中一个 M-不饱和顶点 u_2。从 u_2 出发经过下列过程：

$$V_1:\{u_2\}\rightarrow\{u_2,u_5\}\rightarrow\{u_2,u_5,u_3\}$$



匈牙利算法框图

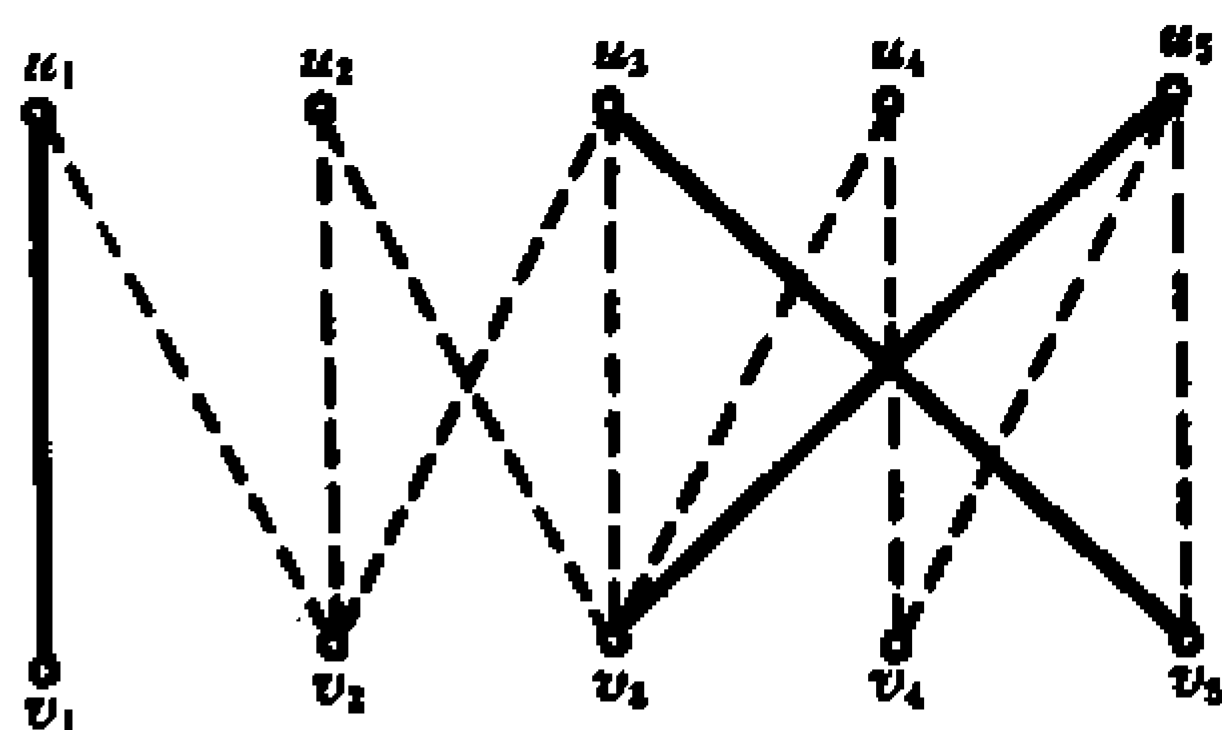


图 8.4-1

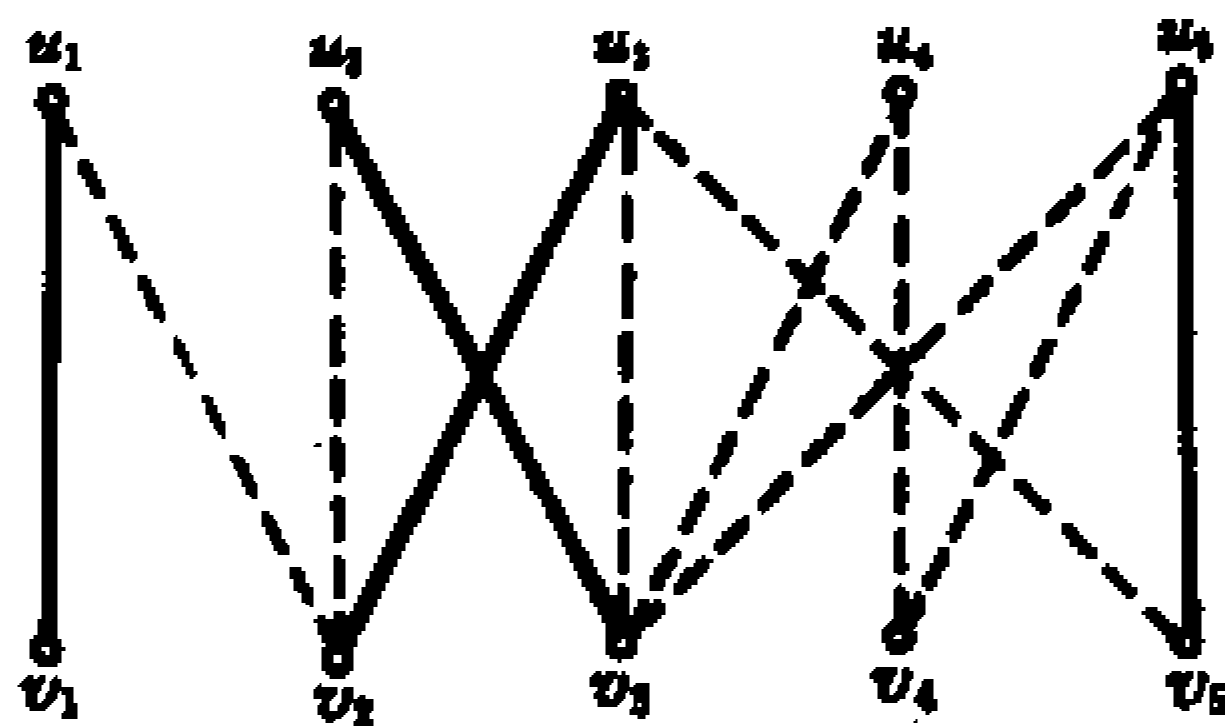


图 8.4-2

$$V_2: \varnothing \rightarrow \{v_3\} \rightarrow \{v_3, v_5\} \rightarrow \{v_3, v_5, v_2\}$$

找到 v_2 为不饱和顶点和增广道路：

$$P_0 = u_2v_3u_5v_5u_3v_2$$

作 $M_0 \oplus E(P_0)$，得一新的匹配 M_1，如图 8.4-3 所示。

$$M_1 = \{(u,v),(u_2,v_3),(u_3,v_2),(u_5,v_5)\}$$

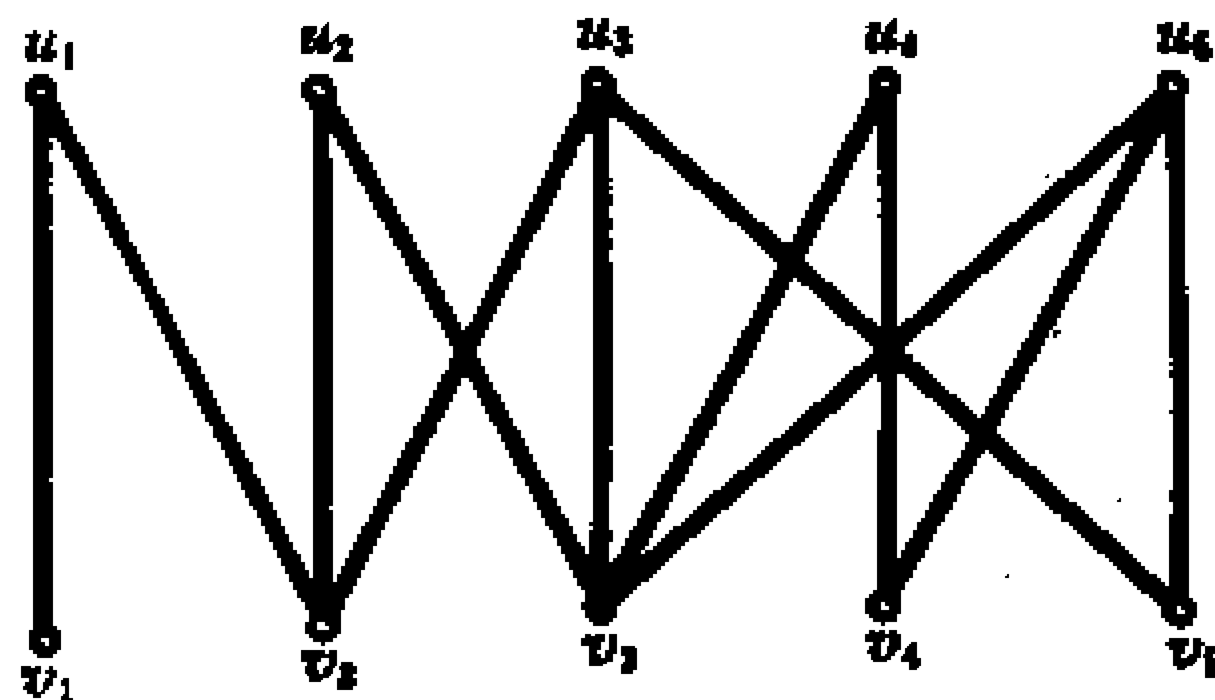


图 8.4-3

第三步：V_1 未饱和，u_4 为不饱和顶点。从 u_4 出发经过下列过程：

$V_1: \{u_4\} \rightarrow \{u_4, u\} \rightarrow \{u_4, u_2, u_3\} \rightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$

$V_2: \varnothing \rightarrow \{v_3\} \rightarrow \{v_3, v_2\} \rightarrow \{v_3, v_2, v_5\}$

$\rightarrow \{v_1, v_2, v_5, v_4\}$

得到不饱和顶点 u_4 到 v_4 的一条可增广道路：

$$P_1 = u_4v_3u_2v_2u_3v_5u_5v_4$$

作 $M_1 \oplus E(P_1)$，得一新的匹配 M_2，如图 8.4-4 所示。

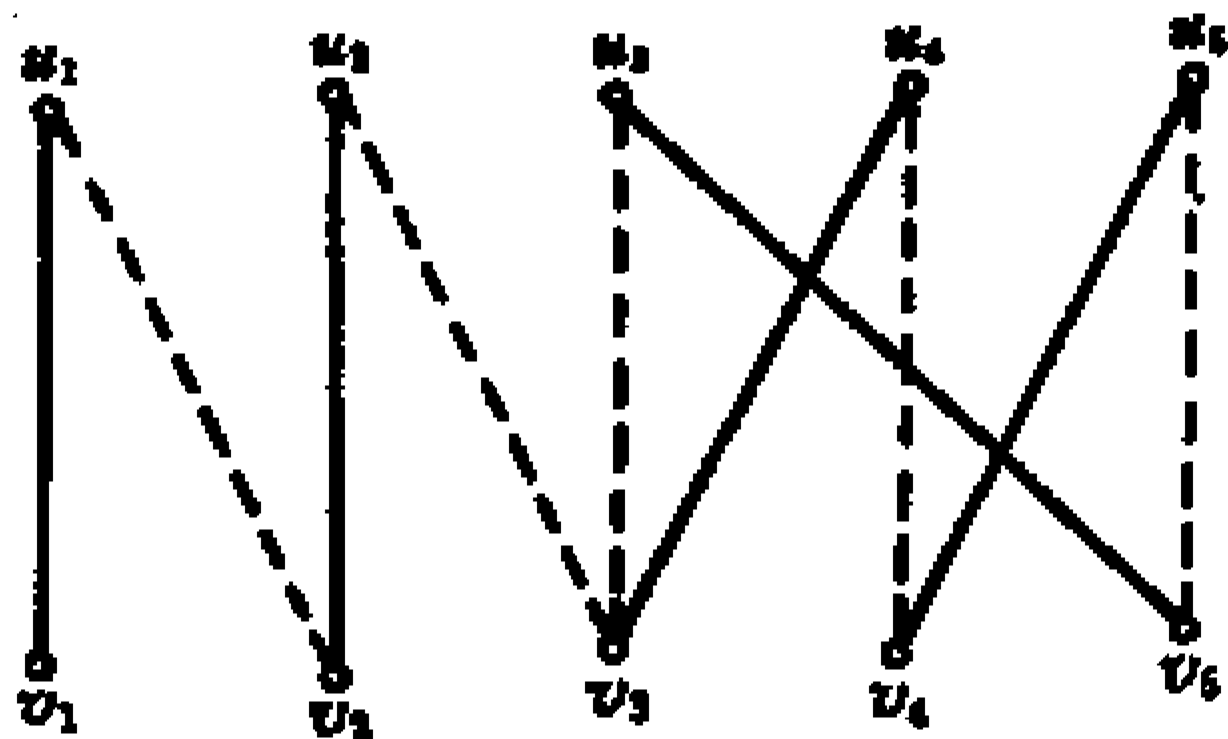


图 8.4-4

第四步：V_1 中的顶点全部饱和，故结束。

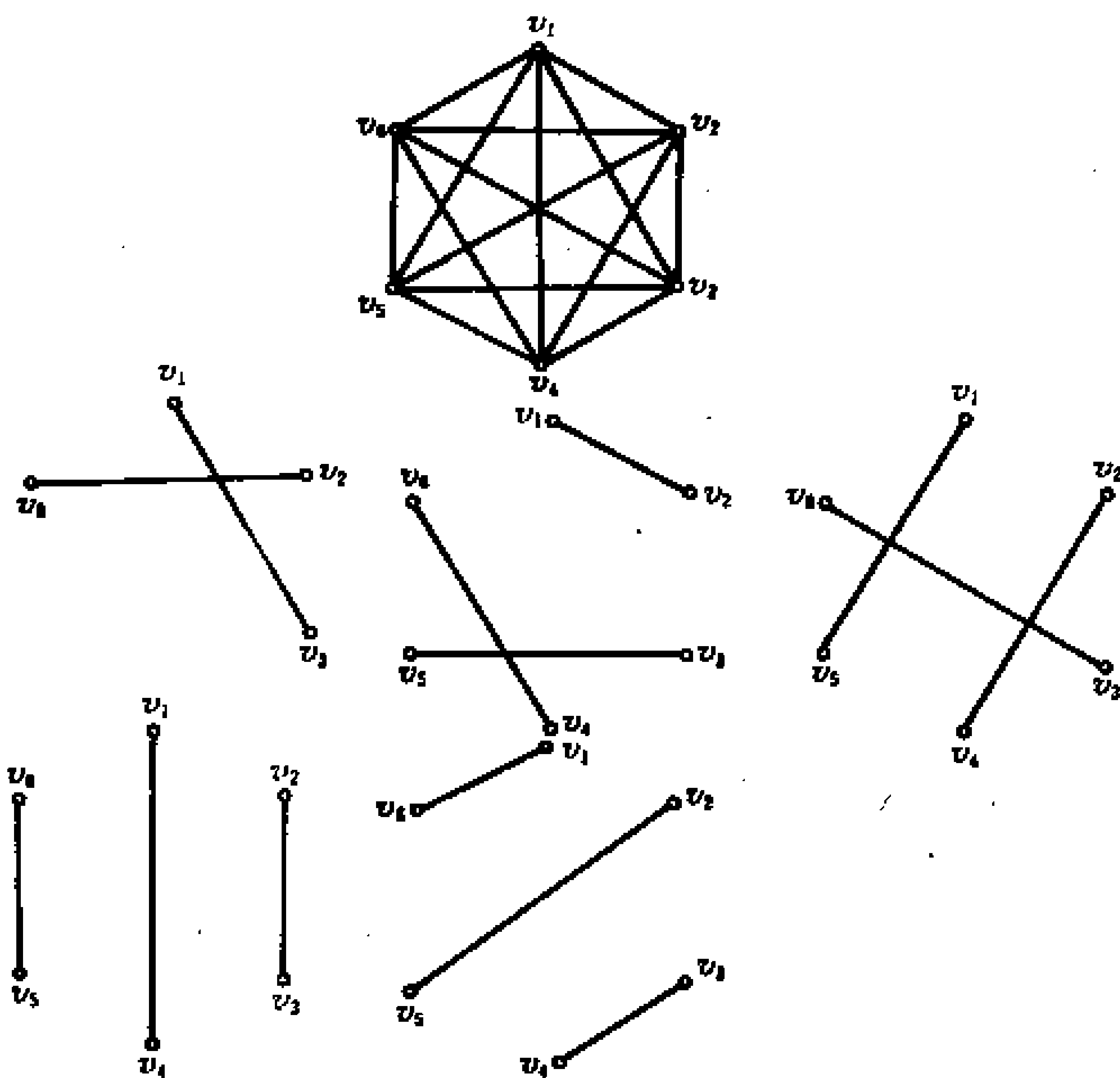
习 题 八

8-1 证明：树至多只有一个完美匹配。

8-2 证明：树 G 有完美匹配的充要条件是对任意 $v\in V(G)$，均有 $O(G-v)=1$

8-3 证明：二部图 G 有完美匹配的充要条件是对任意 $V_0\subseteq V(G)$，有 $|N_G(V_0)|\geqslant|V_0|$。

8-4 图 G 的一个 k-因子是指 G 的一个 k-正则生成子图，G 称为可 k-因子化的，若存在边不相交的 k-因子 $H_1,H_2\cdots,H_n$，有 $G=H_1\cup H_2\cup$

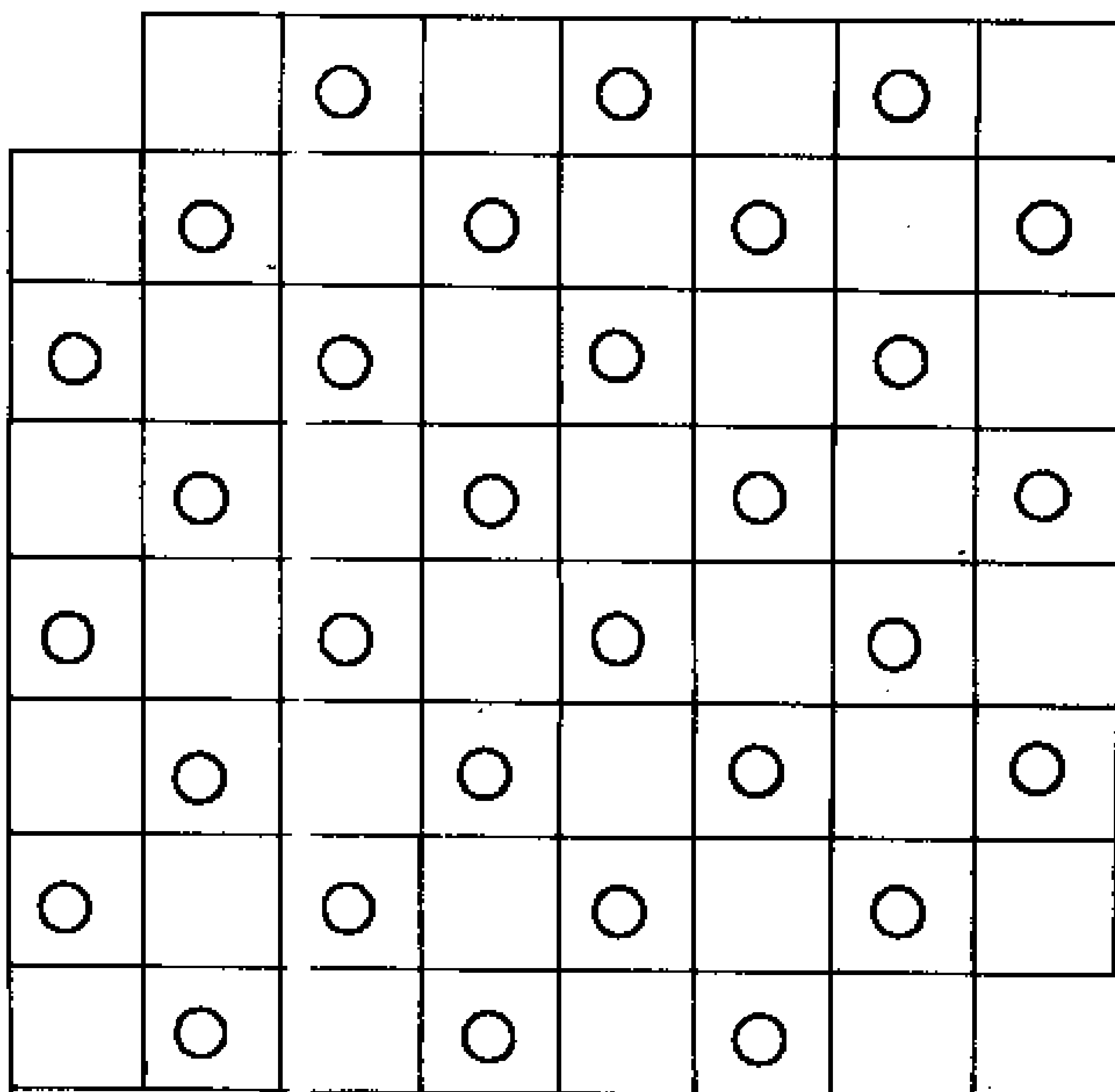


题 8-4 图

$\cdots \cup H_n$。例如在下图中 K_6 的1-因子分解产生五个1-因子。证明:完全图 K_{2n} 是可1-因子化的;k-正则二部图是可1-因子化的。

8-5 证明:一个8×8正方形删去2个位于对角上的1×1的小正方形后,恰好不能用1×2长方形遮盖住。

(提示:构造一个顶点为口和回的图)



题8-5图

第九章 色 数

图的着色问题也是图论中一个重要的领域。本章讨论的主要内容是图的顶点着色和图的色多项式。

在本章中只限于讨论连通的简单图。

9.1 独 立 集

定义 9.1.1 设图 $G=(V,E)$，$S\subseteq V(G)$。如果 S 中的任意两个顶点在 G 中均不邻接，则称 S 是一个**独立集**(independent set)。

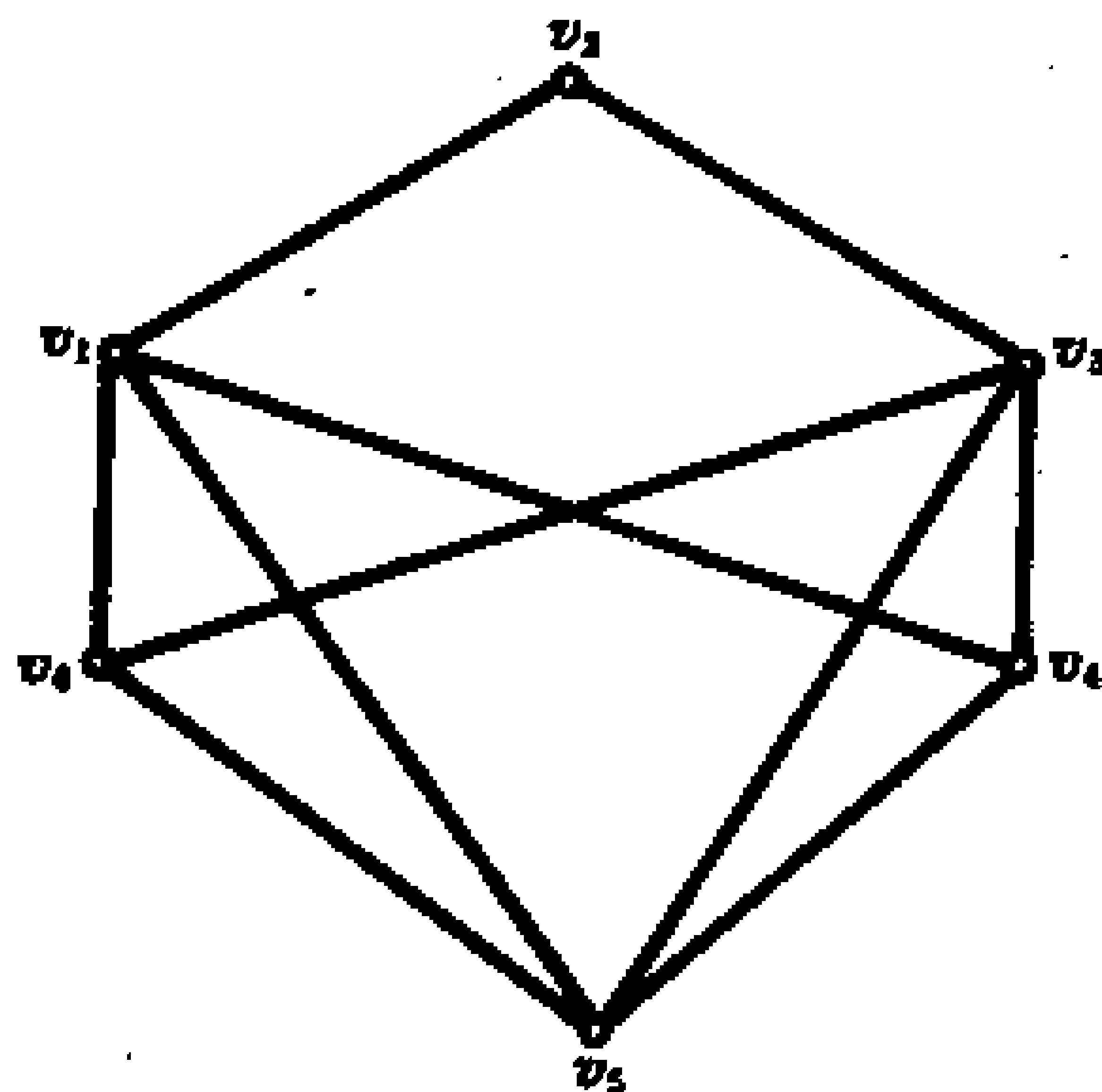


图 9.1-1

独立集 S 称为**最大的**(maximum)，如果不存在 S'，使 $|S'|>|S|$。最大独立集中顶点的个数称为 G 的**独立数**(independent number)，记作 $\alpha_0(G)$。

例如，在图 9.1-1 所示的图中，集合

$$\{v_2,v_4\},\{v_2,v_6\},\{v_2,v_4,v_6\}$$

均为独立集。

集合 $\{v_1,v_3\}$ 中的顶点不邻接，但它们与图的其他顶点均

邻接，但$\{v_1, v_3\}$不是最大独立集，集合$\{v_2, v_4, v_6\}$是最大的独立集。

独立集与覆盖之间有密切的关系。

定理 9.1.1 设$S \subseteq V(G)$，S是G的独立集当且仅当$\overline{S} = V(T) \backslash S$是$G$的一个覆盖。

[证明] 根据独立集的定义，S是独立集当且仅当没有G中的边其两个端点在S中。换句话说，S是独立集当且仅当G的每一条边至少有一个端点在$\overline{S}$中。▮

推论 9.1.1 对于p阶图G，有

$$\alpha_0 + \beta_0 = p$$

[证明] 考虑图G的最大独立集S^*和最小覆盖K^*。那么

$$|S^*| = \alpha_0 \text{ 和 } |K^*| = \beta_0$$

根据定理 9.1.1，$\overline{S}^* = V \backslash S^*$是覆盖和$\overline{K}^* = V \backslash K^*$是独立集。于是

$$|\overline{S}^*| = |V - S^*| = p - \alpha_0 \geqslant \beta_0$$

和

$$|\overline{K}^*| = |V - K^*| = p - \beta_0 \leqslant \alpha_0$$

于是我们有

$$\alpha_0 + \beta_0 = p \qquad ▮$$

9.2 顶点着色

定义 9.2.1 用n种颜色对图G的顶点进行着色，且没有相异的邻接顶点有相同的颜色，则称为G的一个**n-顶点着色**(n-vertex colouring)。

n—顶点着色常简称为**n-着色**。

定义 9.2.2 使图G为n-着色的n最小数值称为G的色

数(chromatic number),记作 $\chi(G)$。若 $\chi(G)=n$,则 G 为 n-色的(n-colouring)。

图 9.2-1 给出一个 3-着色图,我们分别用 c_1,c_2 和 c_3 代表三种不同的颜色。图 9.2-1 所示的图也是 3-色的,也就是说图 G 的色数为 3,即 $\chi(G)=3$。

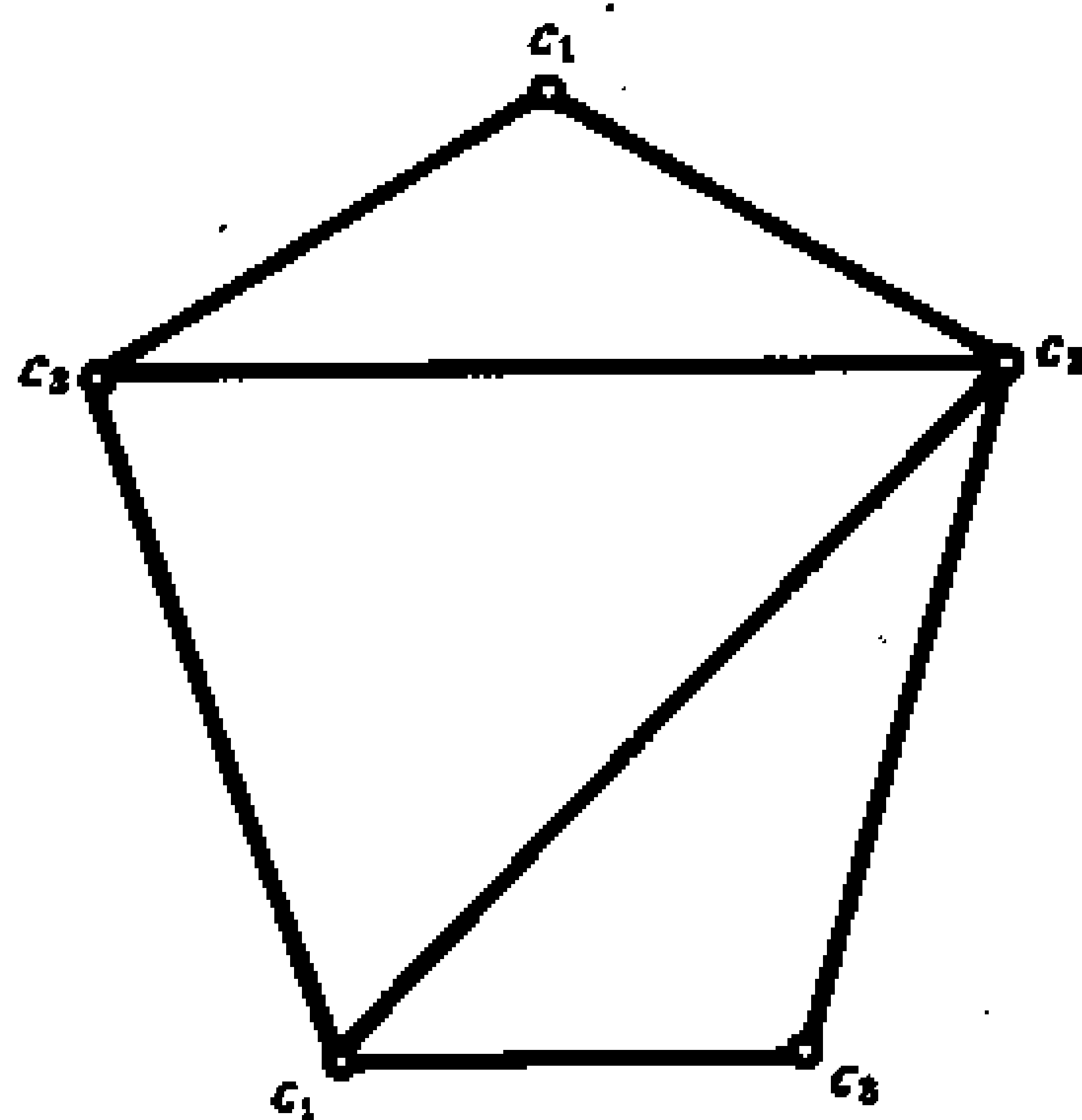


图 9.2-1

显然,具有任何一种相同颜色的所有的顶点的集是独立的。因此,图 G 的一个 n-着色是把 $V(G)$ 分成 n 个(可能有空的)独立集的一个分划($V_1,V_2,\cdots,V_n$)。据此,下面的定理是显然的。

定理 9.2.1 图 G 是 2-色的当且仅当 G 是二部图。

定理 9.2.2 对任意图 G,有

$$\chi(G)\leqslant\Delta+1$$

其中 Δ 为 G 中顶点的最大度。

[证明] 用归纳法。设 $|V(G)|=p$。显然,当 $p=1$ 时,$\Delta=0$,$\chi(G)=1$。定理成立。

假设定理对顶点个数 $\leqslant p-1$ 时成立。

设 v 是 G 的任一顶点,由归纳法假设,$\chi(G-v)\leqslant\Delta_1+1$,其中 Δ_1 为主子图 $G-v$ 中顶点的最大度。显然,$\Delta_1\leqslant\Delta$,故有

$$\chi(G-v)\leqslant\Delta+1$$

用 $\Delta+1$ 种颜色对 $G-v$ 着色。设与 v 邻接的顶点是 $v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{ik}$,用 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 表示顶点 $v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{ik}$ 所着的颜色。因为 $k\leqslant\Delta_1$,故从 $\Delta+1$ 种颜色中必然可以找到一种颜色 c_{k+1}

$(c_{k+1}=c_j, j=1,2,\cdots,k)$，对 v 着颜色 c_{k+1}。于是定理得证。▌

定义 9.2.3 设 H 是 G 的任一子图，如果

$$\chi(H)\leqslant\chi(G)$$

则称图 G 是临界的(critical)。如果 G 既是 n-色的又是临界的，则称 G 是 **n-临界的**。

定理 9.2.3 若 G 是 n-临界的。则 $\delta\geqslant n-1$（δ 为 G 的顶点的最小度）。

[证明] 若 G 是一个 n-临界图，而 $\delta<n-1$，又设 $\deg(v)=\delta$。由于 G 是 n-临界的，所以 $G-v$ 是$(n-1)$-着色的。设 $(V_1,V_2,\cdots,V_{n-1})$ 是 $G-v$ 的一个$(n-1)$-着色。由 $\deg(v)=\delta$ 知，v 在 G 中与 δ 个顶点邻接（$\delta<n-1$），从而 v 必然在 G 中与某个 V_j 的所有顶点都不邻接。由此推得 $(V_1,V_2,\cdots,V_j\cup\{v\},\cdots,V_{n-1})$ 是 G 的一个$(n-1)$-着色，这与假设矛盾。▌

推论 9.2.1 每个 n-色图至少有 n 个度不小于 $n-1$ 的顶点。

[证明] 设 G 是一个 n-色图，并且设 H 是 G 的一个 n-临界子图。由定理 9.2.3，H 的每个顶点在 H 中的度不小于 $n-1$，因此在 G 中的度也不小于 $n-1$。由于 H 是 n-色的，显然它至少有 n 个顶点。▌

设 u,v 是图 G 的不邻接的两个顶点，用 $G:uv$ 表示把 u,v 收缩成一个顶点 z，并把 G 中凡是与 u,v 关联的边均使之与 z 关联。

图 9.2-2 中给出 G 和 $G:uv$ 的图形。

定理 9.2.4 设 u,v 是图 G 的两个不邻接的顶点，则

$$\chi(G)=\min\{\chi(G+uv),\chi(G:uv)\}$$

[证明] 设 $k=\chi(G)$，对图 G 的所有顶点着色，那么顶点 u,v 或是有相同颜色，或是有不同的颜色。

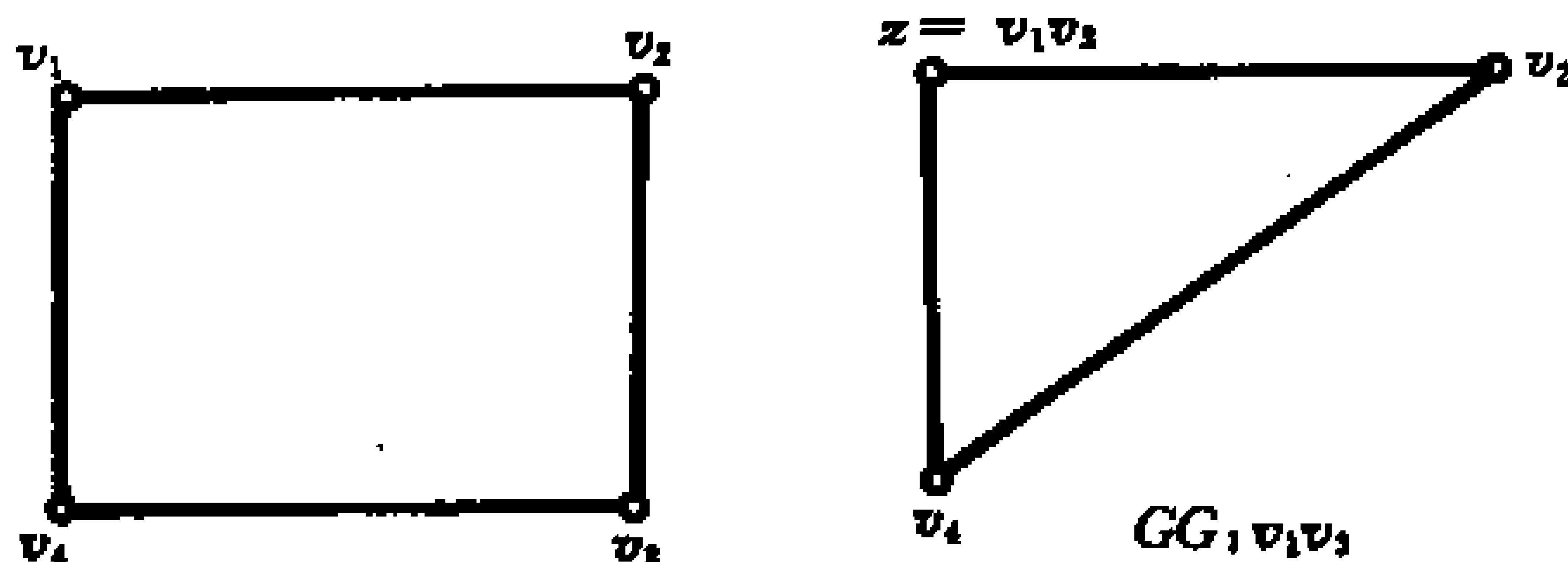


图 9.2-2

若 u,v 有不同的颜色。则 k 种颜色足以使图 $G+uv$ 的相邻顶点有不同的颜色，故

$$\chi(G)\geqslant\chi(G+uv)$$

若 u,v 有相同的颜色。则 k 种颜色足以使 $G\cdot uv$ 相邻顶点有不同的颜色，故

$$\chi(G)\geqslant\chi(G\cdot uv)$$

于是

$$\chi(G)\geqslant\min\{\chi(G+uv),\chi(G\cdot uv)\}\qquad(9.2\text{-}1)$$

另一方面，显然有

$$\chi(G)\leqslant\chi(G+uv)$$
$$\chi(G)\leqslant\chi(G\cdot uv)$$

于是

$$\chi(G)\leqslant\min\{\chi(G+uv),\chi(G\cdot uv)\}\qquad(9.2\text{-}2)$$

由(9.2-1)和(9.2-2)式知，定理为真。▮

定理 9.2.4 给出求图 G 的色数的一种方法。

设 u,v 是图 G 的不邻接的两个顶点。u,v 有相同颜色的 G 的着色给出 $G\cdot uv$ 的一个着色；u,v 有不同颜色的 G 的着色给出 $G+uv$ 的一个着色。将这两种过程重复进行，直到所得到的图是完全图为止。若所得到的完全图中最小的是 K_r，

则 $\chi(G)=r$。

例 9.2.1 图 9.2-3 所示的图 G，经过收缩和加边，最后得到 K_3，于是 G 是 3-色的。顶点 a,d 着 α_1 色，顶点 b,e 着 α_2 色，顶点 c 着 α_3 色。

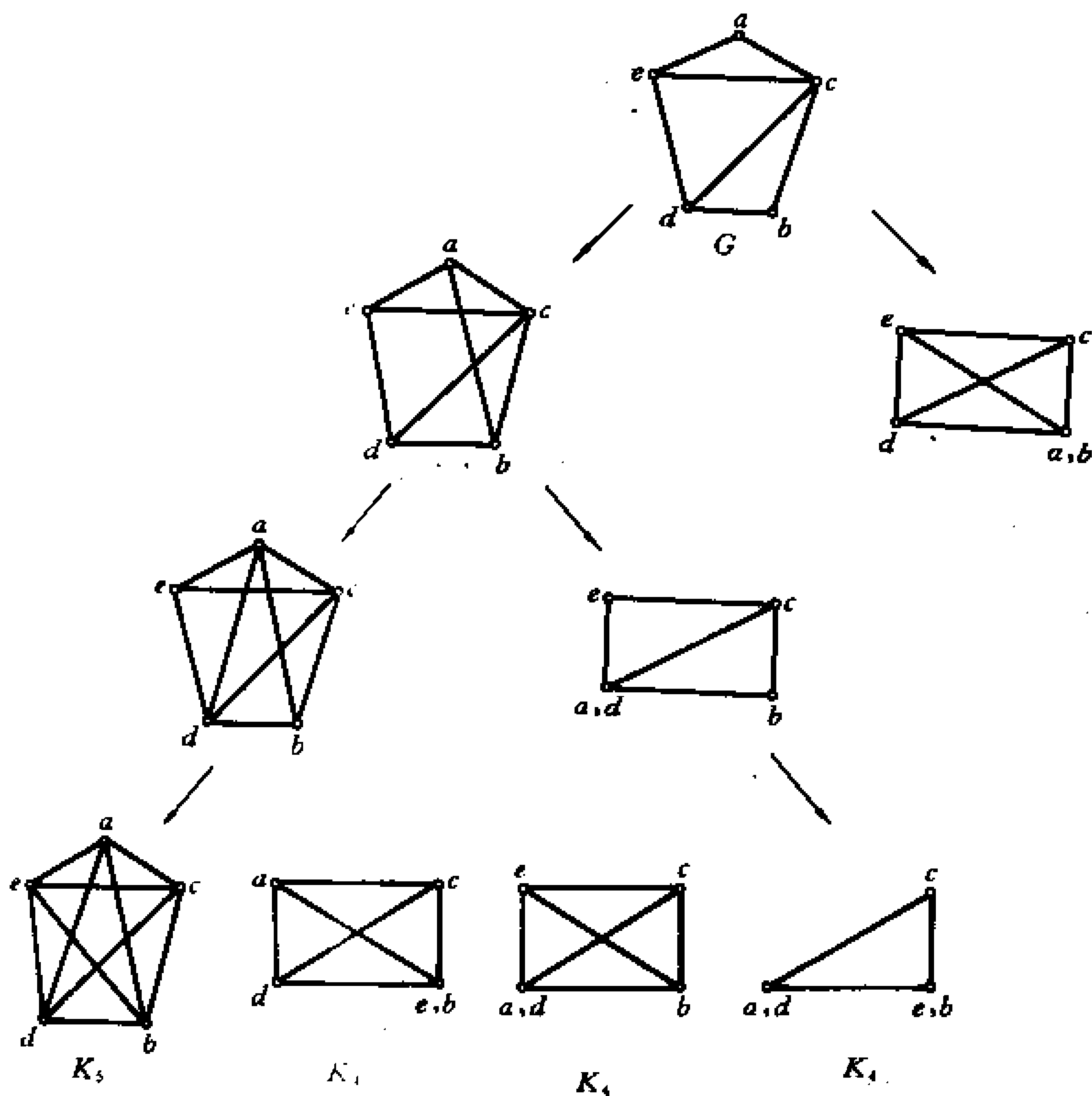


图 9.2-3

9.3 边 着 色

定义 9.3.1 对图 G 的边进行着色，且相邻的边没有相同的颜色，称为 G 的一个**边着色**。

一个 **n-边着色**是用 n 种颜色的一个着色。

定义 9.3.2 使图 G 为 n-边着色的最小的 n，称为 G 的**边色数**，记作 $\chi'(G)$。

分别用 c_1，c_2，c_3 和 c_4 表示四种不同的颜色，图 9.3-1 给出图 G 的一个 4-边着色，而且 4 是所示图的边着色的最小数目，故 $\chi'(G)=4$。

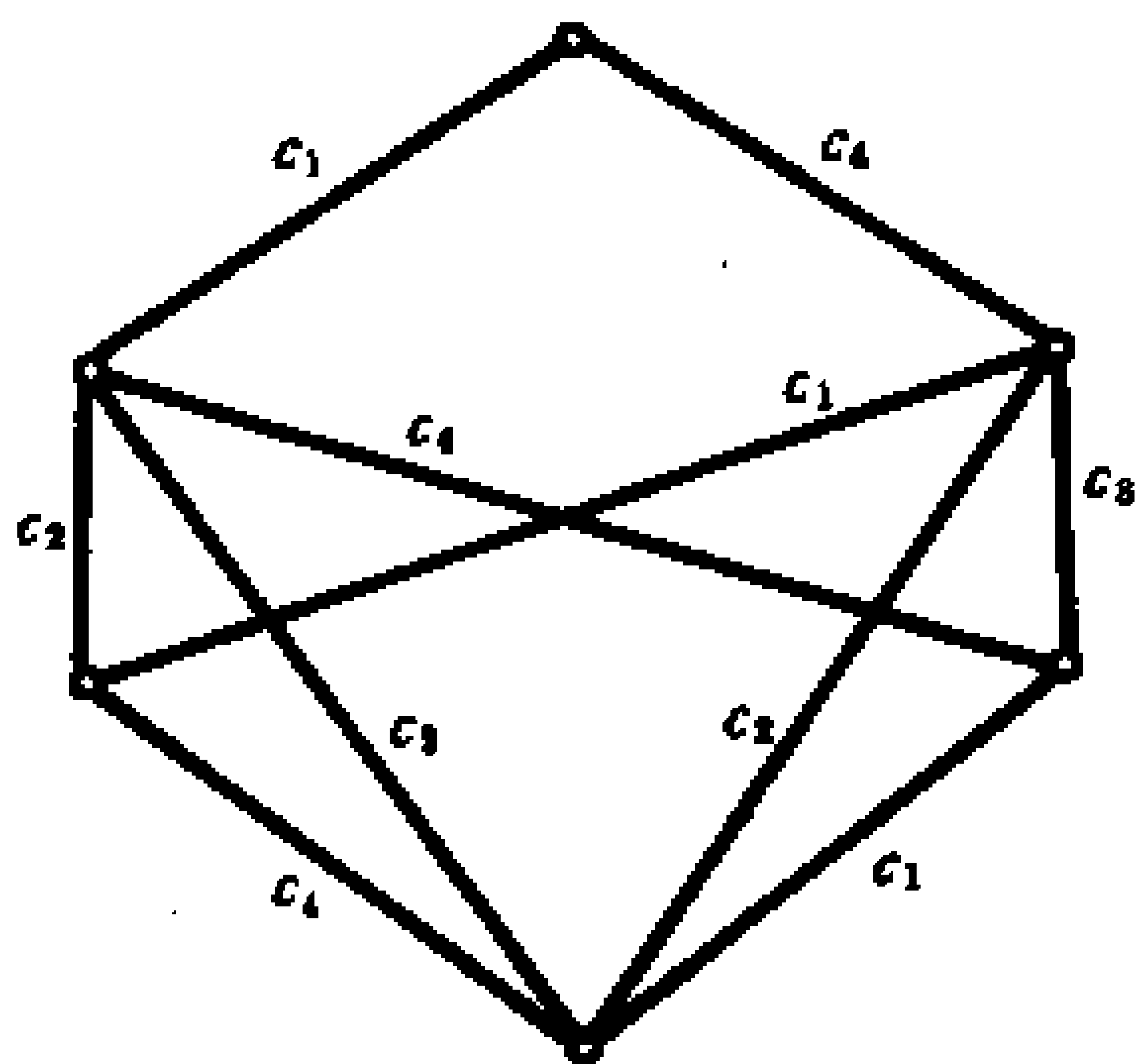


图 9.3-1

一个 n-着色可以看作是边集 E 的一个分划(E_1，E_2，…，E_n)，其中 E_i(可能是空的)表示有相同颜色的一个匹配。类似地，每一个边集 E 的分划(E_1，E_2，…，E_n)，其中 E_i 为匹配，那么这个划分对应的图的一个 n-边着色。

因为与任何一个顶点关联的各条边必须着以不同的颜色，所以对边着色，有

$$\chi'(G) \geqslant \Delta \qquad (9.3\text{-}1)$$

在一般情况下，$\chi'(G) \neq \Delta$，但是对二部图我们有下面的

定理 9.3.1 设 G 是二部图，则有

$$\chi'(G) = \Delta$$

[证明] 由定理 8.2.4，有

$$\chi'(G) \leqslant \Delta$$

又由(9.3-1)式，我们有

$$\chi'(G) = \Delta \quad \blacksquare$$

对边着色问题我们不再做进一步的讨论了。

9.4 色多项式

我们知道，图 G 的色数是对 G 的顶点进行着色所需要的最少的颜色的数目。如果颜色的数目比色数大，自然可以对顶点着色，而且着色的方法不止一种。

定义 9.4.1 图 G 的一个用 t 种或不到 t 种颜色的着色，叫做 G 的一个**至多 t 色的着色**。

在 G 的两个至多 t 色的着色中，如果 G 的所有顶点中至少有一个顶点被着以不同的颜色，则认为这两个至多 t 色的着色是不同的。

定义 9.4.2 图 G 的不同的至多 t 色的着色的数目，称为图 G 的**色多项式**(chromatic polynomeals)，记作 $f(G,t)$。

显然，若 $t<\chi(G)$，则 $f(G,t)=0$，而 $f(G,t)>0$ 的最小的 t 是 G 的色数。

设 m_i 是 i 种颜色对图 G 的顶点进行着色的不同方案数。用 $t(t\geqslant i)$ 种颜色对图 G 进行着色，每取 i 种颜色时，共有 $m_i\binom{t}{i}$ 种不同的方案，于是我们有

$$f(G,t) = m_1\binom{t}{1} + m_2\binom{t}{2} + \cdots + m_p\binom{t}{p}$$

(其中 p 为图 G 的顶点数)。

即

$$f(G,t)=m_1t+\frac{m_2}{2!}t(t-1)+\frac{m_3}{3!}t(t-1)(t-2)+\cdots$$

$$+\frac{m_p}{p!}t(t-1)(t-2)\cdots(t-p+1) \qquad (9.4\text{-}1)$$

由式(9.4-1)知，图 G 的不同的至多 t 色的着色的数目 $f(G,t)$ 是 t 的一个多项式。

例 9.4.1 三阶完全图 K_3，有

$$f(K_3,t)=t(t-1)(t-2)$$

这是因为，对 K_3 中的任何一个指定的顶点，可以用 t 种颜色中的任何一种进行着色；对 K_3 的第二个顶点，可以用 $t-1$ 种颜色中的任何一种着色；第三个顶点则用 $t-2$ 种颜色中的任何一种着色。

一般地，对 p 阶完全图 K_p，有

$$f(K_p,t)=t(t-1)(t-2)\cdots(t-p+1) \qquad (9.4\text{-}2)$$

定理 9.4.1 设 u,v 是图 G 中不邻接的两个顶点，则

$$f(G,t)=f(G+uv,t)+f(G\cdot uv,t) \qquad (9.4\text{-}3)$$

定理 9.4.1 的证明与定理 9.2.4 的证明方法类似。

定义 9.4.3 把图的一条边 e 删去并使它的两个端点重合，则称边 e 被收缩(contralted)，记作 $G\cdot e$。

图 9.4-1 表明一条边被收缩的效果。

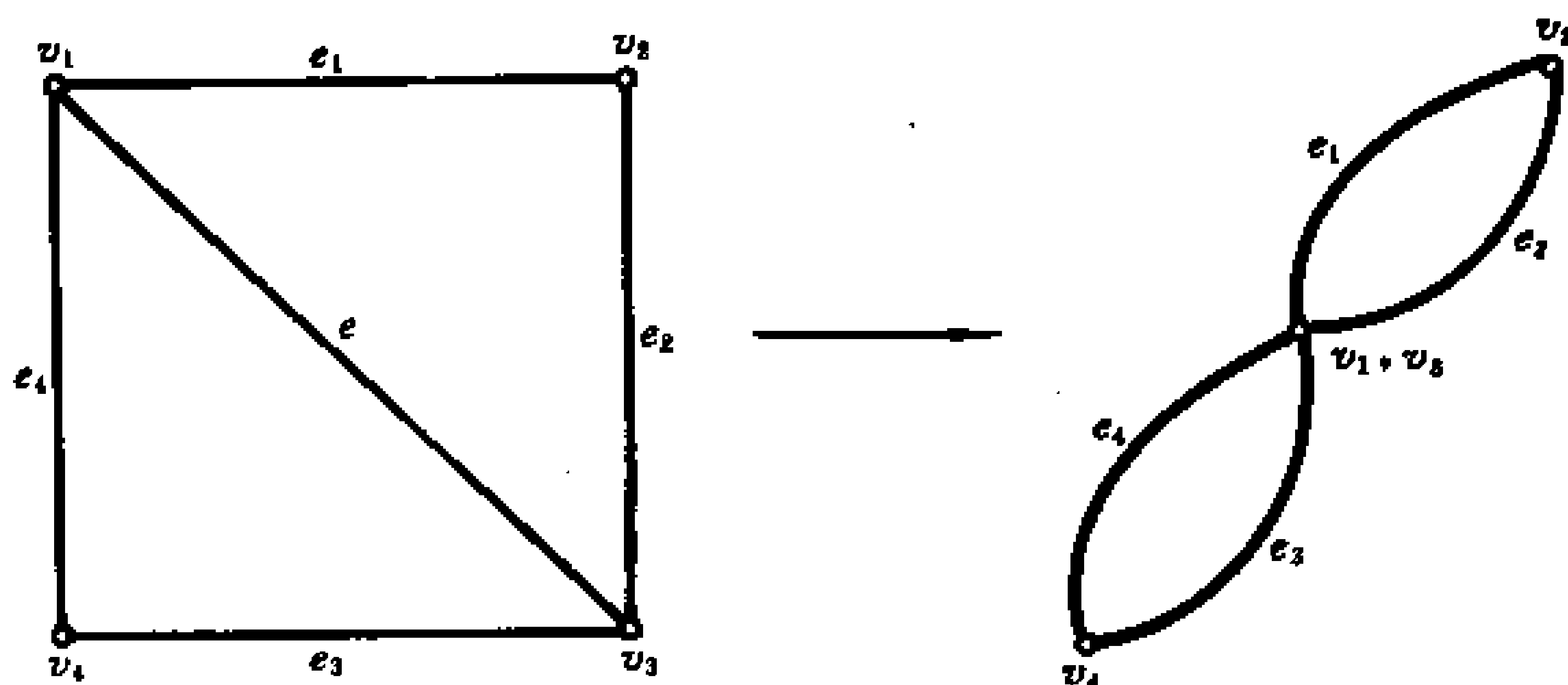


图 9.4-1

推论 9.4.1 设 $e=(u,v)\in E(G)$，则

$$f(G,t)=f(G-e,t)-f(G\cdot e,t)$$

定理 9.4.1 表明：如果 G 是有 p 个顶点和 q 条边的图，则有一个 $q+1$ 条边的图 $G_1=G+uv$（u,v 不邻接）和一个有 $p-1$ 个顶点的图 $G_2=G\cdot uv$，使 $f(G,t)=f(G_1,t)+f(G_2,t)$。对 G_1 和 G_2 继续用(9.4-3)式，，直到只出现完全图为止。因此可以说，一个图的色多项式 $f(G,t)$ 是 $f(K_r,t)$ 型的表达式的和。

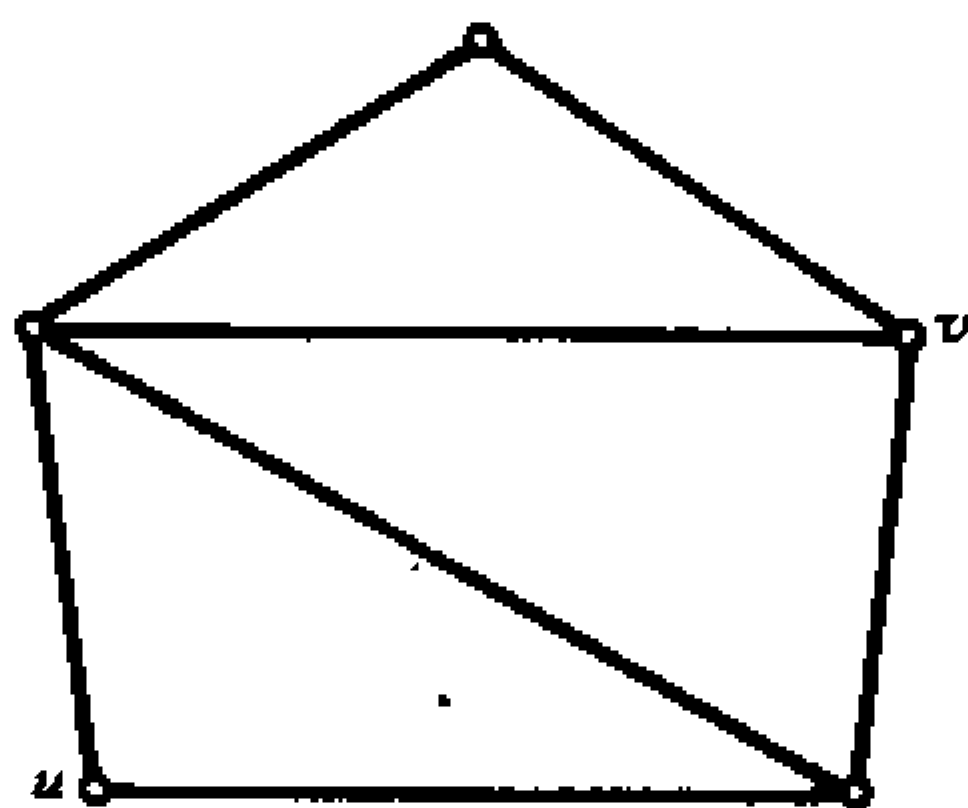


图 9.4-2

例 9.4.2 求图 9.4-2 所示的图 G 的色多项式。

连续对图 G 进行加边和收缩两个过程，直到出现完全图为止（图 9.4-3）。

于是，由定理 9.4.1，有

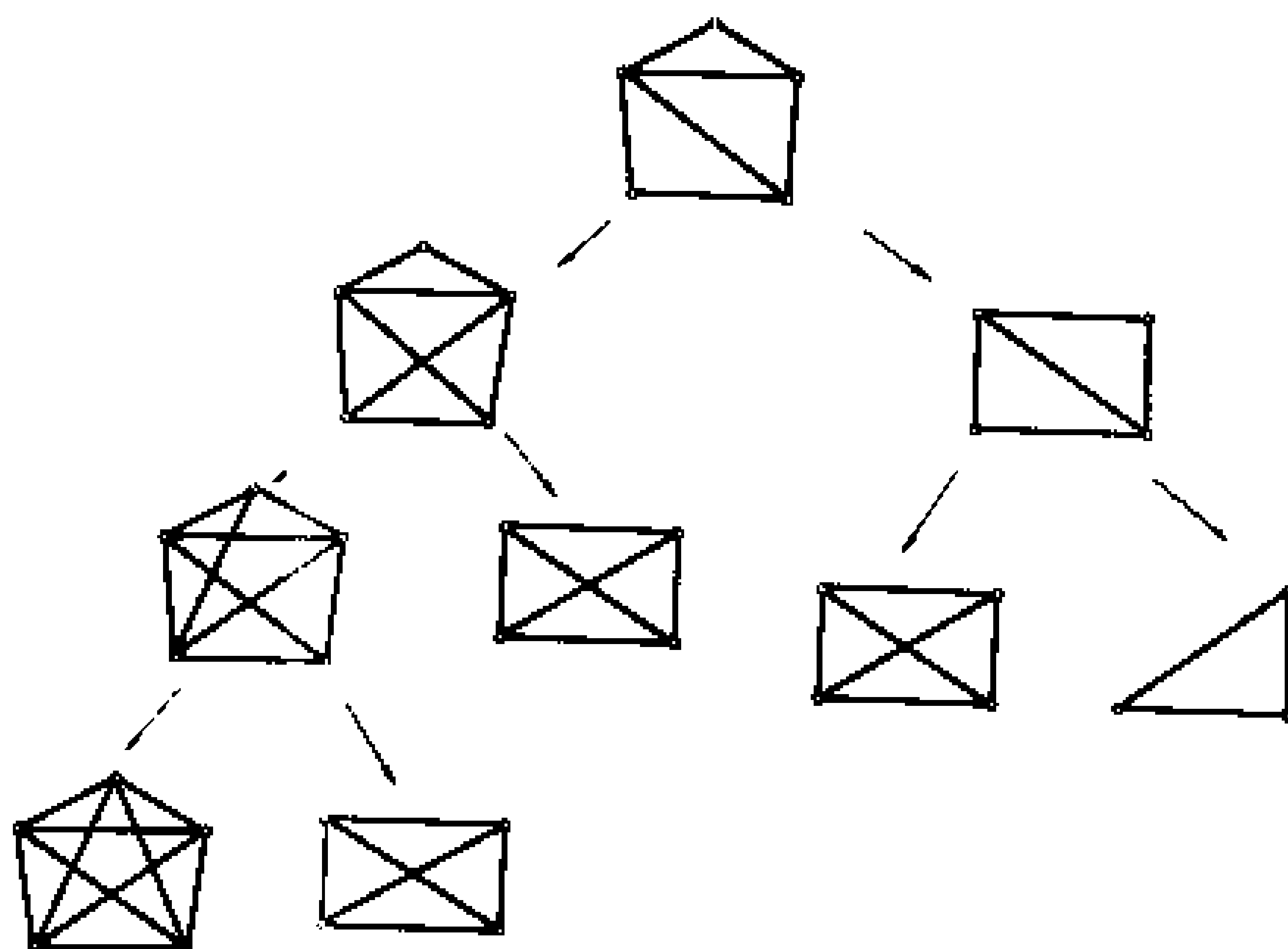


图 9.4-3

$$
\begin{aligned}
f(G,t) &= K_5 + 3K_4 + K_3 \\
&= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) \\
&\quad + 3t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2) \\
&= t^5 - 7t^4 + 18t^3 - 20t^2 + 8t
\end{aligned}
$$

由例 9.4.2 我们看到，5 阶图 G（图 9.4-2 所示的图）的色多项式为一个 5 次多项式，首项为 t^5，没有常数项，正负号相间出现。一般地，我们有下面的定理。

定理 9.4.2 p 阶图 G 的色多项式 $f(G,t)$，其首项为 t^p，常数项为零，此外系数的符号为正负相间。

［证明］ 对边数 q 用归纳法。显然，当 $q=0$ 时，定理成立。这是因为，p 个顶点的空图的色多项式为 t^p。

假设定理对少于 q 条边的图成立。

设 e 是 G 的一条边，则 $G-e$ 是有 p 个顶点 $q-1$ 条边的图，$G\cdot uv$ 是有 $p-1$ 个顶点和至少有 $q-1$ 条边的图。根据归纳法假设，存在非负整数系数 $a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_{p-2}$ 使

$$f(G-e,t) = t^p - a_{p-1}t^{p-1} + a_{p-2}t^{p-2} - \cdots + (-1)^{p-1}a_1t$$

和

$$f(G\cdot uv,t) = t^{p-1} - b_{p-2}t^{p-2} + b_{p-3}t^{p-3} - \cdots + (-1)^{p-2}b_1t$$

根据推论 9.4.1，有

$$
\begin{aligned}
f(G,t) &= f(G-uv,t) - f(G\cdot uv,t) \\
&= t^p - (a_{p-1}+1)t^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1}(-1)^i(a_{p-i}+b_{p-i})t^{p-i}
\end{aligned}
$$

于是定理得证。▌

习 题 九

9-1 设图 G 的色数为 $k=\chi(G)$，证明：图 G 至少有 $\binom{k}{2}$ 条边。

9-2 证明：若 G 中任意两个奇圈均有一个公共顶点，则 $\chi(G)\leqslant 5$。

9-3 证明：仅有的 1-临界图是 K_1，仅有的 2-临界图是 K_2，而仅有的 3-临界图是 k-奇圈（$k\geqslant 3$）。

9-4 设 $k=\max_H \delta(H)$，这里对图 G 的所有导出子图 H 取最大值，证明：$\chi(G)\leqslant k+1$。

9-5 证明推论 9.4.1。

9-6 利用推论 9.4.1 证明，若 G 是有 p 个顶点的树，则 $f(G,t)=t(t-1)^{p-1}$。

9-7 证明：若 G 是一个 n 圈，则 $f(G,t)=(t-1)^n+(-1)^n(t-1)$。

第十章 平 面 图

在许多实际问题中，往往涉及到图的平面性的研究，譬如，单面印刷电路板和集成电路的布线问题。近些年来，大规模集成电路的发展促进了图的平面性的研究。

本章讨论的是：平面图的概念，欧拉公式，图的可平面性，平面性算法和对偶图。

10.1 平面图的概念

定义 10.1.1 如果图 G 能够画在曲面 S 上，且除端点处之外任何两条边均不相交，则称图 G **被嵌入**(embedding)曲面 S 上。

特别地，当曲面 S 为一个平面时，我们有下面的定义。

定义 10.1.2 如果一个图 G 可以嵌入平面上，则称 G 是**可平面图**(planar graph)，已经嵌入平面上的图称为**平面图**(plane graph)。

例 10.1.1 图 10.1-1 所示的图 G 是一个可平面图(10.1-1(a))，图 10.1-1(b)所示的图 $\tilde{G}$ 是 G 的一个平面嵌入，即为平面图。

图 10.1-2 所示的图是一个不可平面图。

如果顶点 1,2,3 表示三种信号源，4,5,6 表示三种器件。假每一个器件均需要三种信号源，但三个器件之间不能互相连接，这种要求在一个平面上是不能实现的，因为在一个平面上，按照上述要求最多只能布下八条不相交的线，而第九条线(图 10.1-2 中的虚线)必将与其他八条线之一相交。因此，只能用两个平面才能实现所有九条线互不相交。

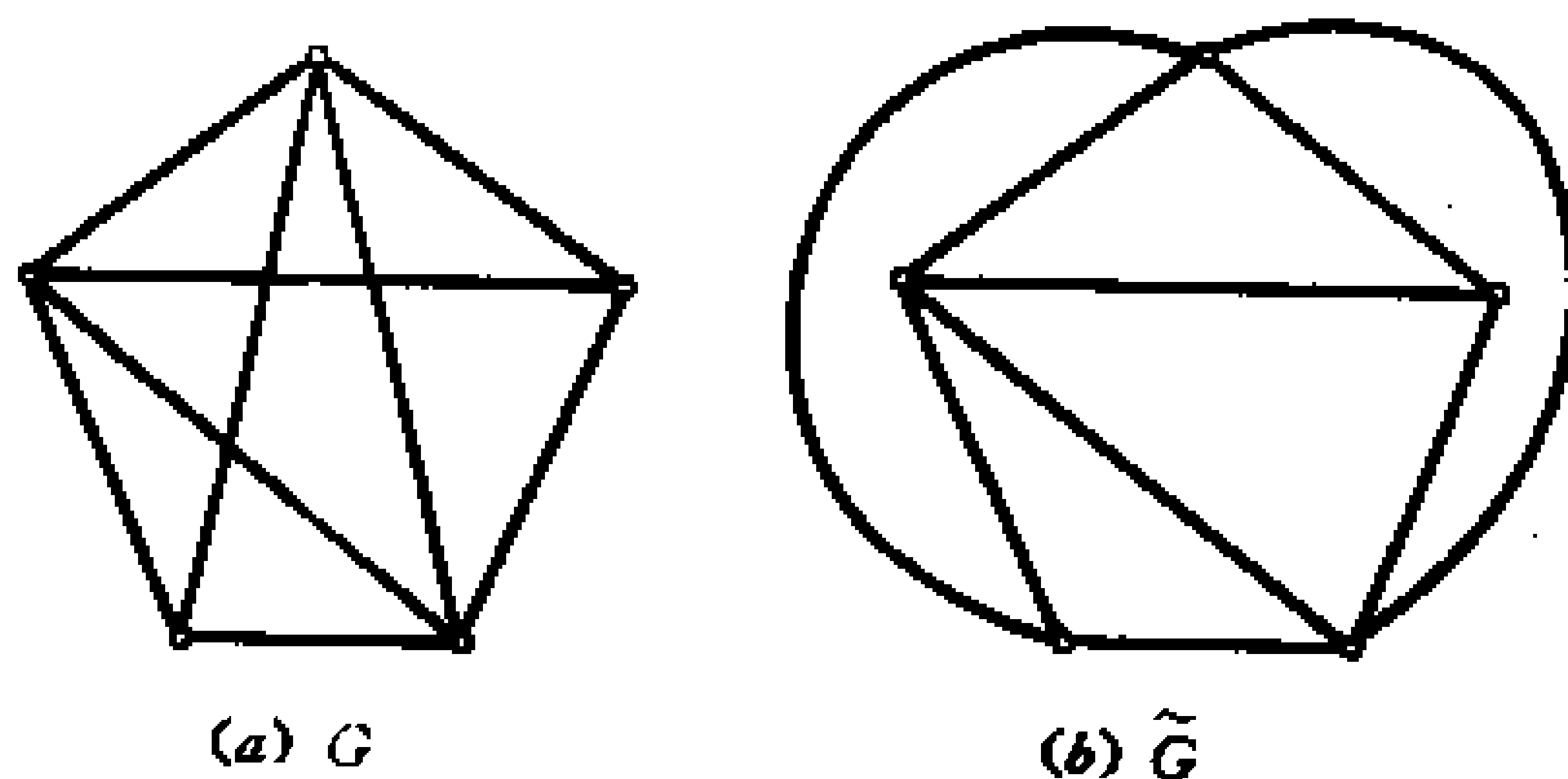


图 10.1-1

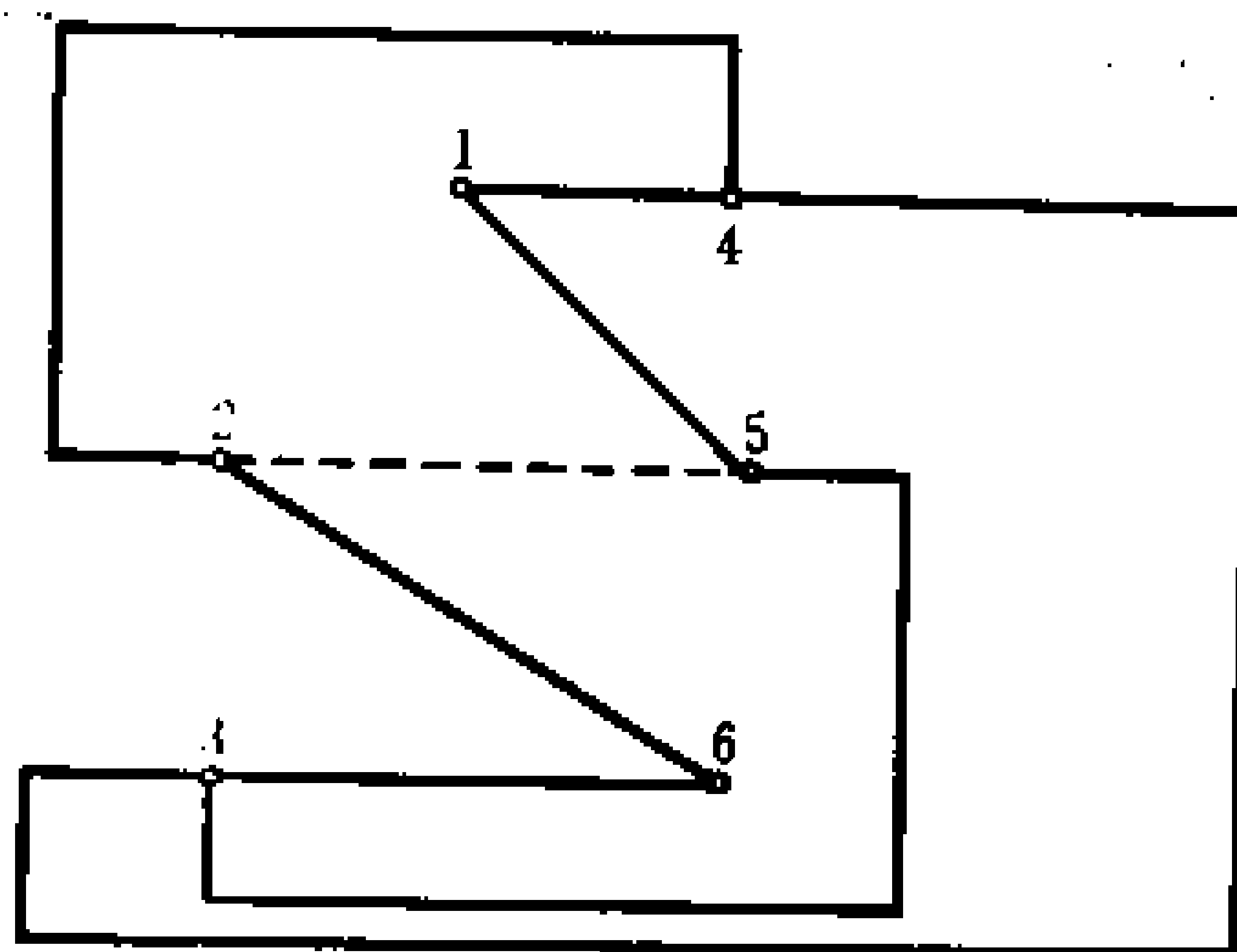


图 10.1-2

下面的定理是显然的。

定理 10.1.1 一个图是可平面的当且仅当它的每个分支是可平面的。

定理 10.1.2 一个图是可平面的当且仅当它的每一个块是可平面的。

［证明］ 如果图的每个块都是可平面的，那么每一个块都可以画在平面上而没有边相交(端点除外)。因此，G 可以画

在平面上且任意两条边除端点处外均不相交，也就是图可以嵌入在一个平面上，故 G 为可平面的，反之亦然。 ∎

定义 10.1.3 平面图限定的各个区域称为面(face)。有界区域称为**内部面**，无界的区域称为**外部面**。

内部面的边界是包围该面的诸边所构成的圈(在电路理论中称为**网孔**)。

例如。图 10.1-3 所示的平面图中，R_1，R_2，R_3，R_4 是内部面，R_5 是外部面。

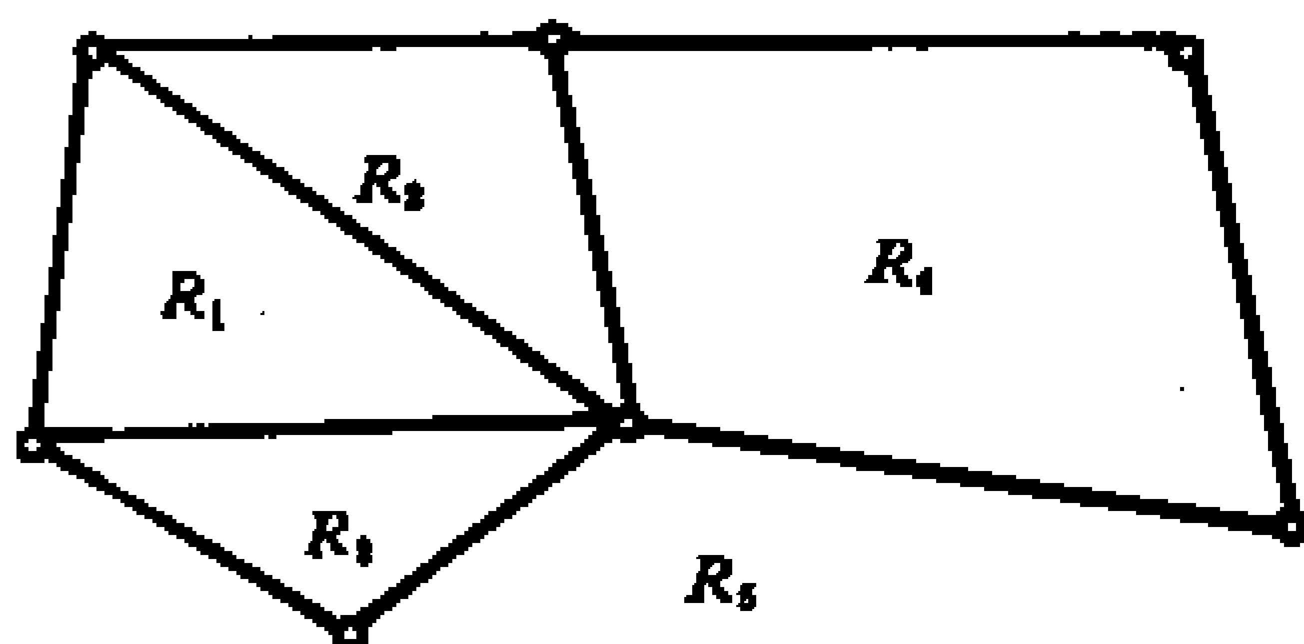


图 10.1-3

需要指出的是，同一个图的不同划法，它们的面也不相同。例如图 10.1-4 中的 G_1 和 G_2 是同构的，但它们的面不相同。

定义 10.1.4 一个连通的平面图与它所有的面称为一个**平面地图**(plane map)。

平面图有一个有趣的性质：对一个平面图的一种画法的任一内部面，总可以通过所谓"测地投影"而变成外部面。

所谓"测地投影"是：把球放置在平面上，并令球与平面的接触点为球的南极，然后用直线把平面的任一点 P 与球的北极 N 连接(N 极作为投影中心)，此直线与球面的交点为 P'(图 10.1-5)。这样，平面上的所有的点和球面上除去 N 的所

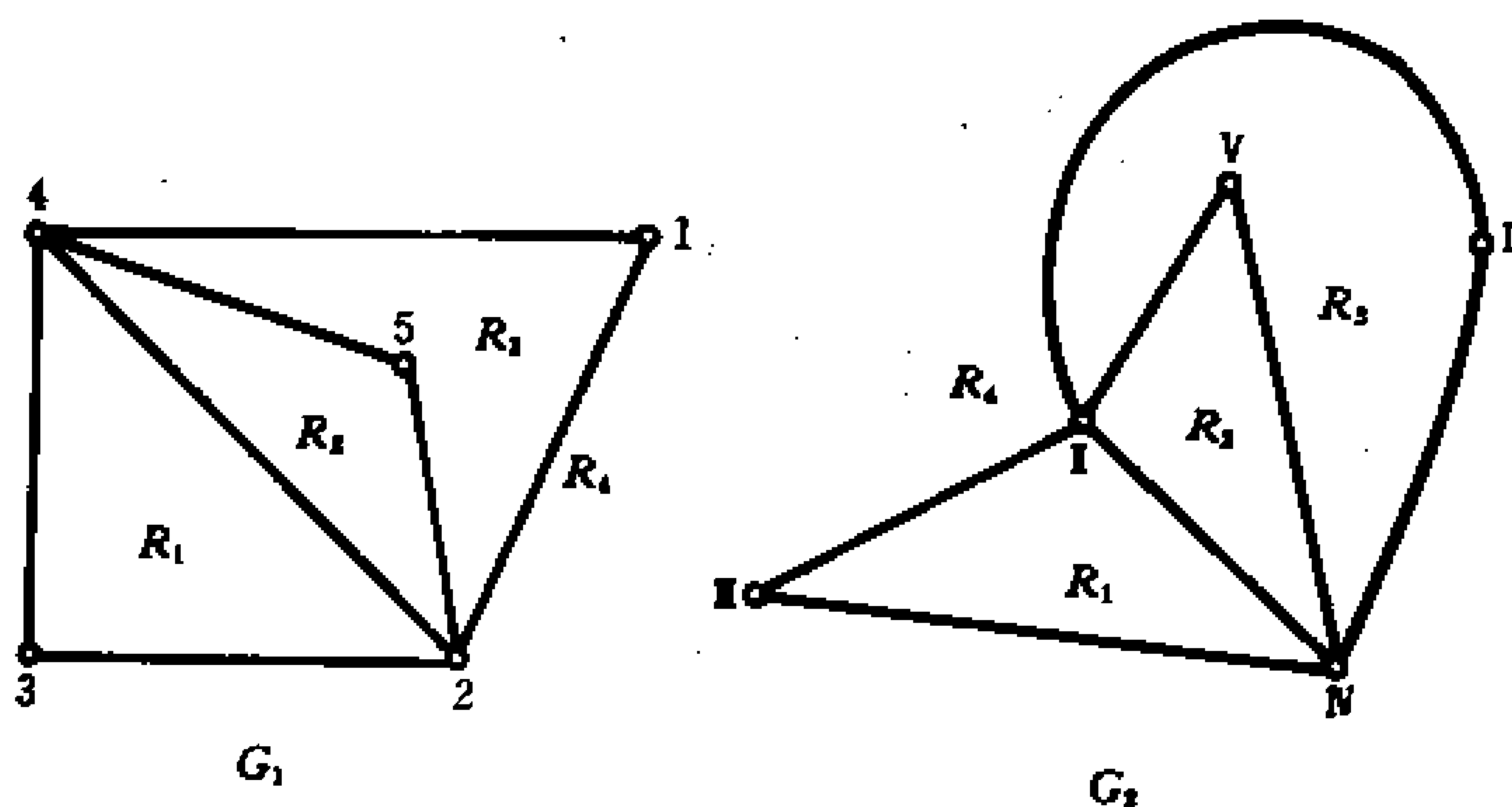


图 10.1-4

有点建立了一一对应。

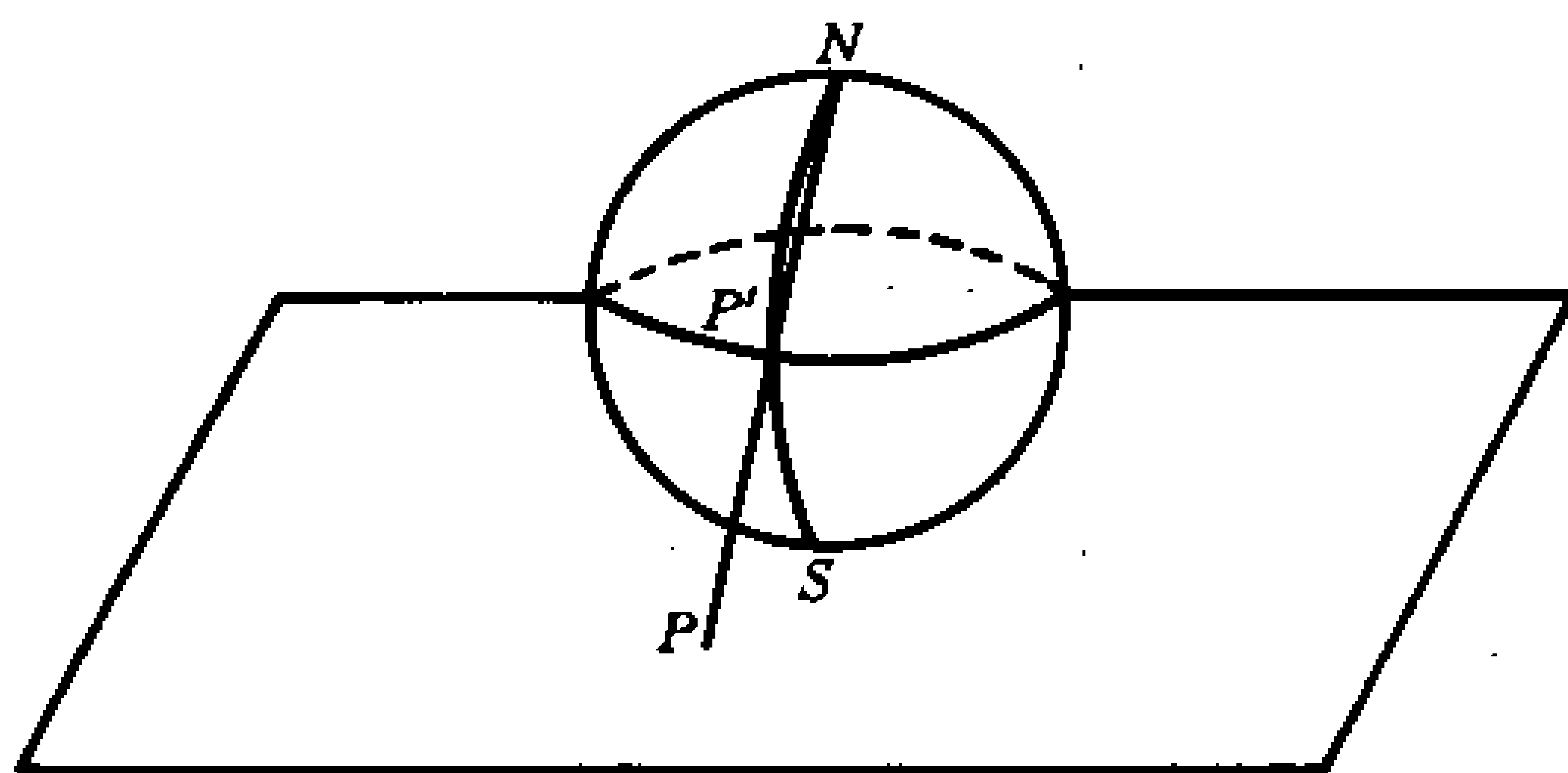


图 10.1-5

假如给定图 G 的一种画法，R 是要改成外部面的任一内部面。我先按测地投影法把图 G 画到球面上去，在球面上与 R 对应的区域内任取一点，把球转动，使该点为投影中心，再把图画到平面上，那么在图 G 的这种画法中 R 为外部面。

定义 10.1.5 设 G 为平面图。如果任意两个互不邻接的顶点 u,v，使得 $G+(u,v)$ 成为不可平面图，则称图 G 是**最大可平成图**(maximal planar graph)。

例如，图 10.1-6 所示的图 G 为一个最大可平面图。图 10.1-7 所示的(a)、(b)为图 G 的两个平面嵌入。

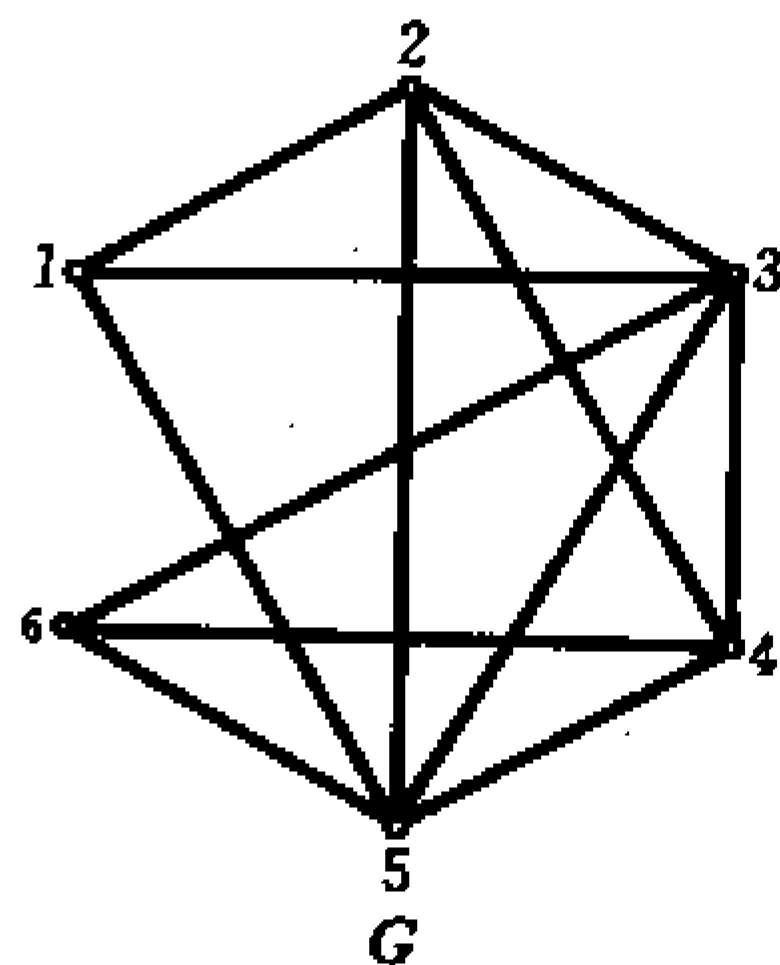
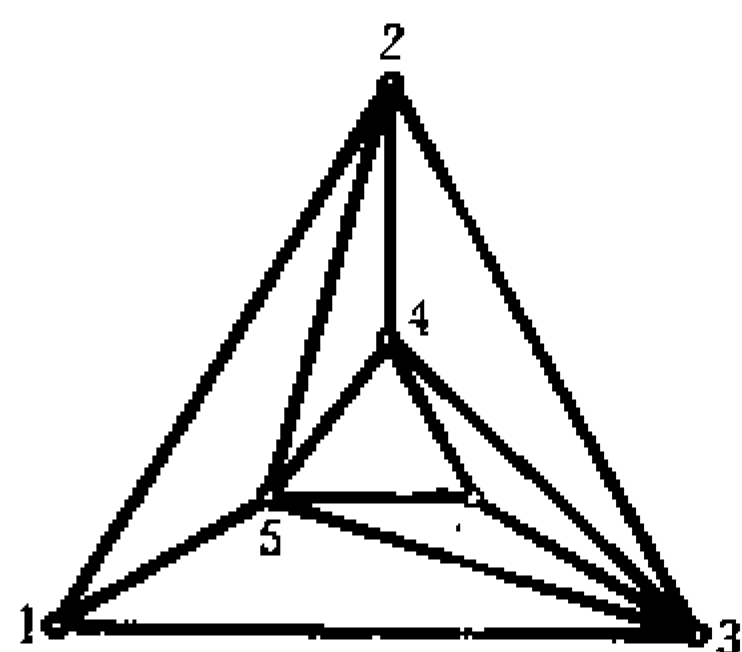
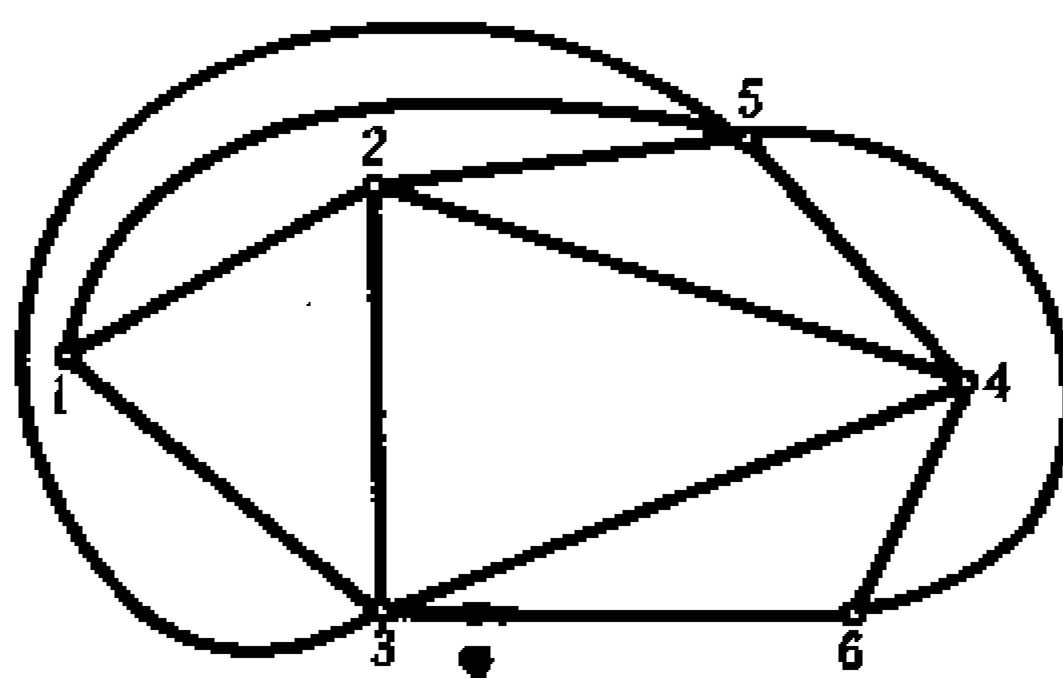


图 10.1-6



(a)



(b)

图 10.1-7

定理 10.1.3 最大平面图的任何一个面都是三角形。

[证明] 反证法。如果图 G 的平面嵌入至少有一个不是三角形，设它为 $v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n v_1$(这是因为每个面的边界组成一个圈)且 $n \geqslant 4$ 为了方便起见，不妨设 $n=4$。

分三种情况：

(1) 若 v_1 与 v_3 不邻接。

因为 $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ 为一内部面的边界，联线 $v_1 v_3$ 不破坏图的平面性。此与 G 是最大平面图的假设矛盾。

(2) 若 v_1 与 v_3 邻接。

因为 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 构成内部面的边界，边 $(v_1、v_3)$ 必在此面的外部，若这时 v_2 与 v_4 不邻接，联接 v_2v_4 也不破坏图的平面性，此与假设矛盾。

(3) 若 v_1 与 v_3 邻接，v_2 与 v_4 邻接。

由于 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 是内部面的边界，故边 $(v_1、v_3)$ 和边 $(v_2、v_4)$ 都应在此面的外部，因而必相交，此与图 G 的可平面性矛盾。▮

定理 10.1.4 顶点数≥4 的最大平面图 G，其顶点的最小度≥3。

［证明］ 设 G 为最大平面图，其最小度为 δ，$v\in V(G)$，$G-v$ 是一平面图，v 在 $G-v$ 的一个面内。子图 $G-v$ 的顶点集中至少有三个顶点在面的边界上，由极大性，在 G 中 v 必须与这些顶点均邻接。于是对任何一个顶点 $v\in V(G)$，有 $\deg(v)\geq 3$，故

$$\delta(G)=\min_{v\in V(G)}\{\deg(v)\}\geq 3 \quad ▮$$

定义 10.1.6 若一个可平面图嵌入平面后，它的所有顶点在同一个面的边界上，则称为**外可平面图**(outer planar graph)。

图 10.1-8 中，图 G 是一个外可平面图。图 10.1-9(a)，(b) 是图 G 的两个外平面嵌入。(图 10.1-9(a) 所示的图，其顶

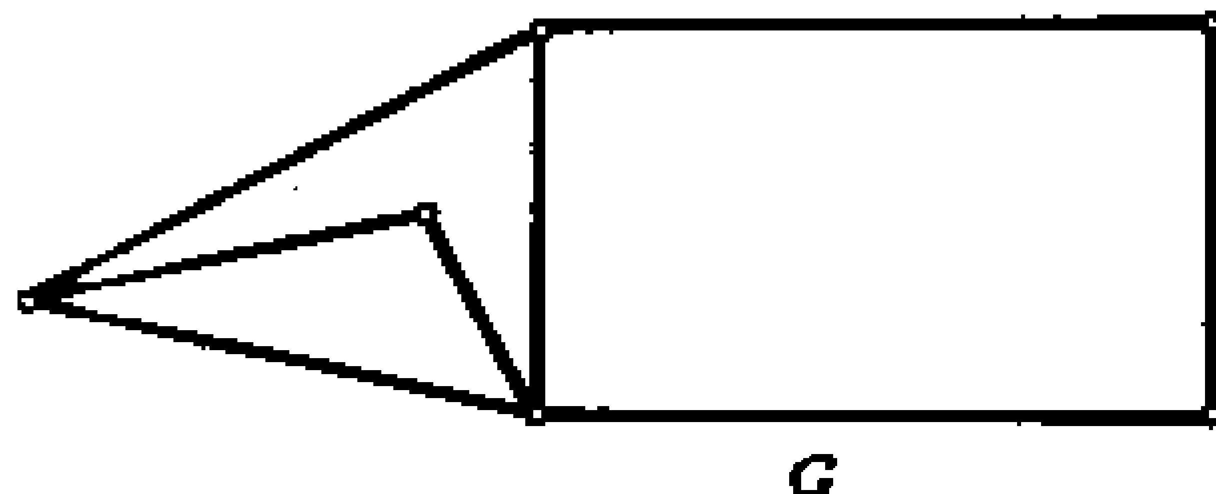


图 10.1-8

点均在一个内部面中，图 10.1-9(*b*)所示的图，其顶点均在外部面中。

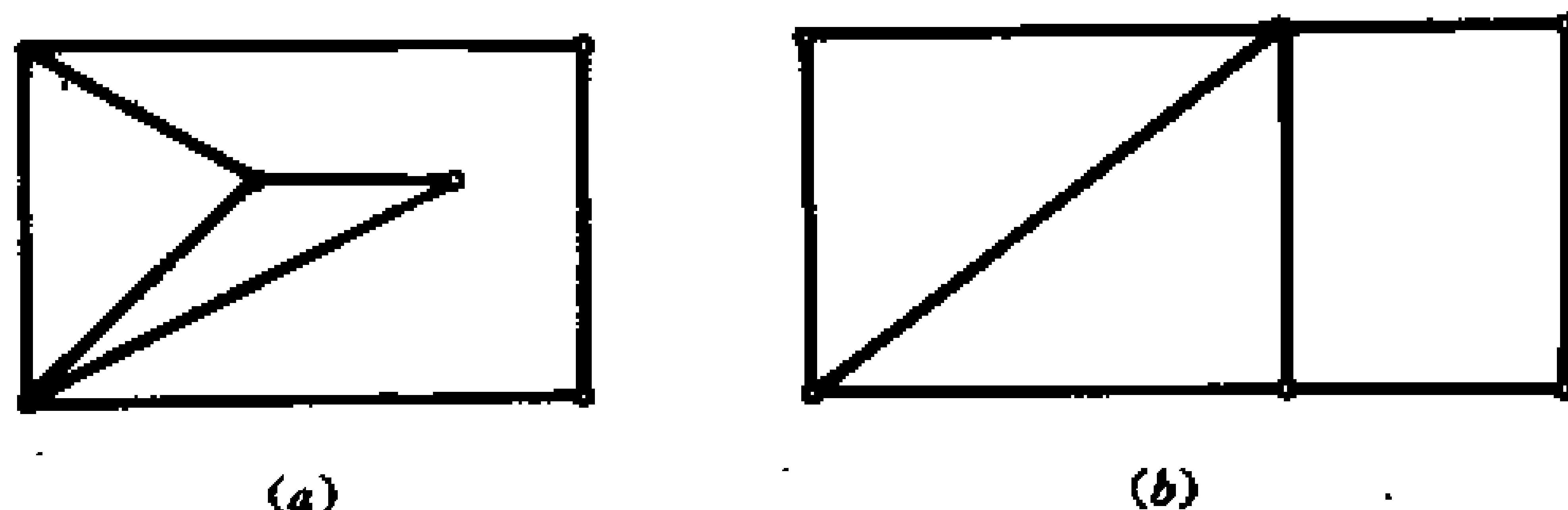


图 10.1-9

显然，一个图是外可平面的当且仅当它的每个块是外可平面的。

定义 10.1.7 一个外可平面图是**最大外可平面的**，若不能再加边而不失去外可平面性。

图 10.1-10 中给出有六个顶点的三个最大外可平面图。

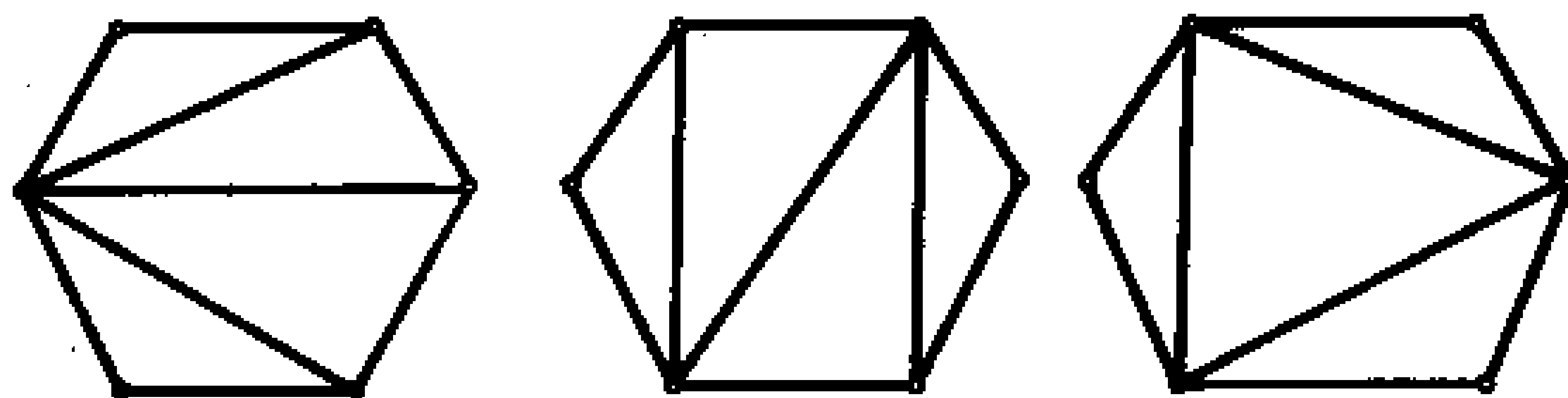


图 10.1-10

定理 10.1.5 设 G 是最大外可平面图，有 $p\geqslant 3$ 个均在外部面上的顶点，则 G 有 $p-2$ 个内部面。

［证明］ 显然，定理对 $p=3$ 时成立。假定对 $p=n$ 时定理成立。令 G 有 $p=n+1$ 个顶点和 m 个内部面。显然，G 一定有一个度等于 2 的顶点 v 在外部面上。于是，图 $G-v$ 的内部面少 1，故有 $m-1=n-2$，即 $m=n-1=p-2$。▋

10.2 欧拉公式

定理 10.2.1 (欧拉公式)设 G 是有 p 个顶点，q 条边和 f 个面(包括外部面)的连通平面图，则

$$f+p-q=2 \tag{10.2-1}$$

［证明］ 在平面图 G 中增加边，使 G 变成最大平面图。每加一条边，边数和面数均增加 1。假设增加 m 条边后，G 变成最大平面图 G_1，则 G_1 的面数为 $f+m$，顶点数为 p，边数为 $q+m$，而

$$(f+m)+p-(q+m)=f+p-q$$

即在平面图 G 中增加边后，数值 $f+p-q$ 不变。

在平面图 G 中，去掉顶点 v 和 v 的关联集，即去掉 $\deg(v)$ 条边，得图 G_1。因为去掉一条边面数减少 1，去掉与 v 关联的最后一条边面数不再减少。于是 G_1 的面数为 $f-(\deg(v)-1)$，G_1 的顶点数少 1，即为 $p-1$，边是 $q-\deg(v)$，这时

$$(f-\deg(v)-1)+(p-1)-(q-\deg(v))=f+p-q$$

这就是说，在图 G 中去掉一个顶点和与此顶点关联的所有边，数值 $f+p-q$ 不变。

因为最大平面图的每一个面均为三角形，所以对任一平面图 G，连续进行上面两个过程，G 变成三角形，而且 G 的 $f+p-q$ 值等于三角形的 $f+p-q$ 值，对 K_3 而言 $f+p-q=2+3-3=2$，于是对任一平面图有

$$f+p-q=2 \quad \blacksquare$$

例 10.2.1 如图 10.2-1 所示的平面图 G。

(1) 在图 G 中增加边，把 G 变成最大平面图 G_1，(图 10.2-2)。

(2) 在 G_1 中去掉顶点 v_1 和 v_1 关联的所有边，得图 G_2(图 10.2-3)。

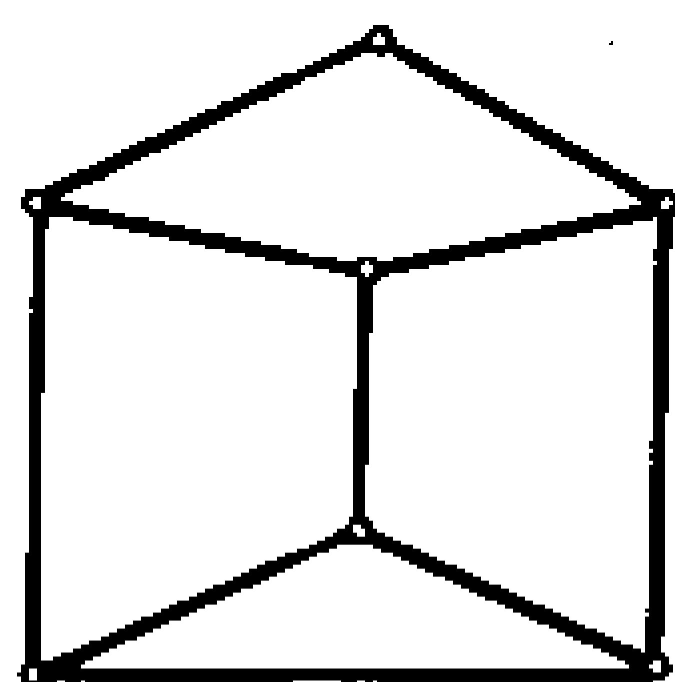


图 10.2-1

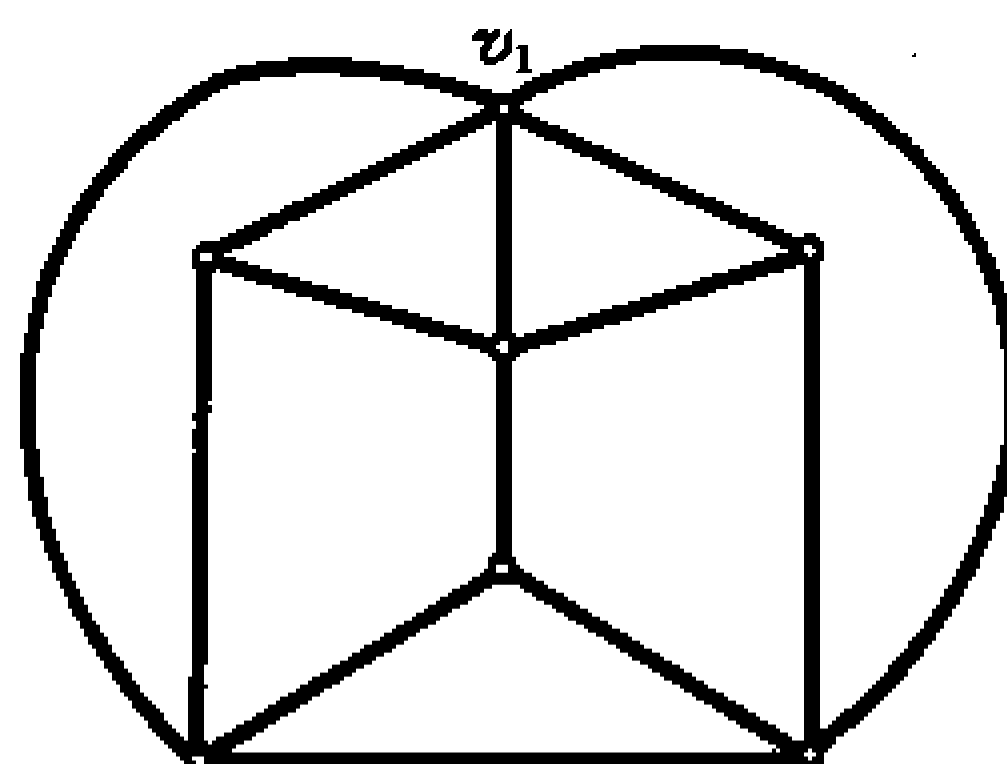


图 10.2-2

(3) 在 G_2 中增加边，把 G_2 变成最大平面图 G_3(图 10.2-4)。

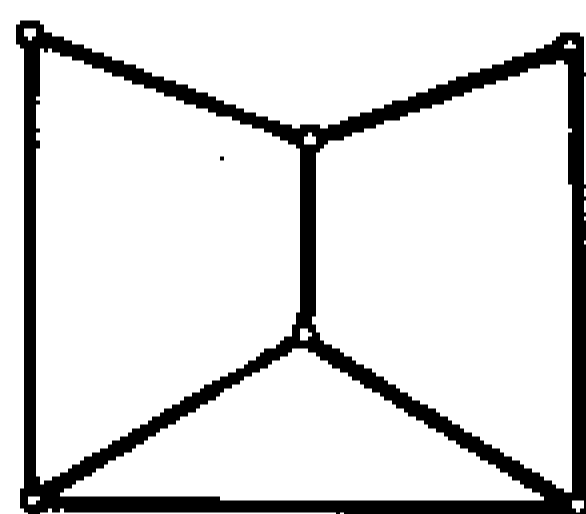


图 10.2-3

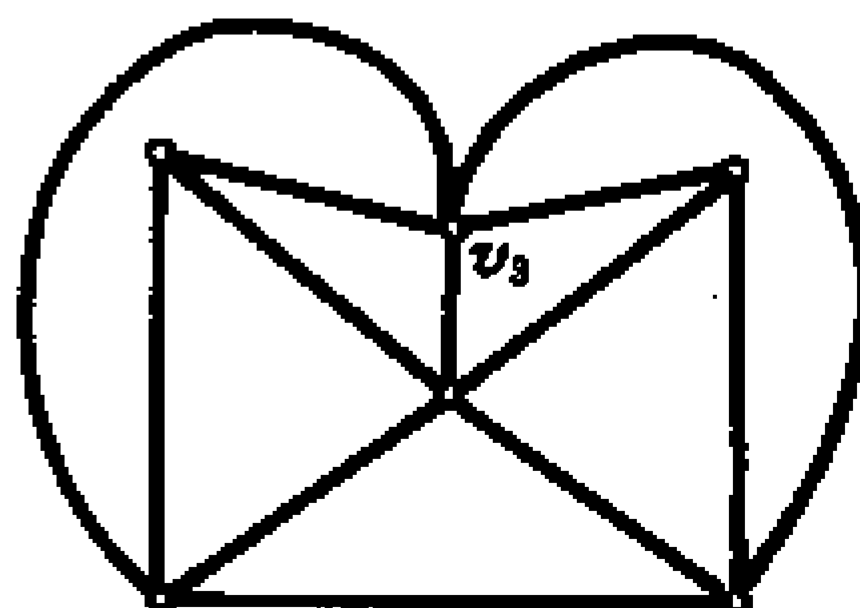


图 10.2-4

(4) 在 G_3 中去掉顶点 v_3 和 v_3 关联的所有边，得图 G_4(图 10.2-5)。

(5) 在 G_4 中增加边，把 G_4 变成最大平面图 G_5(图 10.2-6)。

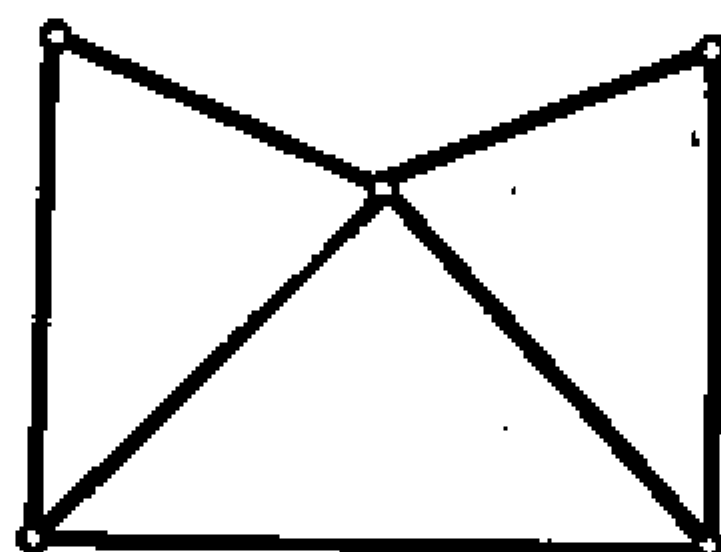


图 10.2-5

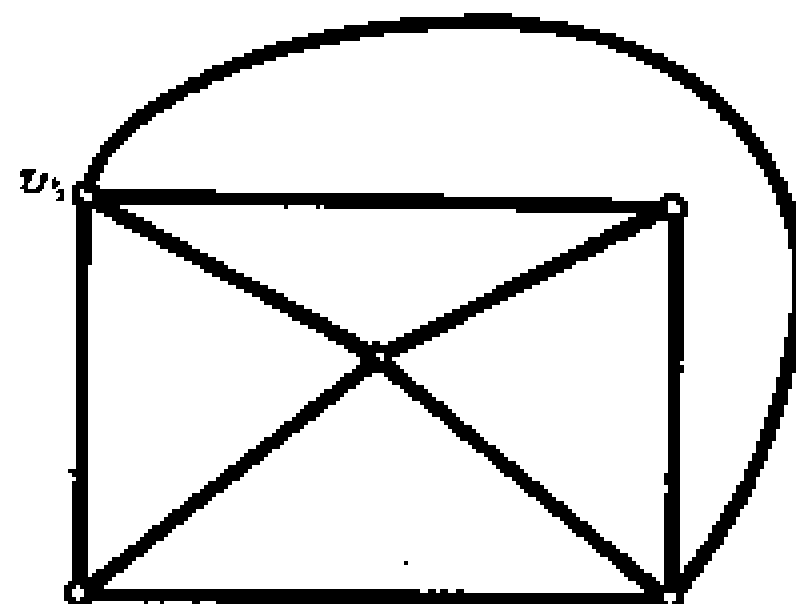


图 10.2-6

(6) 在 G_5 中去掉顶点 v_5 和 v_5 关联的所有边，得 G_6（图 10.2-7）。

(7) 在 G_6 中增加边，把 G_6 变成最大平面图 G_7（图 10.2-8）。

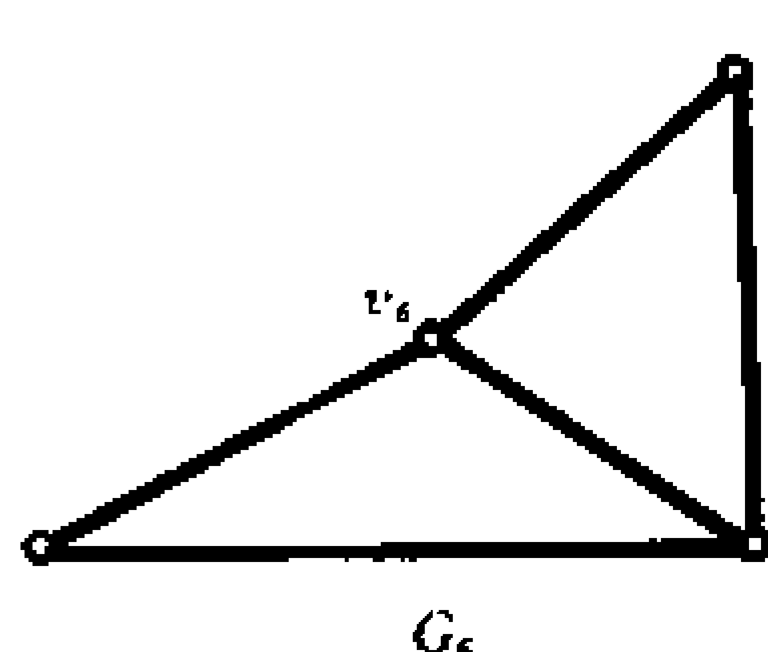


图 10.2-7

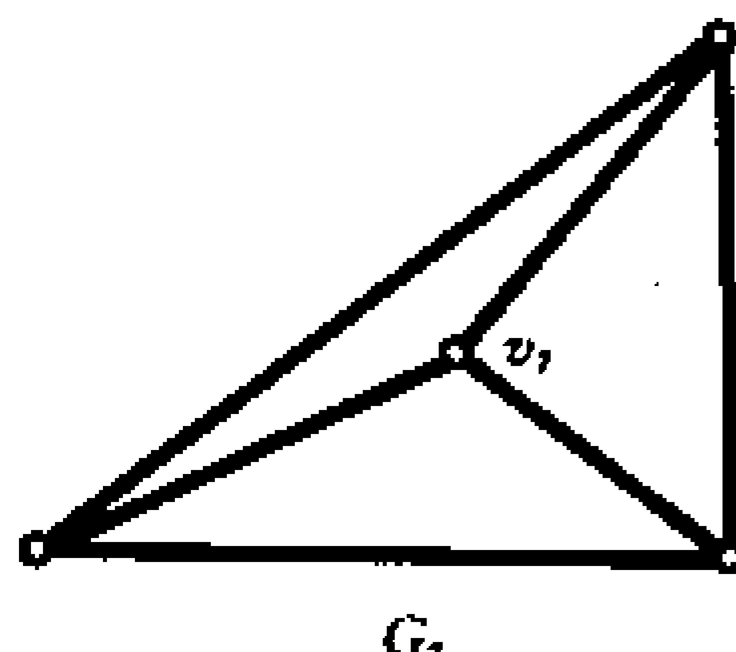


图 10.2-8

最后，去掉顶点 v_7 和 v_7 关联的所有边，得一个三角形。

公式(10.2-1)是欧拉研究凸多面体时所得的结论：对于一个有 V 个顶点，E 条棱，F 个面的凸多面体，有 $F+V-E=2$。这是因为，一个凸多面体可在一个球面上表示出来，其任意两边除端点外不再相交。在某一面里取一点，以此点为中心，作测地投影，这个凸多面体可在平面上表示出来，所得的将是一个相应的平面图。

由欧拉公式可以得出一系列推论。

推论 10.2.1 若平面图 G 的每个面的边界都是长为 n 的圈，则

$$q=\frac{n(p-2)}{n-2} \tag{10.2-2}$$

其中 p 为图 G 的顶点数，q 为边数。

［证明］ 设 G 有 f 个面，因为每条边在两个面的边界上，故

$$nf=2q, \qquad 即 \quad f=\frac{2q}{n}$$

代入(10.2-1)式，有

$$\frac{2q}{n} + p - q = 2$$

解出 q，得

$$q = \frac{n(p-2)}{n-2} \quad ■$$

推论 10.2.2 设 G 是平面图($p \geqslant 3$)，则

$$q \leqslant 3p - 6 \qquad (10.2\text{-}3)$$

[证明] 由于最大平面图的面都是 K_3，故将 $n=3$ 代入(10.2-2)式，有

$$q = \frac{3(p-2)}{3-2} = 3p - 6$$

因为平面图的边数不大于最大平面图的边数，故对平面图，有

$$q \leqslant 3p - 6 \quad ■$$

推论 10.2.3 K_5 是不可平面的。

[证明] 若 K_5 是可平面的，将 $p=5,q=10$ 代入(10.2-3)式，有

$$10 \leqslant 3 \times 5 - 6 = 9$$

这是一个矛盾，故 K_5 是不可平面的。■

推论 10.2.4 若平面图 G 中不含 K_3，则

$$q \leqslant 2p - 4 \qquad (10.2\text{-}4)$$

[证明] 设 G 的 f 个面分别是 n_1 边形，n_2 边形，…，n_f 边形。因为 G 不含 K_3，故

$$n_i \geqslant 4 \qquad (i = 1,2,\cdots,f)$$

又

$$\sum_{i=1}^{f} n_i = 2q$$

和

$$4f \leqslant 2q$$

由(10.2-1)式，有

$$2 = f + p - q \leqslant \frac{q}{2} + p - q = p - \frac{q}{2}$$

即

$$q \leqslant 2p - 4 \quad \blacksquare$$

推论 10.2.5 完全二部图 $K_{3,3}$是不可平面的。

[证明] 因为 $K_{3,3}$不含 K_3。若 $K_{3,3}$是可平面的，则由(10.2-4)式，有

$$9 \leqslant 2 \times 6 - 4 = 8$$

这是不可能的，故 $K_{3,3}$是不可平面的。 ∎

图 K_5 和 $K_{3,3}$在研究图的可平面性的特征中起着重要的作用。

推论 10.2.6 每一个 $p \geqslant 4$ 的可平面图 G 至少有四个顶点的度不能超过 5。

[证明] 不妨设 G 是最大可平面图。设至少 $p-3$ 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{p-3}$的度超过 5，则由定理 10.1.4，有

$$\begin{aligned} 6(p-3) &\leqslant \sum_{i=1}^{p-3} \deg(v_i) \\ &= 2q - (\deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3)) \\ &\leqslant 2q - 9 = 6p - 21 \end{aligned}$$

得出矛盾。 ∎

10.3 库拉图斯基定理

这一节我们来给出判定图的可平面性的一个定理叫做库拉图斯基(Kuratowski)定理。这个定理给出一个图是可面图的充分必要条件，定理的结果是非常好的，可以说解决了平面

性的判定问题。但是要用这个定理来检查图的平面性却是相当困难，有时甚至是无法进行的。在下一节中我们将给出图的平面性算法。

库拉图斯基定理的证明很长，有兴趣的读者可以阅读。

定理 10.3.1（库拉图斯基定理） 一个图是可平面的当且仅当它不含同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图。

为了证明定理 10.3.1，我们先来做一系列的准备工作。

定义 10.3.1 若图 G_1 可由图 G_2 经过下列过程得到：移去边 $e=v_1v_2$，加上一个新的顶点 v 与 v_1，v_2 邻接，则称 G_1 与 G_2 同胚(homeomorphism)。

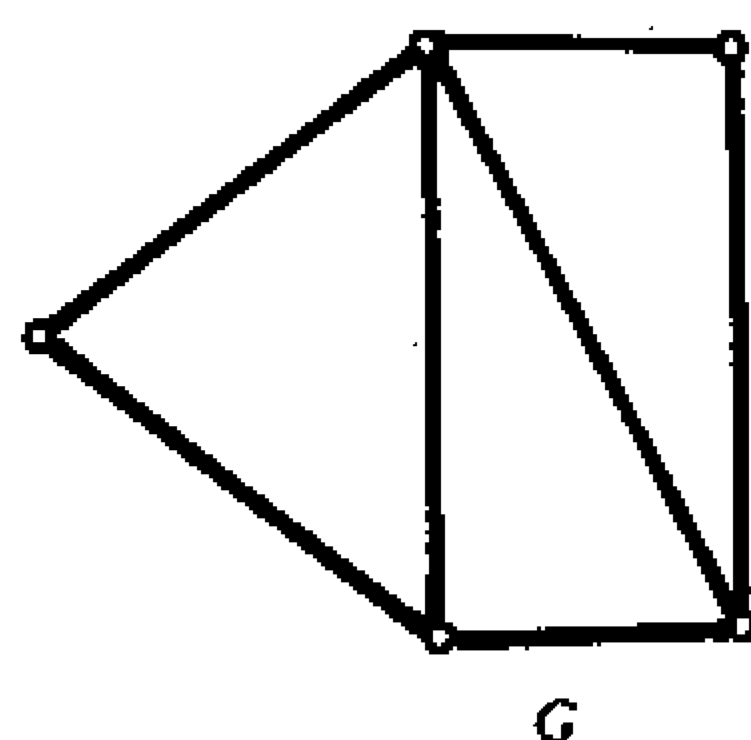
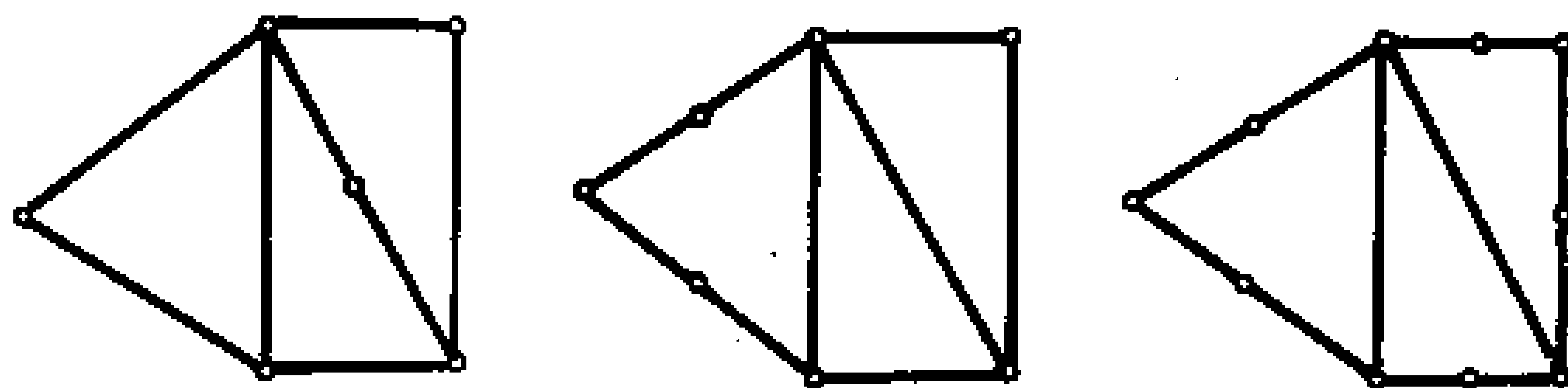


图 10.3-1

例如，图 10.3-1 所示的图 G 与图 10.3-2 所示的图均同胚。

根据同胚的定义，不难证明图的平面性在同胚下保持不变。


图 10.3-2

上一节我们证明了 $K_{3,3}$ 和 K_5 是不可平面的。因此，一个平面图必不包含同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图。例如在图 10.3-3 所示的彼得森(Petersen)图中，包含一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图（见图 10.3-4(a)） 为清楚起见，把图 10.3-4(a)改画成图 10.

3-4(b)所示的图),所以彼得森图是不可平面的。

下面我们再来介绍“片”的概念。这个概念不仅在证明定理 10.3.1 中要用到,在讨论图的平面性算法时也要用到。

定义 10.3.2 设 H 是 G 的一个子图。在边集 $E(G)-E(H)$ 中定义一个关系,记作“$\sim$”:

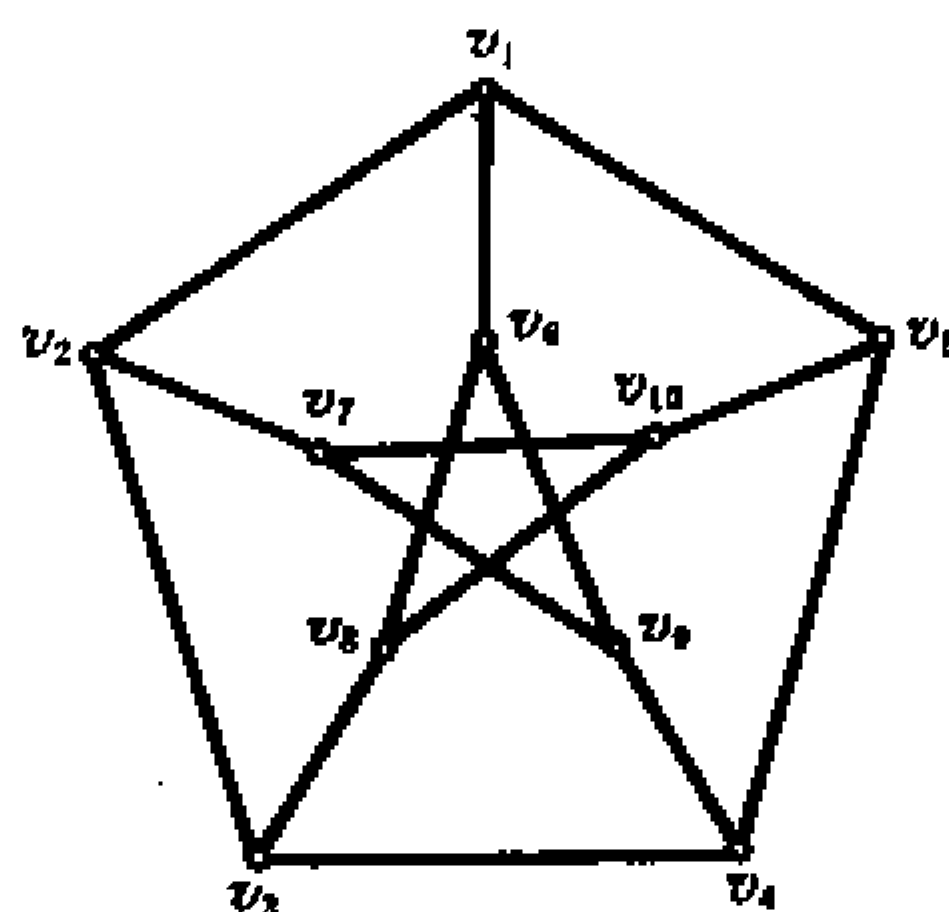
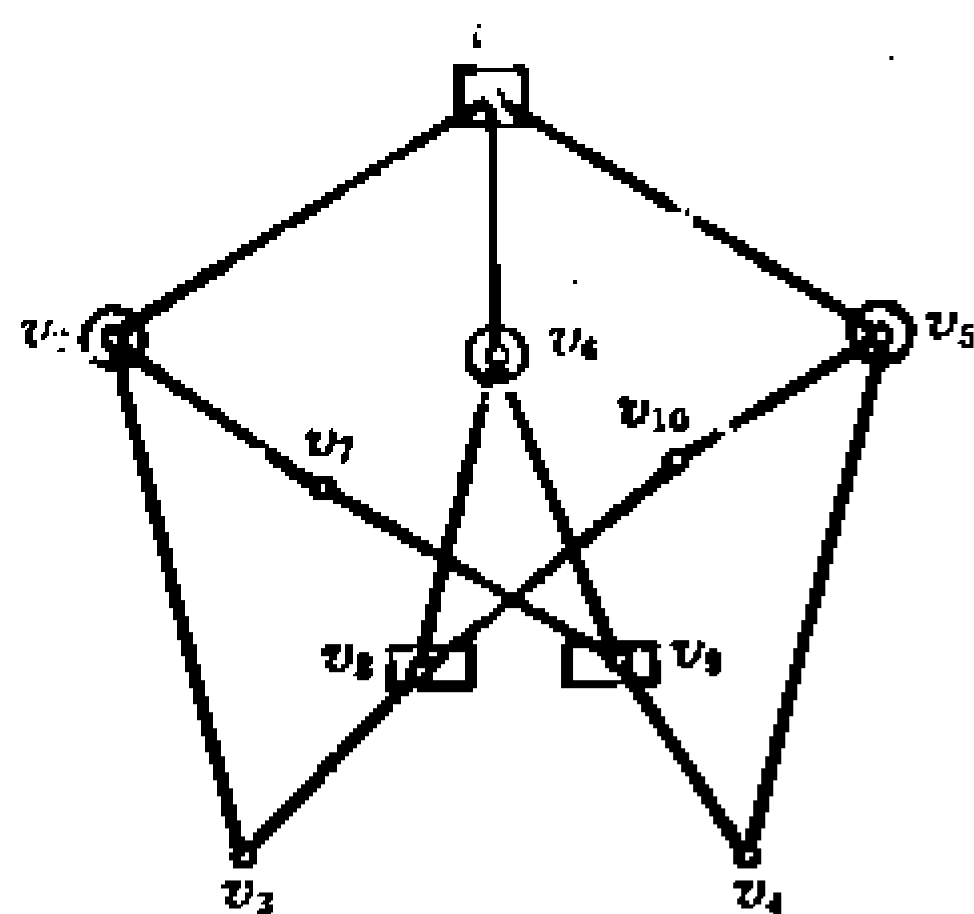
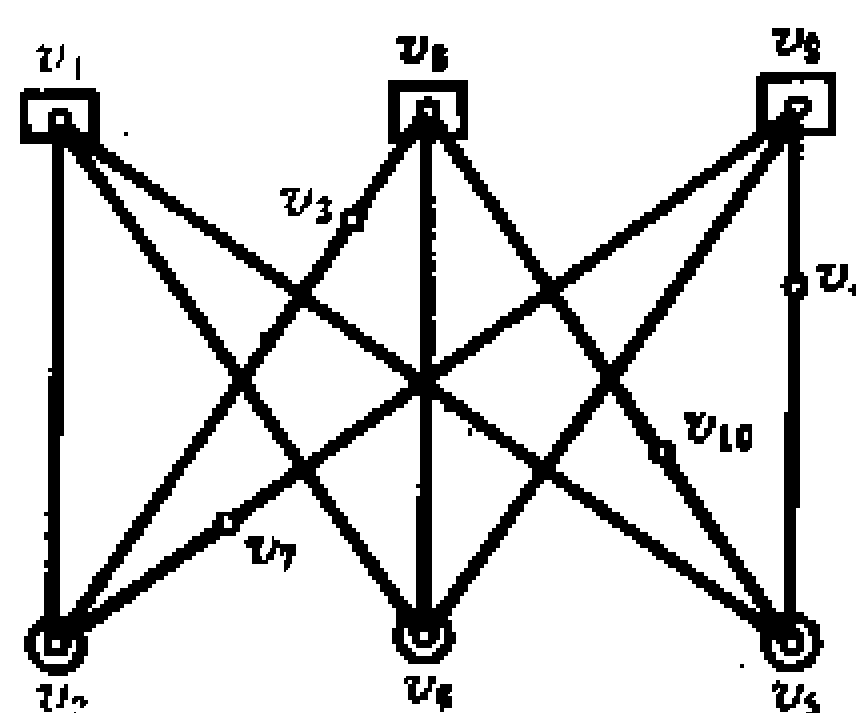


图 10.3-3 彼得森图



(a)



(b)

图 10.3-4 同胚于 $K_{3,3}$ 的子图

1° 若 $e_1,e_2\in E(G)-E(H)$,e_1,e_2 由一条不在 $E(H)$ 中的边组成的链 μ 相连接,且 e_1 是 μ 的第一条边,e_2 是 μ 的最后一条边;

2° μ 的内部顶点不是 H 的顶点;

则 $e_1\sim e_2$。

容易验证,关系“$\sim$”是一个等价关系。因此可以把边集 E

$(G)-E(H)$按这个等价关系分类。

定义 10.3.2 由关系"~"确定的一个等价类诱导出的$G-E(H)$的子图,称为G中H的片(piece),片与H的公共顶点称为片的附着点(vertices of attachment)。

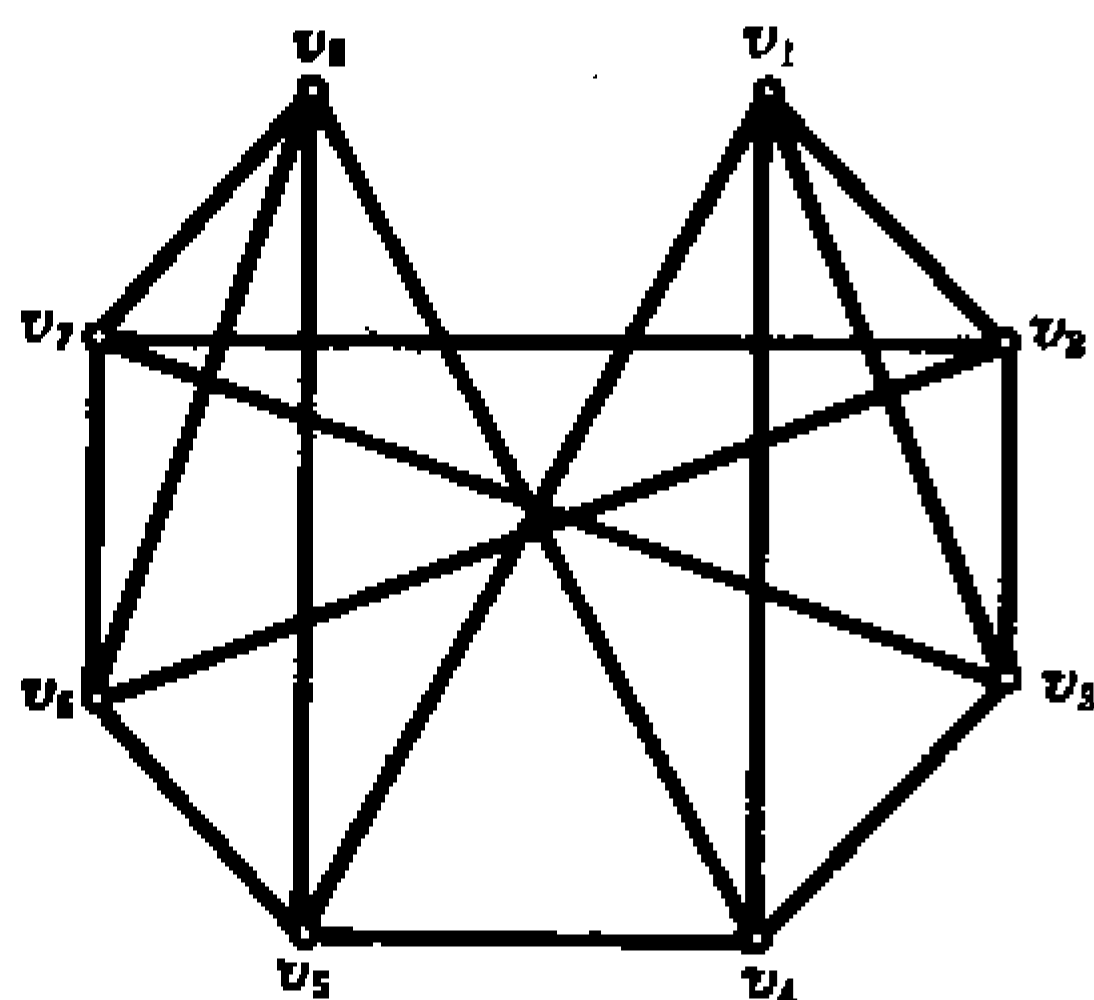


图 10.3-5

例 10.3.1 图G如图10.3-5所示。在G中取圈$C=v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_2$作为子图H,那么G中C的片有四个,它们分别是(图 10.3-6):

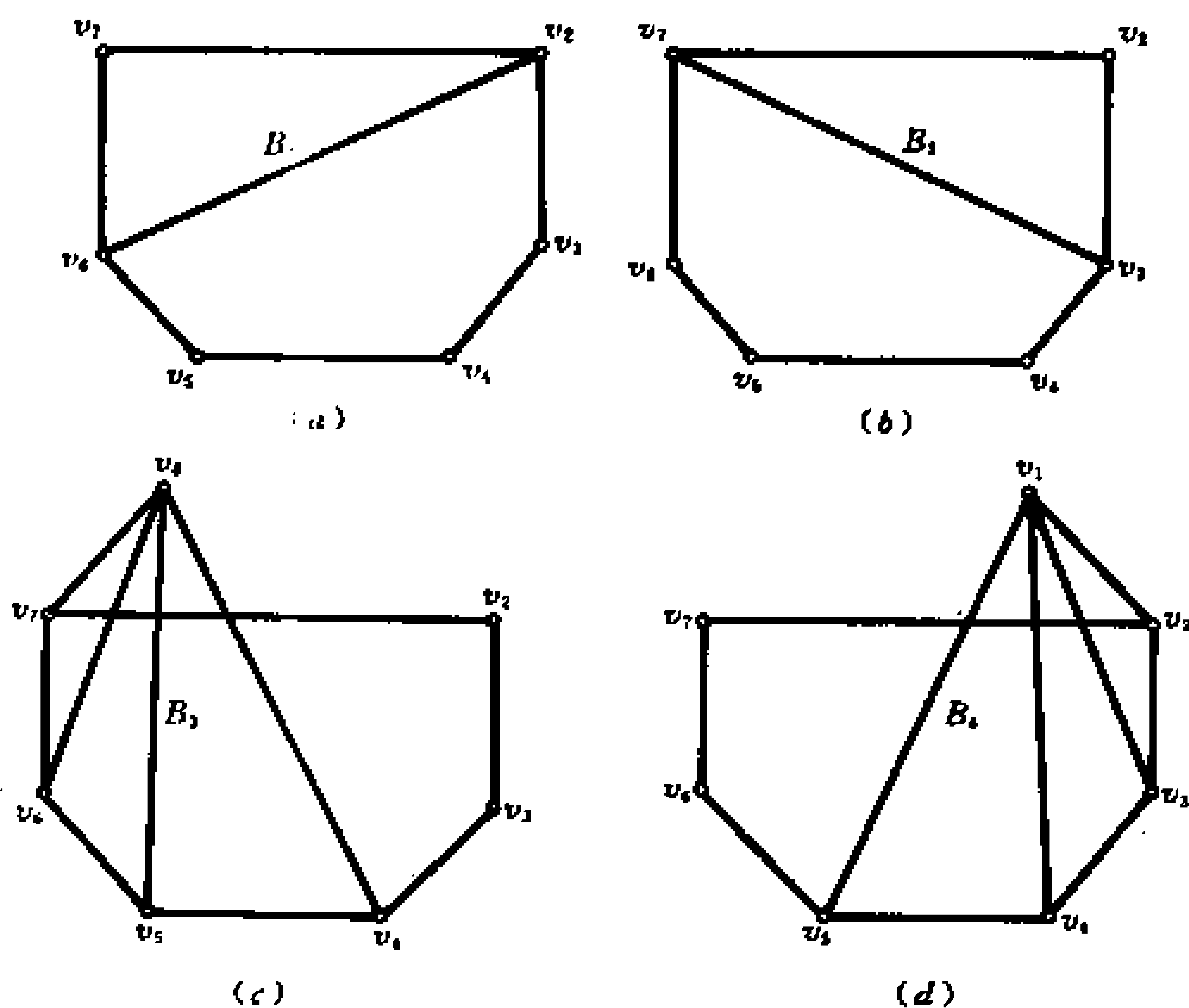


图 10.3-6

$$B_1 = \{(v_2, v_6)\}$$

B_1 的附着点是 v_2, v_6；

$$B_2 = \{(v_3, v_7)\}$$

B_2 的附着点是 v_3, v_7；

$$B_3 = \{(v_4, v_8), (v_5, v_8), (v_6, v_8), (v_7, v_8)\}$$

B_3 的附着点是 v_4, v_5, v_6, v_7；

$$B_4 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5)\}$$

B_4 的附着点是 v_2, v_3, v_4, v_5。

下面我们来讨论有关片的一些性质，在后面的讨论中所指的片均为圈的片。

具有 k 个附着点的片，称为 **k-片**；具有相同附着点的两个 k-片，称为**等价 k-片**(如图 10.3-7 中的 B_1 和 B_2)。$k \geq 2$ 的 k-片 B 的 k 个附着点把圈 C 分成 k 个边不重的道路，每个道路称为 B 的**线段**。如果一个片的所有附着点，位于另一片的某一线段中，则称这两个片**不重叠**(non-overlapping)。例如，图 10.3-7 中的 B_2 和 B_3 是不重叠的，B_1 和 B_2 是重叠的。

如果在圈 C 上存在四个不同的顶点 u, v, u', v' 使得 u 和 v 是片 B 附着点，u', v' 是片 B' 的附着点，且这四个顶点以 u, u', v, v' 的次序出现在 C 上，称 B 和 B' 是**相间的**(altermate)。例如，图 10.3-7 中片 B_3 和片 B_4 是相间的。

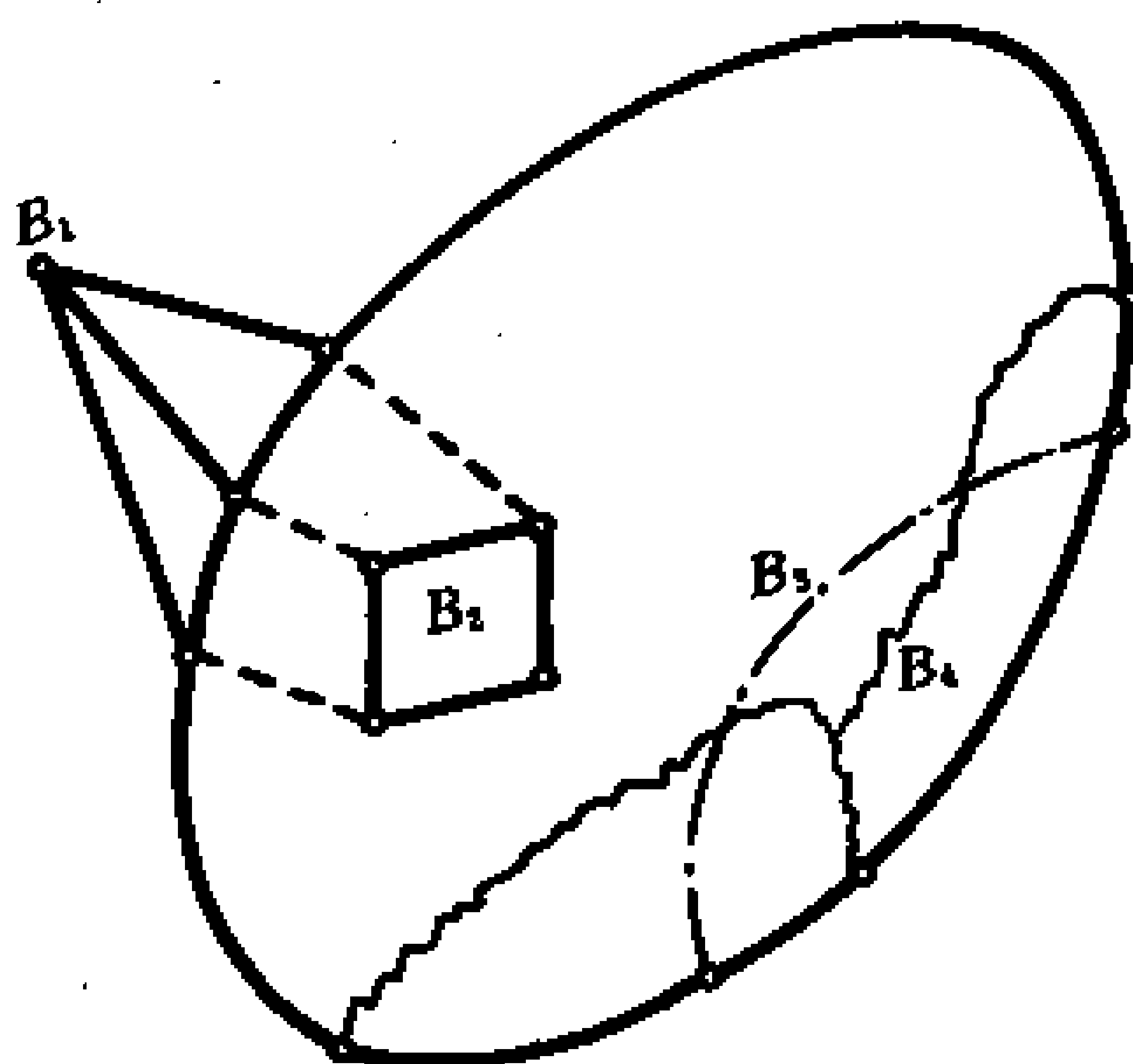


图 10.3-7

命题 10.3.1 若两个片重叠，则它们或者相间，或者是等价 3-片。

［证明］ 设片 B 和 B' 重叠。显然，每个片至

少有两个附着点。如果 B 和 B' 有一个是 2-片，则它们必然是相间的。所以我们假设 B 和 B' 都至少有 3 个附着点。分两种情况。

1° B 和 B' 不是等价片，则 B' 有一个附着点 u'，在 B 的两个相邻附着点 u 和 v 之间，由于 B 和 B' 重叠，B' 的某一附着点 v' 不能在 B 的连接 u 和 v 线段上，由此可知，B 和 B' 相间。

2° B 和 B' 是等价 k-片，$k \geq 3$。若 $k \geq 4$，则 B 和 B' 是显然相间。若 $k=3$，则它们是等价 3-片。▮

命题 10.3.2 若片 B 有三个附着点 v_1，v_2 和 v_3，则在 $V(B)-V(C)$ 中存在一个顶点 v_0，并且在 B 中有三条分别连接 v_0 和 v_1，v_2，v_3 的道路 P_1，P_2，P_3，使当 $i \neq j$ 时，P_i 和 P_j 只有顶点 v_0 是公共的（见图 10.3-8）。

［证明］ 设 P 是片 B 中和 C 内部不相交的一条 (v_1,v_2) 道路，则 P 至少有一个内部顶点 v，因为否则片 B 将只是 P，而不包含 v_3。设 Q 是 B 中一条 (v_3,v) 道路，和 C 内部不相交，并设 v_0 是 Q 在 P 上的第一个顶点。用 P_1 记 P^{-1} 的 (v_0,v_1) 节，用 P_2 记 P 的 (v_0,v_1) 节，用 P_3 记 Q^{-1} 的 (v_0,v_3) 节。显然，P_1，P_2，P_3 满足所要求的条件。▮

设 G 是平面图，C 是 G 中的圈，圈 C 把平面分成两个区域，$E(G)-E(C)$ 中的每一条边包含在这两个区域的一个之中。我们把边在 C 内的片称为**内片**（inner piece），边在 C 的外部的片称为**外片**（outer piece）。

图 10.3-9 中的 B_1 是内片，B_2 是外片。

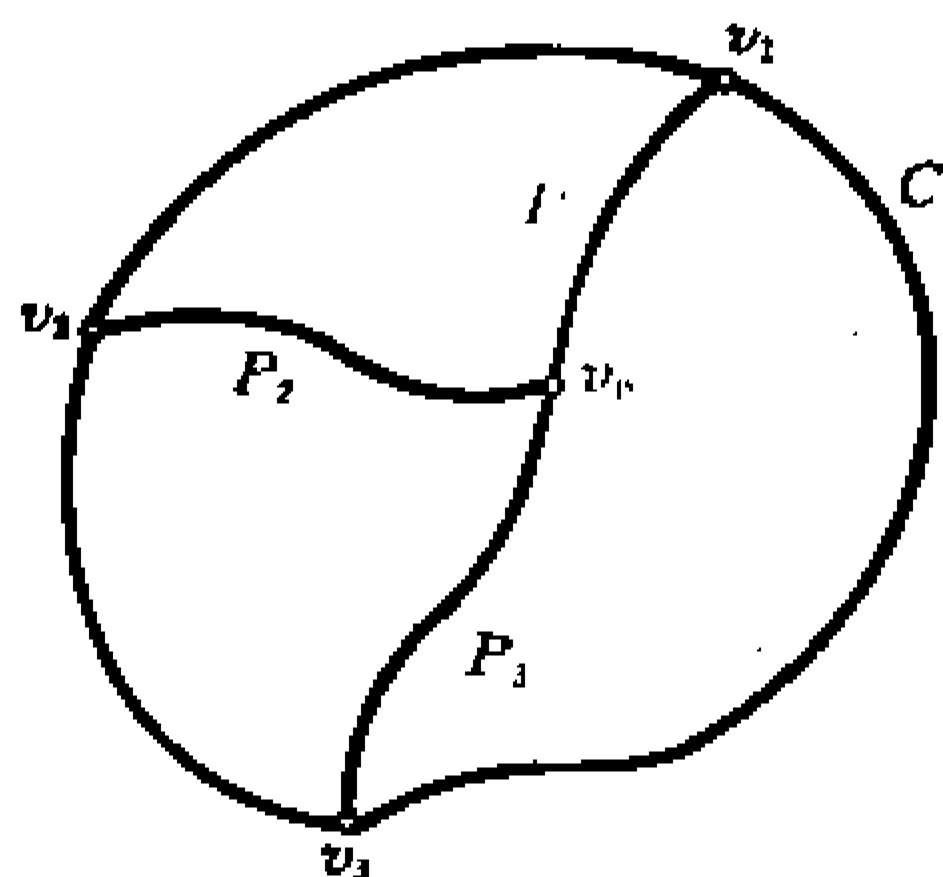


图 10.3-8

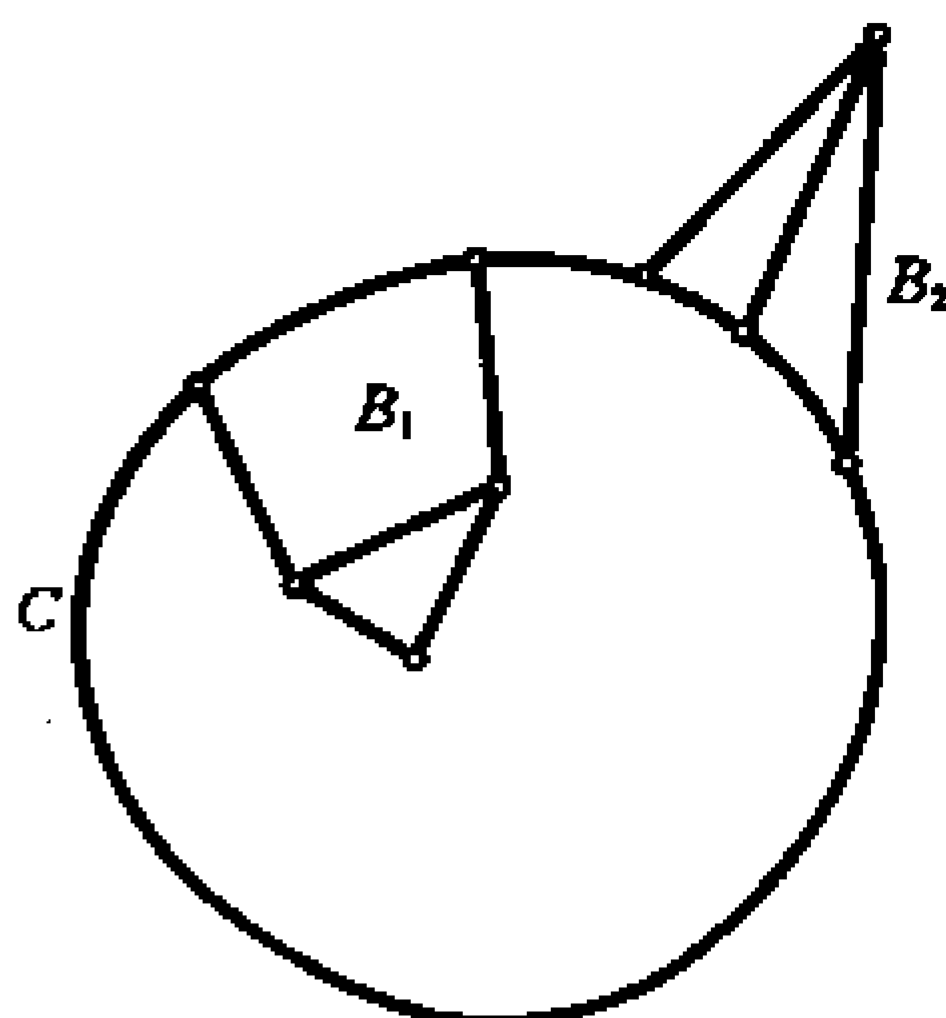


图 10.3-9

平面图 G 中圈 C 的片 B 称为是**可转移的**(transferable)，是指存在一个 G 的平面嵌入 $\tilde{G}$，使得除去 B 是 $\tilde{G}$ 中 C 的一个外片之外，G 和 $\tilde{G}$ 恒等。平面嵌入图 $\tilde{G}$ 叫做是由转移 B 从 G 得到的。图 10.3-10 表示一个片的转移。

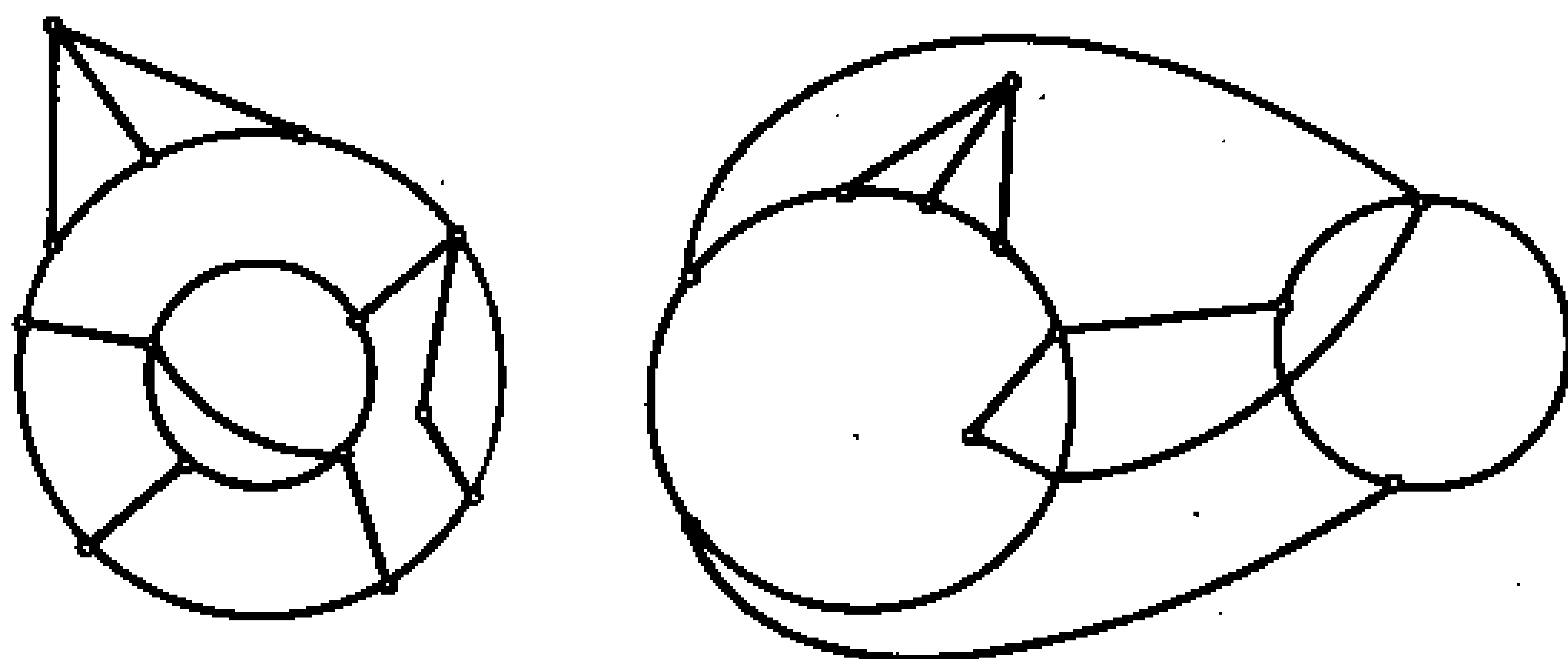


图 10.3-10

命题 10.3.3 与每一个外片均不重叠的内片是可转移的。

[证明] 设 B 是与每一个外片均不重叠的内片，那么 B 在 C 上的附着点全部位于 C 内的某个面的边界上，于是 B 能画在这个面中。∎

命题 10.3.4 内(外)片不重叠。

[证明] 用反证法。设 B 和 B' 是重叠的两个内片。由命题 10.3.1 它们是相间的或等价 3-片。如果 B 和 B' 是相间的。根据相间的定义，在 B 中有顶点 u 和 v。在 B' 中有顶点 u' 和 v'，它们按 u, u', v, v' 的次序排列在 C 上。设 P 是 B 中的 (u,v) 道路，而 P' 是 B' 中的 (u',v') 道路，二者均和 C 内部不相交。因为 B 和 B' 是不同的片，所以 P 和 P' 不能有公共的内部顶点。同时，P 和 P' 必须包含在 C 的内部(因为 B 和 B' 是内片)。由若当(Jordan)曲线定理①，G 不能是平面嵌入，与假设矛盾(参见图 10.3-11)。

---

① 若当曲线是指连续的自身不相交的曲线。若当曲线定理是：设 J 是一条若当曲线，那么连接 J 内部的点和 J 外部的点的任何连线必在某点和 J 相交。这个定理在直观上是明显的，但它的严格证明却很困难。

如果 B 和 B' 是等价 3-片。设它们的附着点是 v_1, v_2, v_3。由命题 10.3.2，在 B 中存在一个顶点 v_0 以及分别连接 v_0 和 v_1, v_2, v_3 的三条道路 P_1, P_2, P_3 使当 $i \neq j$ 时，P_i 和 P_j 仅有公共顶点 v_0。类似地，B' 有一个顶点 v_0' 以及分别连接 v_0' 和 v_1, v_2, v_3 的三条道路 P_1', P_2', P_3'，使 $i \neq j$ 时，P_i' 和 P_j' 仅有公共顶点 v_0（图 10.3-12）。道路 P_1, P_2, P_3 把 C 内部分为三个区域，而 v_0' 必须在这三个区域之一的内部，由于只有顶点

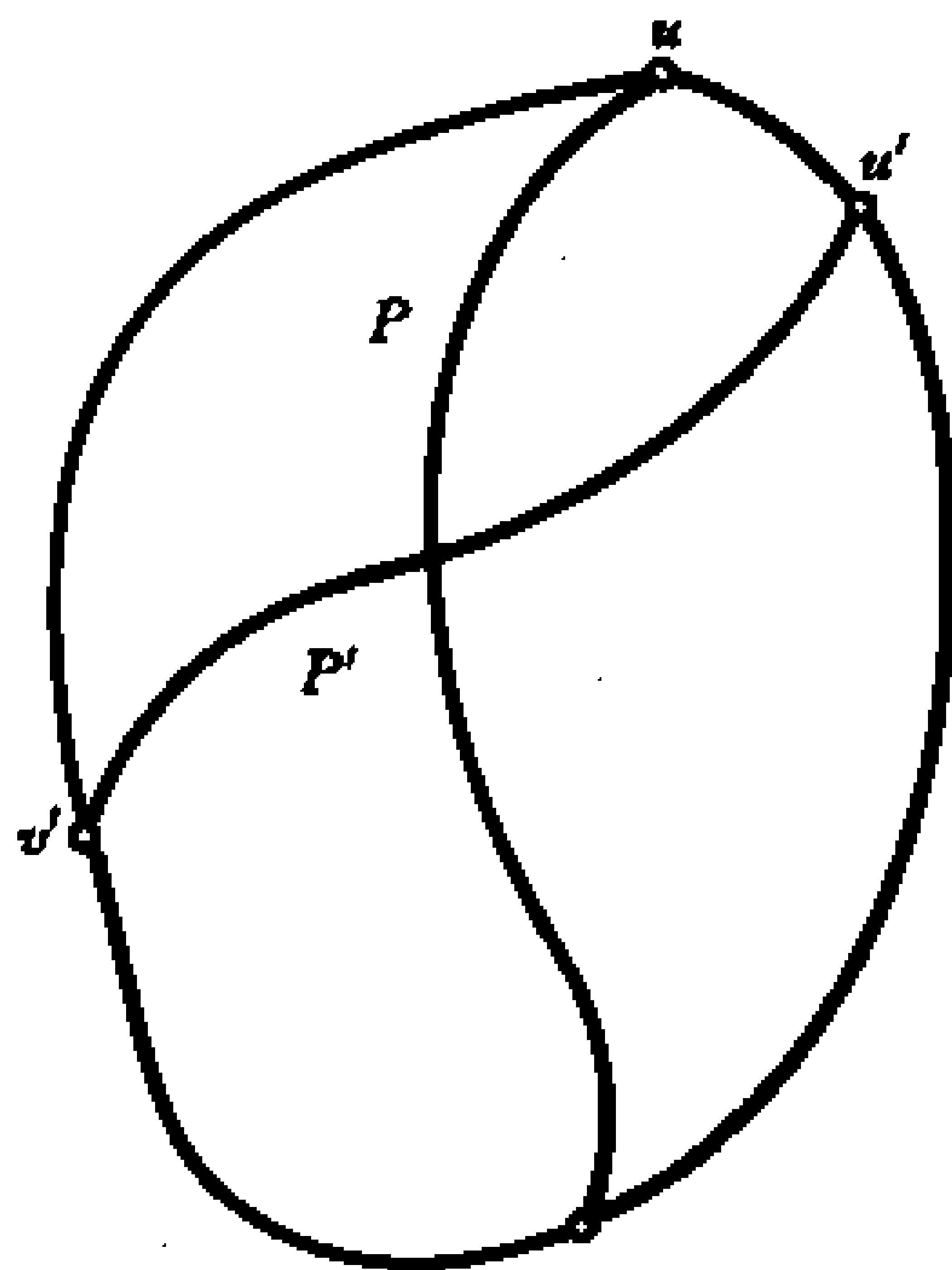


图 10.3-11

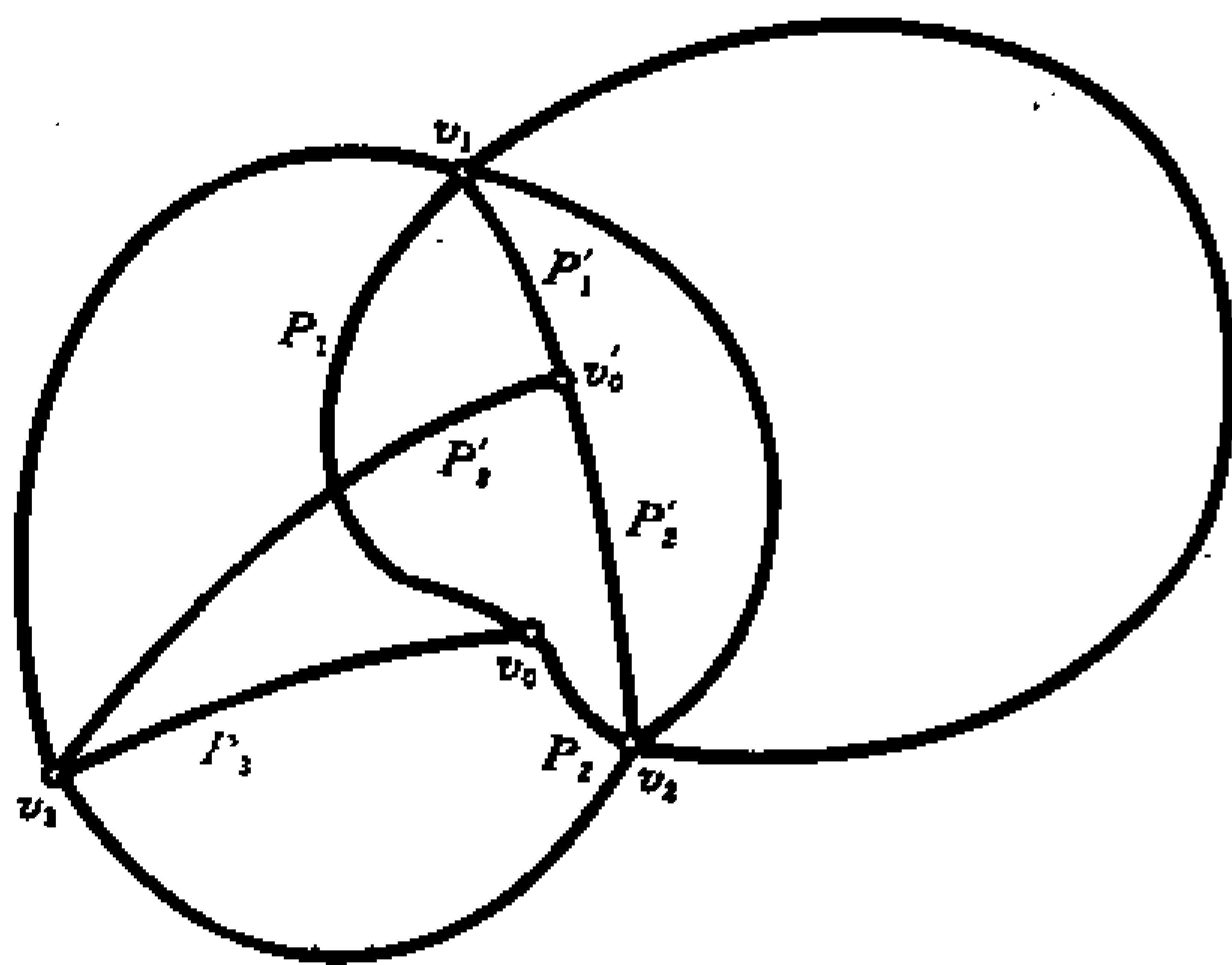


图 10.3-12

v_1, v_2, v_3 中的两个顶点能够在包含 v_0' 的区域的边界上，我们可以根据对称性，假设 v_3 不在这个区域的边界上。由若当曲线定理，道路 P_3' 必

然穿过 P_1，P_2 或者 C。但是由于 B 和 B' 是不同的内片，这显然是不可能的。因此，内片不重叠。同样可证外片也不重叠。∎

我们再来引进一个记号。设 C 是平面图的一个圈，给 C 规定一个方向（逆时针或顺时针），对于 C 的任何两个顶点 x 和 y，用 $C[x,y]$ 表示沿着 C 的逆时针方向的一条 (x,y) 道路，用 $C(x,y]$，$C[x,y)$，$C(x,y)$ 分别表示道路 $C[x,y]-x$，$C[x,y]-y$，$C[x,y]-\{x,y\}$。

现在我们来证明定理 10.3.1。

定理 10.3.1 的必要性是明显的。下面用归纳法证明充分性。

设对于所有的边数小于 m 的图，定理成立。证明对于 m 条边的图定理亦成立。

用反证法。如果 G 是非平面的。根据归纳法的假设易知，G 是连通的不可分图，即图 G 是 2—连通的。设 $e=(a,b)$ 是 G 的任一边，那么 $G'=G-e$ 也是 2—连通的。这是因为，如果 G' 是 1—连通的。设 v 是 G' 的一个割点，则 a,b 在 G' 的不同分支 G_a 和 G_b 中。由于 G_a 和 G_b 的边数均小于 $m-1$，故在 G_a 中加进边 (a,v) 所得到的图 G_a 是可平面的。作 G_a 的一个平面嵌入，使 (a,v) 在外部面的边界上；同样，在 G_b 中加进一条边 (b,v)，得一可平面图 G_b，作 G_b 的一个平面嵌入，使 (b,v) 在其外部面的边界上。连接 a,b 得一包含 G 的平面图。这与 G 是非平面图的假设矛盾。

我们来考察平面 2—连通图 $G'=G-e$。设 C 是 G' 中通过 a,b 的一个圈，且 C 的内部包含尽可能多的 G' 中的边。

首先，由于 G' 是 2—连通的，所以在 G' 中 C 的每一片必然至少有两个附着点。于是 C 的所有外片必须是重叠于 $e=(a,b)$ 的 2-片（图 10.3-13）。因为某一外片是 k-片，$k\geq 3$ 或是与 $e=(a,b)$ 不重叠的 2-片，则将存在一条包含 a,b 而在它的内部具有比 C 更多的边的圈 C'，这与 C 的选择矛盾（图 10.3-14 中的粗线表示 C'）。

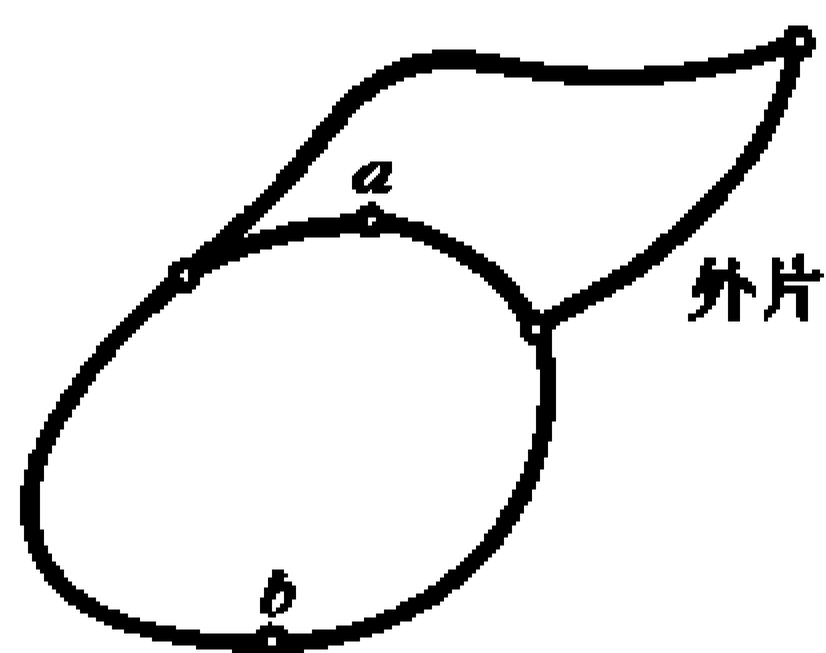


图 10.3-13

其次，由命题 10.3.4，任何两个内片

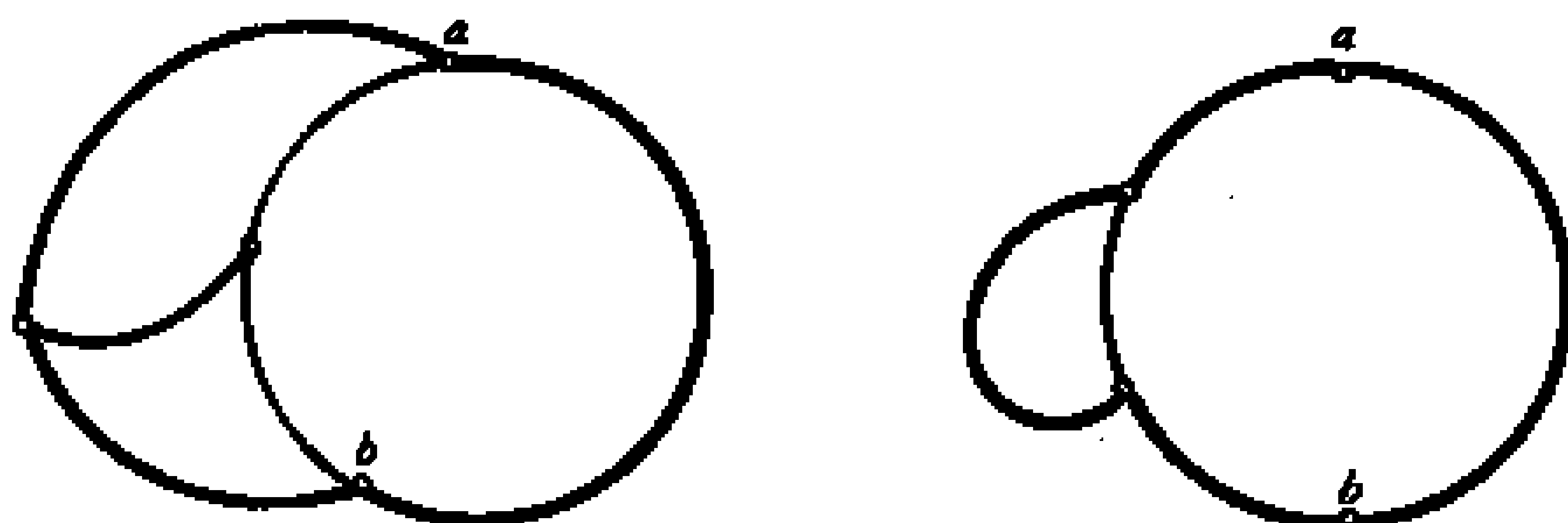


图 10.3-14

均不重叠，所以与(a,b)相间的某一片必须重叠于某一外片。否则的话，由命题 10.3.3 这种内片都是可转移的(一个一个地)，并且得到G的一个平面嵌入，边(a,b)可以画在C的内部。由于假设G是非平面的，所以这是不可能的。故存在一个内片B它与(a,b)相间，同时与某一外片B'相间。

设内片B的附着点是u_1,u_2，外片B'的附着点是v_1,v_2。我们用u_1,u_2,g,h记内片B满足条件的附着点：

$$u_1 \in C(v_1,v_2),\quad u_2 \in C(v_2,v_1),\quad g \in C(a,b),\quad h \in C(b,a)$$

易见$u_1 \neq u_2, g \neq h$，但可能$v_1 = g, v_2 = h$等等。

下面就内片B的附着点的不同情况进行讨论：

情形 1：若附着点u_1和u_2一个在$C(a,b)$上一个在$C(b,a)$上。

这时假定$u_1 = g, u_2 = h$，于是G包含一个同胚于$K_{3,3}$的子图(图 10.3-15)，导致矛盾。

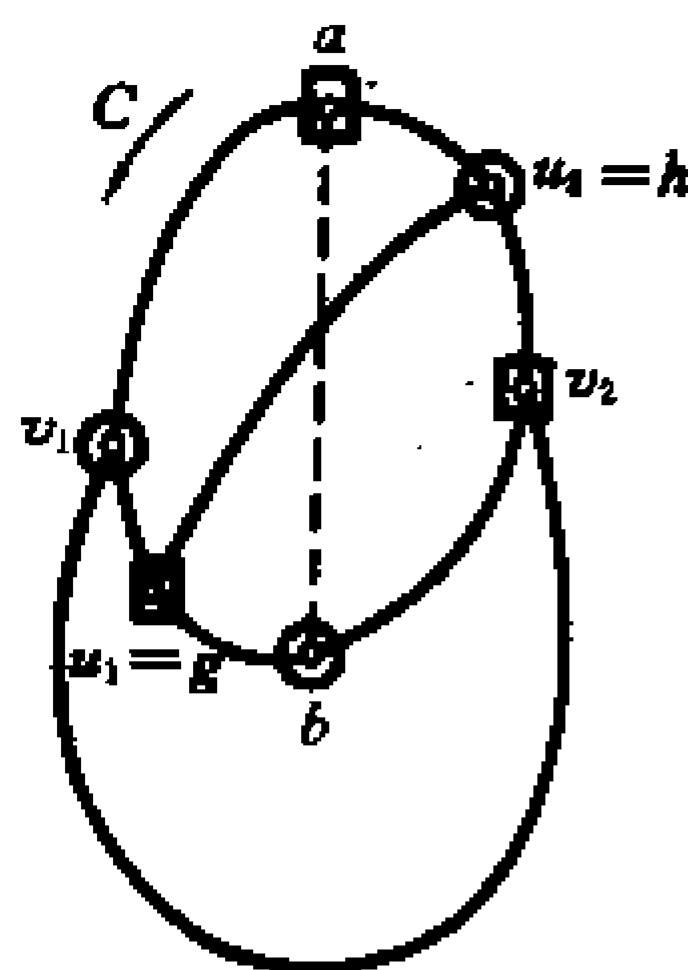


图 10.3-15

情形 2：若附着点u_1和u_2都在$C(a,b)$上。

这时可以假定$h = v_1$(如$h \neq v_1, h \in C(b,a)$，便得一个在情形 1 中的图)。这样，片B有三个附着点，根据命题 10.3.2，在B中存在一个

顶点 v_0 以及分别连接 u_1，u_2 和 v_1 的三条道路，它们仅有公共点 v_0，于是得到一个如图 10.3-16 的图。这个图包含一个同胚于 $K_{3,3}$的子图，得到矛盾，当 u_1 和 u_2 都在 $C(b,a)$上时同样得出矛盾。

情形 3：若 $u_1=a$，$u_2\neq b$(譬如 $u_2\in C(a,b)$)。

这时得到的情形如图 10.3-17 所示，得到同胚于 $K_{3,3}$的子图、矛盾。

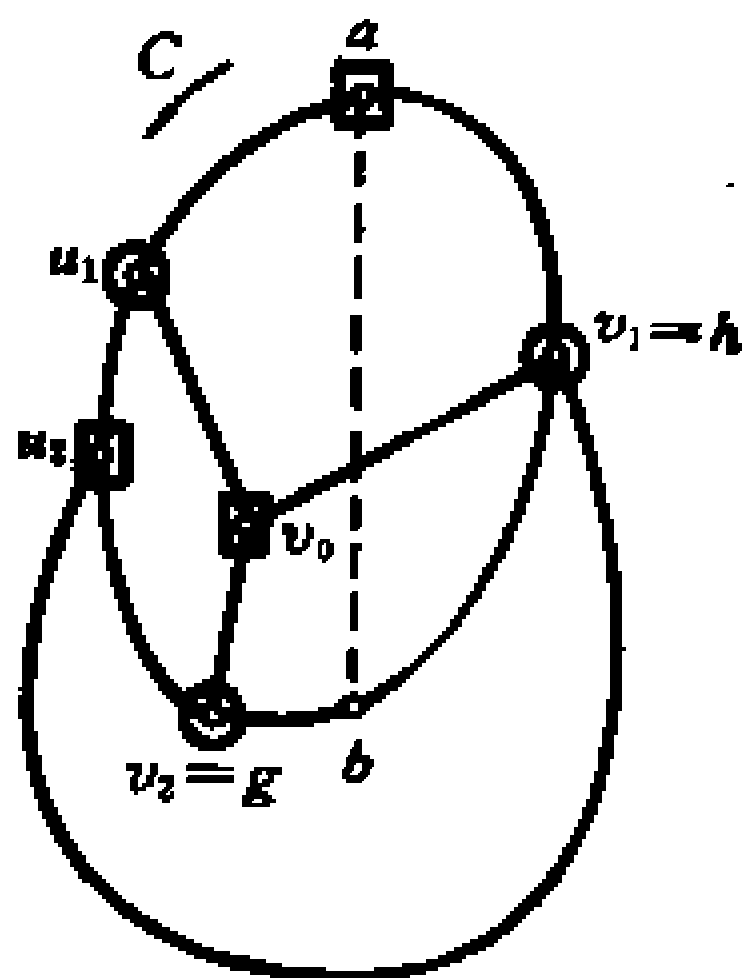


图 10.3-16

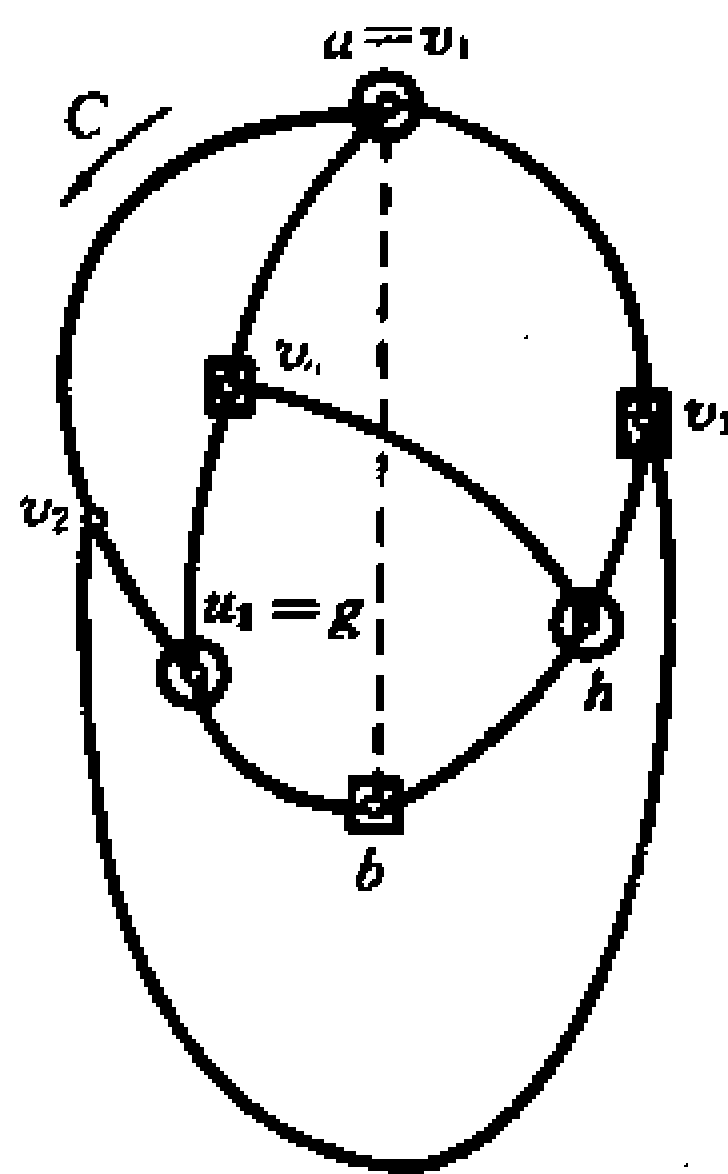


图 10.3-17

情形 4：若 $u_1=a$，$u_2=b$。

这时可以假定 $h=v_1$，$g=v_2$(若不然，将得到一个在情形 1 和情形 3 的图)，如果(v_1，v_2)道路和(u_1，u_2)道路有一个以上的公共点，那么得到一个包含同胚于 $K_{3,3}$的子图(图 10.3-18)，此为矛盾。如果(v_1，v_2)道路与(u_1，u_2)道路仅有一个公共点，那么得到

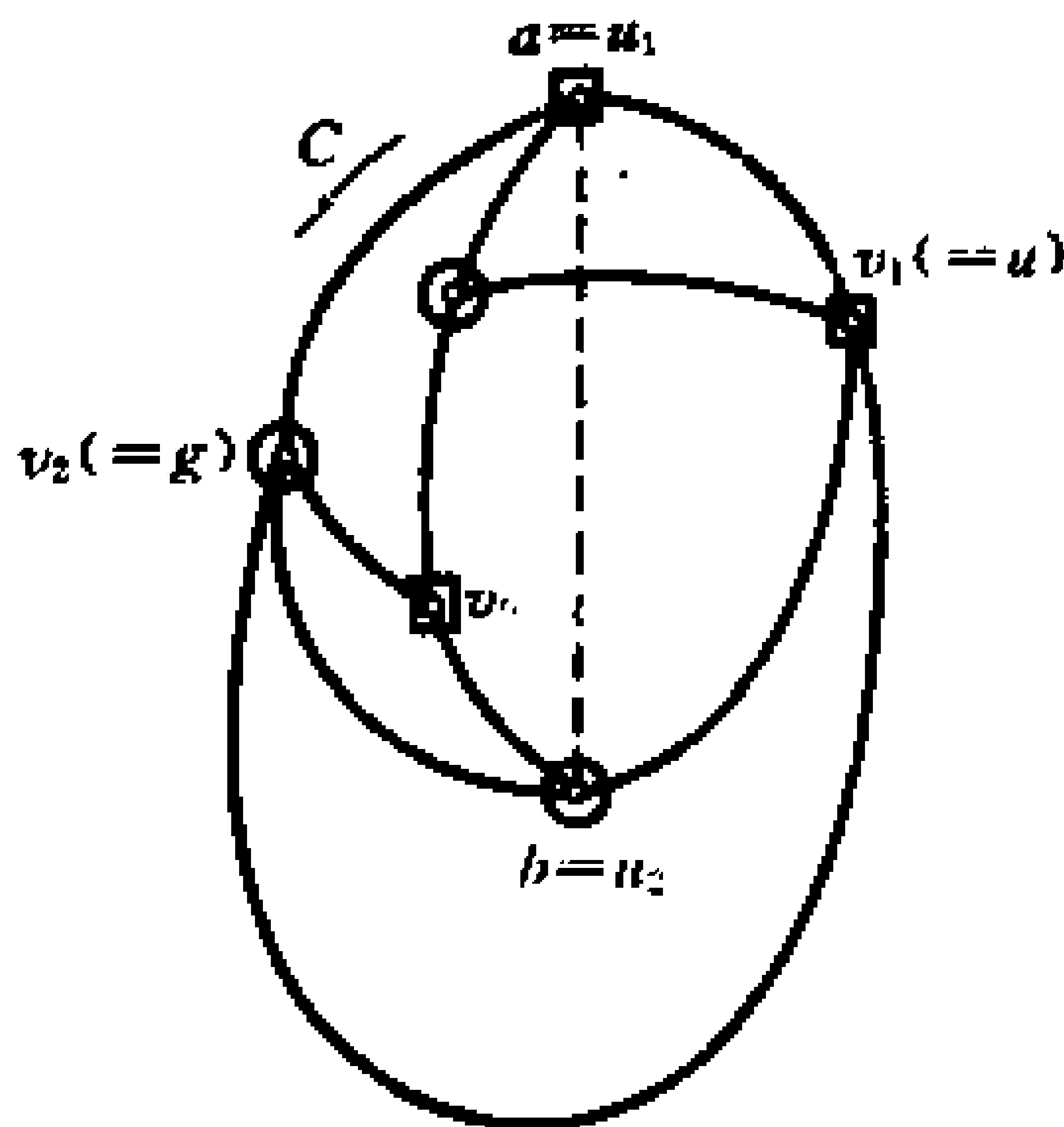


图 10.3-18

一个包含 K_5 的子图（图 10.3-19），矛盾。

于是，所有可能的情形都导致矛盾。充分性得证。▌

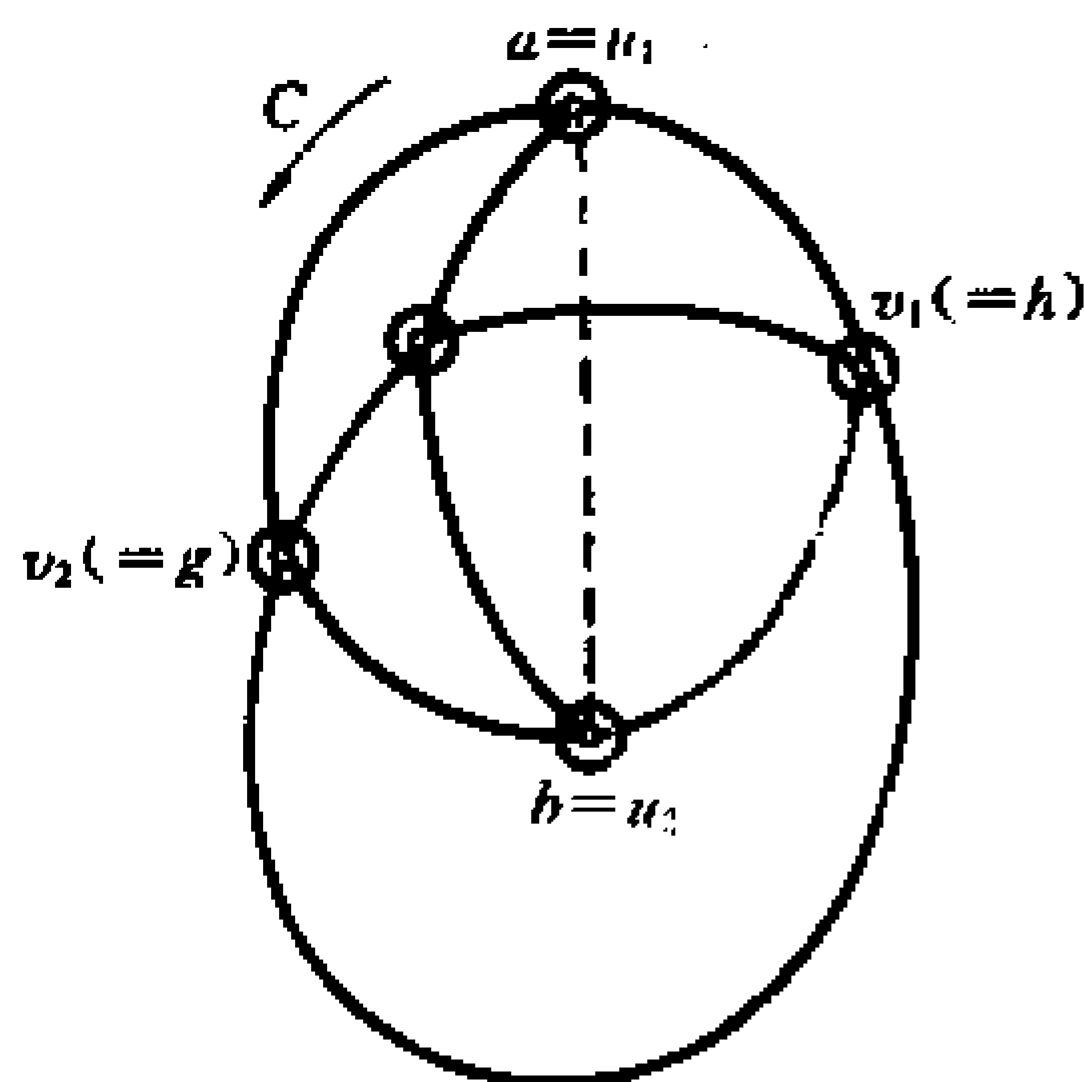


图 10.3-19

10.4 平面性算法

图的平面性的研究，曾吸引了很多人，加拿大的 W. T. Tutte 最早进行过这方面的研究工作，得到的结果写在他的一篇题为《如何画一个图》的著名论文中。后来有人对他的算法进行了改进，提出了一些其他的算法。下面介绍的算法是 Demoueron，Malgrange 和 Pertuiset 在 1964 年提出的。

定义 10.4.1 设 H 是 G 的一个可平面子图，并设 $\tilde{H}$ 是 H 的一个平面嵌入，B 是 G 中 H 的任一片，如果 B 对 H 的所有附着点在 $\tilde{H}$ 的同一个面的边界上，则称片 B 是**可画的**。

例如，在图 10.4-1(a)所示的图 G 中取一个可平面子图 H（图 10.4-1(b)）。G 中 H 的片只有一个：

$$B=\{(v_5,v_2),\ (v_5,v_4),\ (v_5,v_6),\ (v_5,v_7),\ (v_4,v_7)\}$$

附着点是 v_2, v_4, v_7。

可平面子图 H 的一个平面嵌入 $\tilde{H}$ 如图 10.4-2 所示。片 B 的三个附着点在 $\tilde{H}$ 的不同的面的边界上，故 B 是不可画的。

图 10.3-5 所示的图 G 中 H 的片 B_1, B_2, B_3, B_4 都是可画的（这里 H 是圈 C，它本身是一个平面图，有一个内部面和一

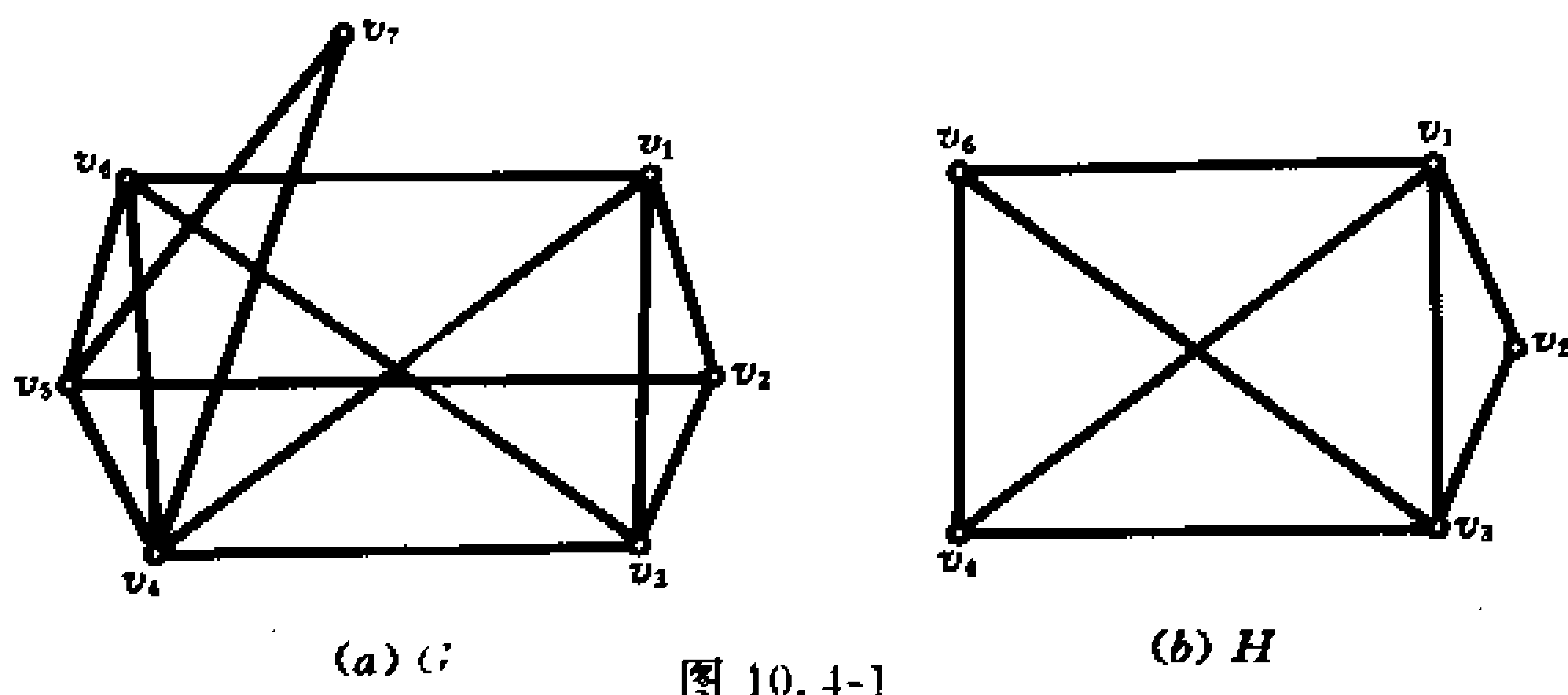


图 10.4-1

个外部面。各片的全部附着点都在内部面或外部面上)。

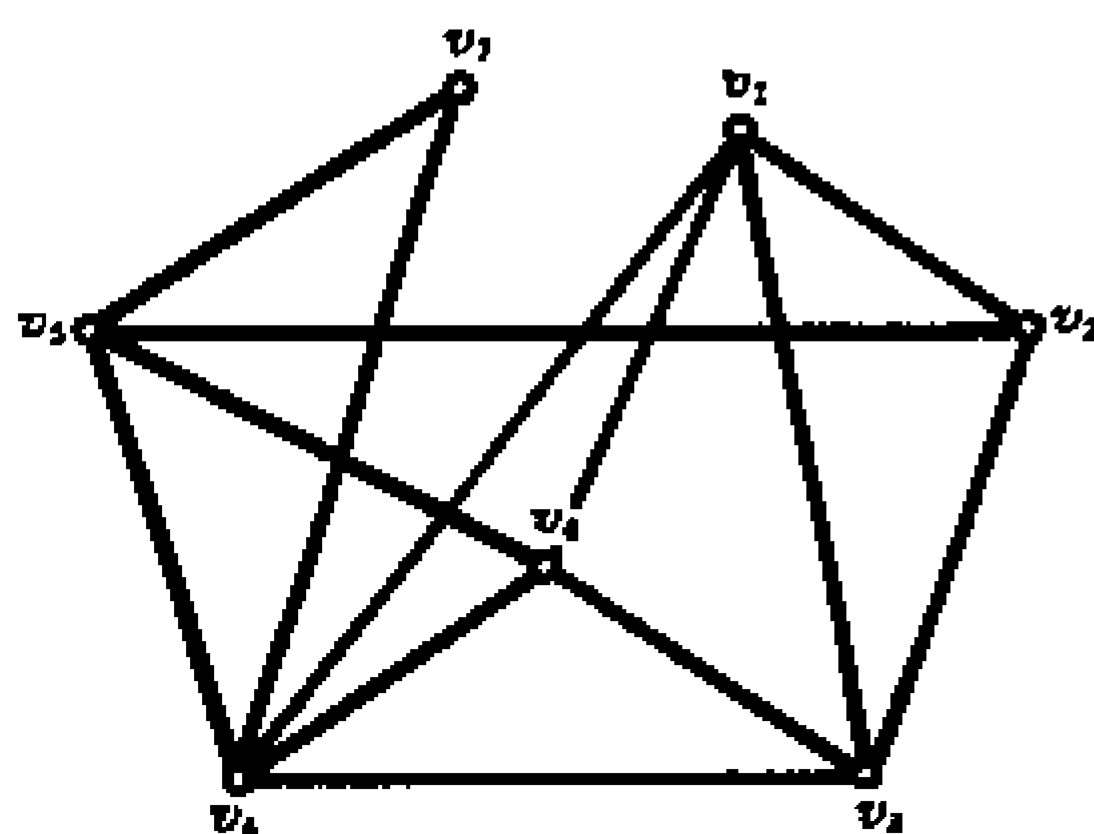


图 10.4-2

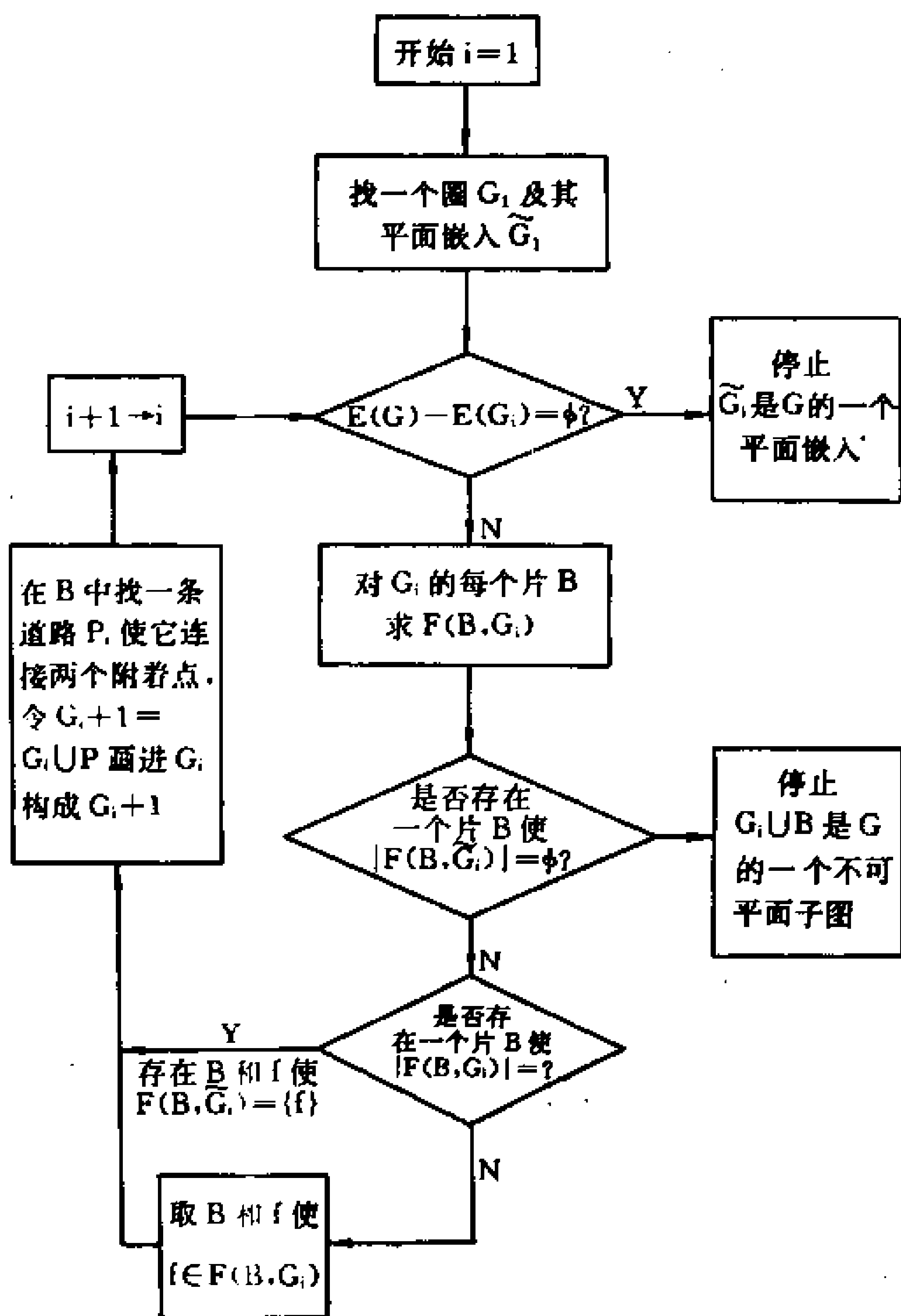
D.M.P 算法

设 G 是一个 2-连通图，按下列步骤可将一个可平面图嵌入平面，若算法不能进行到底，则 G 是不可平面的。

1. 设 G_1 是 G 中的一个圈(若 G 无圈，则 G 必为平面图)，求 G_1 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_1$。

2. 若 $E(G)-E(G_1)=\varnothing$，则停止；若 $E(G)-E(G_1)\neq\varnothing$，求出 G 中 G_1 的所有的片 B。对每个片 B，在 $\tilde{G}_1$ 中求出所有含 B 的全部附着点的面，这些面的集合记作 $F(B,\tilde{G}_1)$。

(1) 若存在某一片 B，使 $F(B,\tilde{G}_1)=\varnothing$(即 $\tilde{G}_1$ 中没有任何一个面含有 B 的全部附着点)，于是片 B 是不可画的，因而 G 是不可平面图，算法停止。


开始 i=1
找一个圈 G_1 及其平面嵌入 $\widetilde{G}_1$
$E(G)-E(G_i)=\phi$?
Y
停止 $\widetilde{G}_i$ 是G的一个平面嵌入
N
$i+1\rightarrow i$
对 G_i 的每个片 B 求 $F(B,G_i)$
在 B 中找一条道路 P_i 使它连接两个附着点，令 $G_i+1=G_i\cup P$ 画进 G_i 构成 G_i+1
是否存在一个片 B 使 $|F(B,\widetilde{G}_i)|=\phi$?
停止 $G_i\cup B$ 是 G 的一个不可平面子图
N
是否存在一个片 B 使 $|F(B,G_i)|=$?
Y
存在 B 和 f 使 $F(B,\widetilde{G}_i)=\{f\}$
N
取 B 和 f 使 $f\in F(B,G_i)$

D,M,B 算法框图

(2) 若有片 B 使 $|F(B,\tilde{G}_1)|=1$，则取片 B 和面 $f\in F(B,\tilde{G}_1)$。

(3) 若对每一片 B 均有 $|F(B,\tilde{G}_1)|\geqslant 2$，则取片 B 和任一面 $f\in F(B,\tilde{G}_1)$。

3. 在选定的片 B 中取一连接 B 的两个附着点的道路 P_1，置 $G_2=G_1\cup P_1$。在取定的面 f 中画进 P_1，得 G_2 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_2$。

4. 把 G_1 换成 G_2，重复上述步骤，如此进行，直到对某个 i 有

$$E(G)-E(G_i)=\varnothing$$

得到图 G 的一个平面嵌入，算法停止。

现在我们来证明 D. M. P 算法的有效性，为此先来引进一个定义和证明一个有关的定理。

定义 10.4.2 设 H 是可平面图 G 的一个子图，$\tilde{H}$ 是 H 的一个平面嵌入，如果存在一个平面嵌入 $\tilde{G}$，使 $\tilde{H}\leqslant\tilde{G}$，则称 $\tilde{H}$ 是 G-容许的。

例如，图 10.4.3 表示 G 的一个可平面子图的两种嵌入：一个是 G-容许的，另一个则不是。

定理 10.4.1 若 $\tilde{H}$ 是 G-容许的，则对于 H 的每一片 B，$F(B,\tilde{H})\neq\varnothing$。

[证明] 若 $\tilde{H}$ 是 G-容许的，则存在 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}$，使 $\tilde{H}\subseteq\tilde{G}$。显然，$H$ 的片 B 所对应的 $\tilde{G}$ 的子图必然限制在 $\tilde{H}$ 的一个面中，因此 $F(B,\tilde{H})\neq 0$。▌

为了确定 D. M. P 算法的有效性，需要证明：若 G 是可平面的，则序列 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2,\cdots,\tilde{G}_{q-p+1}$ 的每一项都是 G-容许的。

用归纳法，假定 G 是可平面的，显然 $\tilde{G}_1$ 是 G-容许的。假设 $1\leqslant i\leqslant k<q-p+1$，$\tilde{G}_i$ 都是 G-容许的，则存在 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}$，使 $\tilde{G}_i\subset\tilde{G}$。今证 $\tilde{G}_{k+1}$ 是 G-容许的。

设 B 和 f 如算法中的第二步所定义的那样，如果在 $\tilde{G}$ 中，B 画在 f

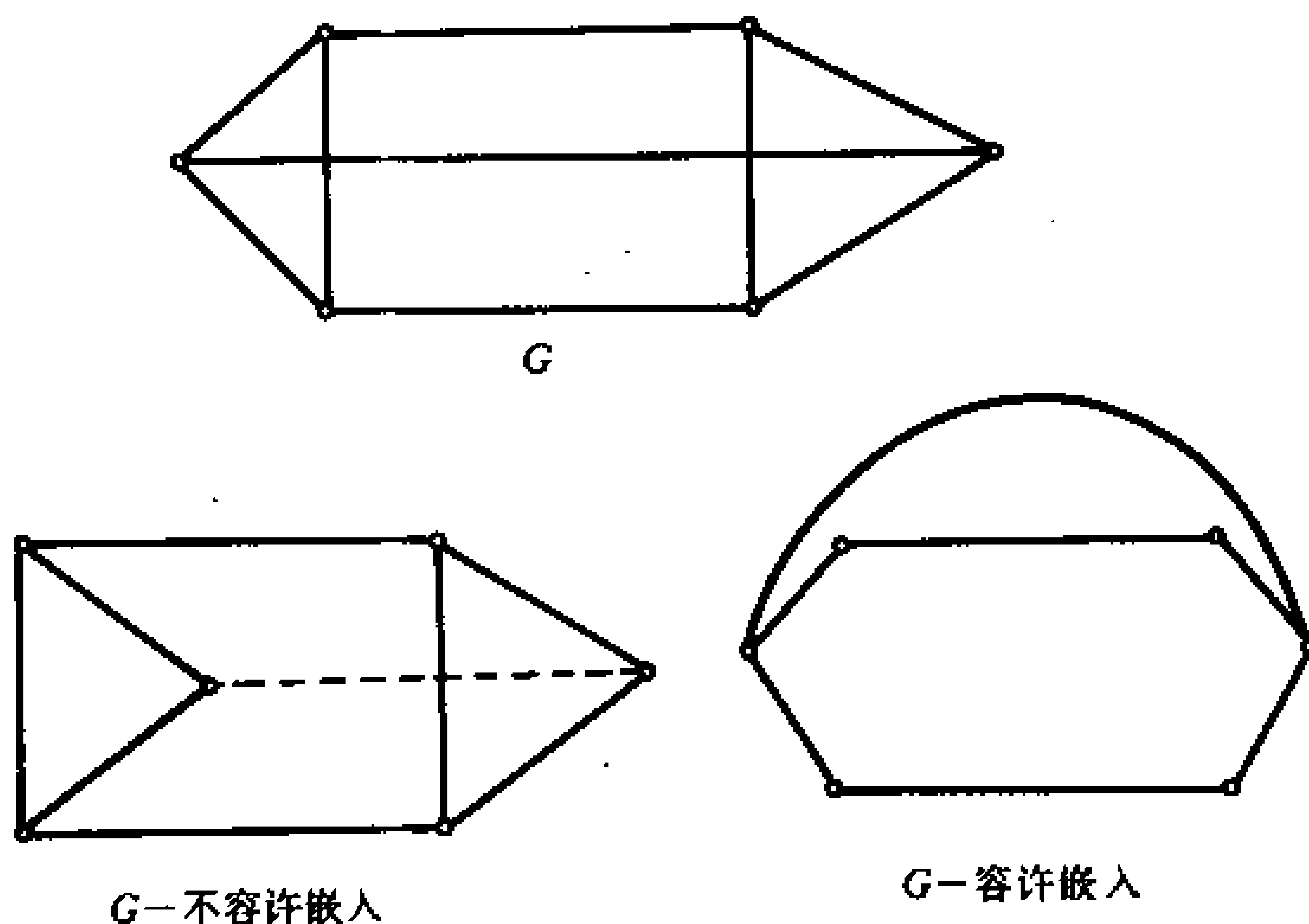


图 10.4-3

内，那么 $\tilde{G}_{k+1}$ 显然是 G-容许的。假设没有 G_k 的片可以只画在 $\tilde{G}_k$ 的一个面中，并且假设在 $\tilde{G}$ 中，B 被画在某个另外的面 f' 中。由于恰好可画在一个面中的片不存在。因此，若一个片的附着点限制在 f 和 f' 的公共边界上，而另一个片没有这一性质，则前一片对后一片而言，不会有前一片的两个附着点 u 和 v 与后一片的两个附着点 u' 和 v' 以循环次序 u，u'，v，v' 出现在公共边界上。因而，我们可以越过 f 和 f' 的公共边界，交换片。这样得到 G 的一个平面嵌入，其中 B 画在 f 中(图 10.4-4)。因此，$\tilde{G}_{k+1}$ 是 G-容许的。▌

例 10.4.1 用 D、M、P 算法判断图 G(图 10.3-5)的平面性。

$1^{(1)}$：取圈 G_1 及 G_1 的一个平面嵌入(图 10.4-5)。

$1^{(2)}$：G 中 G_1 的片是(图 10.3-6)：

$$B_1^{(1)}=\{(v_2,v_6)\},\qquad B_2^{(1)}=\{(v_3,v_7)\}$$

$$B_3^{(1)}=\{(v_4,v_8),(v_5,v_8),(v_6,v_8),(v_7,v_8)\}$$

$$B_4^{(1)}=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_1,v_5)\}$$

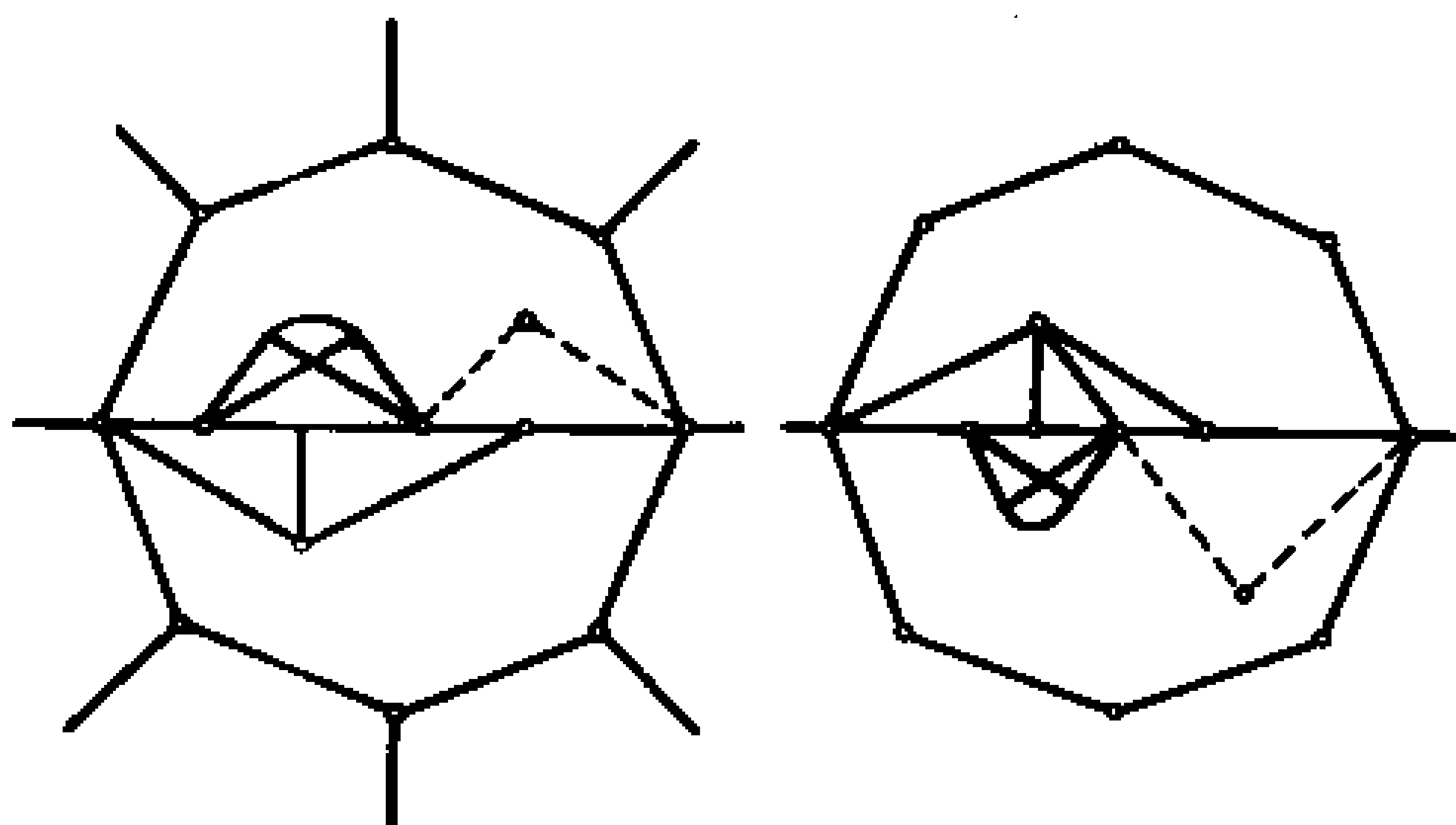
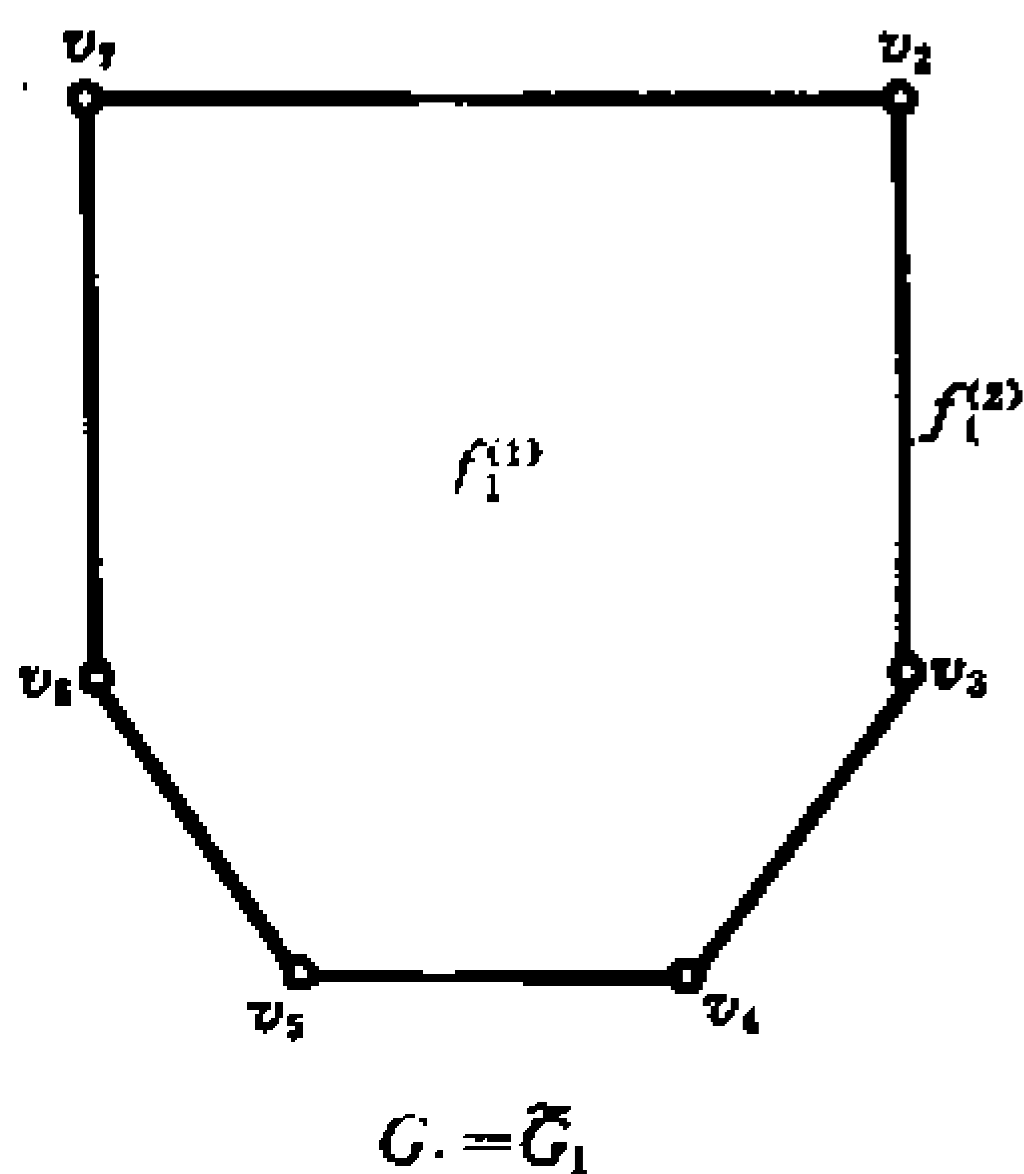
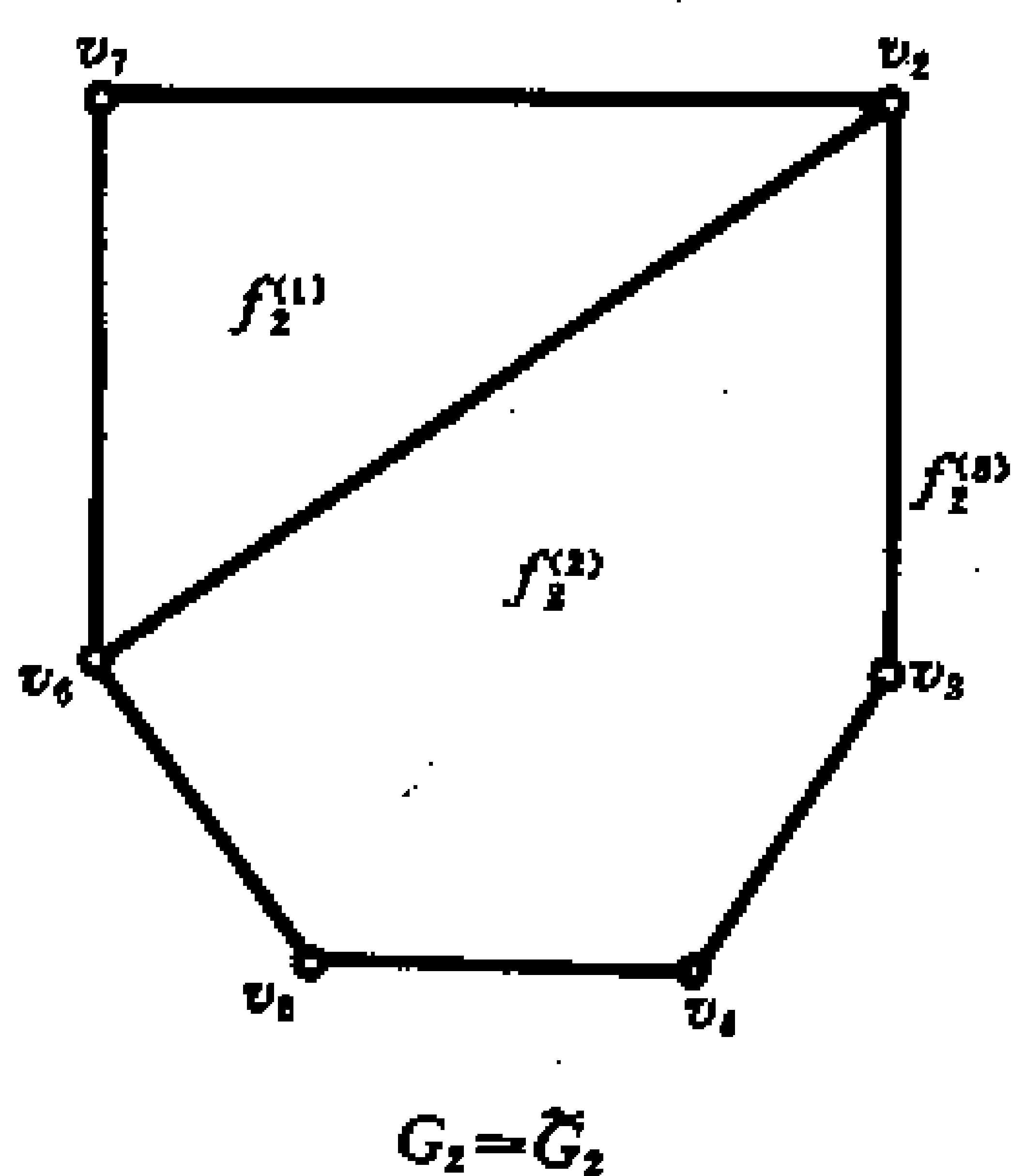


图 10.4-4



$G_1=\tilde{G}_1$

图 10.4-5



$G_2=\tilde{G}_2$

图 10.4-6

对 $B_1^{(1)},B_2^{(1)},B_3^{(1)},B_4^{(1)}$，有

$$F(B_1^{(1)},\tilde{G}_1)=F(B_2^{(1)},\tilde{G}_1)=F(B_3^{(1)},\tilde{G}_1)=F(B_4^{(1)},\tilde{G}_1)$$
$$=\{f_1^{(1)},f_1^{(2)}\}$$

所以，片 $B_1^{(1)},B_2^{(1)},B_3^{(1)}$ 和 $B_4^{(1)}$ 都是可画的。取片 $B_1^{(1)}$ 和面 $f_1^{(1)}$。

$1^{(3)}$：在片 $B_1^{(1)}$ 中取一条连接 $B_1^{(1)}$ 的两个附着点的道路 P_1。因为片 $B_1^{(1)}$ 只有两个附着点 v_2,v_6，且连接 v_2 和 v_6 的只有一条边 (v_2v_6)，故取

$P_1=v_2v_6$，置 $G_2=G_1\cup P_1$，在面 $f_1^{(1)}$ 中画出 P_1，得 G_2 的平面嵌入 $\tilde{G}_2(=G_2)$（图 10.4-6）。

$2^{(1)}$：取 G_2 和 $\tilde{G}_2$。

$2^{(2)}$：G 中 G_2 的片是 $B_2^{(1)}$，$B_3^{(1)}$ 和 $B_4^{(1)}$，对 $B_2^{(1)}$ 和 $B_3^{(1)}$，有

$$F(B_2^{(1)},\tilde{G}_2)=F(B_3^{(1)},\tilde{G}_2)=\{f_2^{(3)}\}$$

对 $B_4^{(1)}$，有

$$F(B_4^{(1)},\tilde{G}_2)=\{f_2^{(2)},f_2^{(3)}\}$$

取片 B 和面 $f_2^{(3)}$。

$2^{(3)}$：在片 $B_2^{(1)}$ 中取一条连接 $B_2^{(1)}$ 的两个附着点的道路 $P_2=v_3v_7$，置 $G_3=G_2\cup P_2$。在面 $f_2^{(3)}$ 中画出 G_3 的一个平面嵌入（图 10.4-7）。

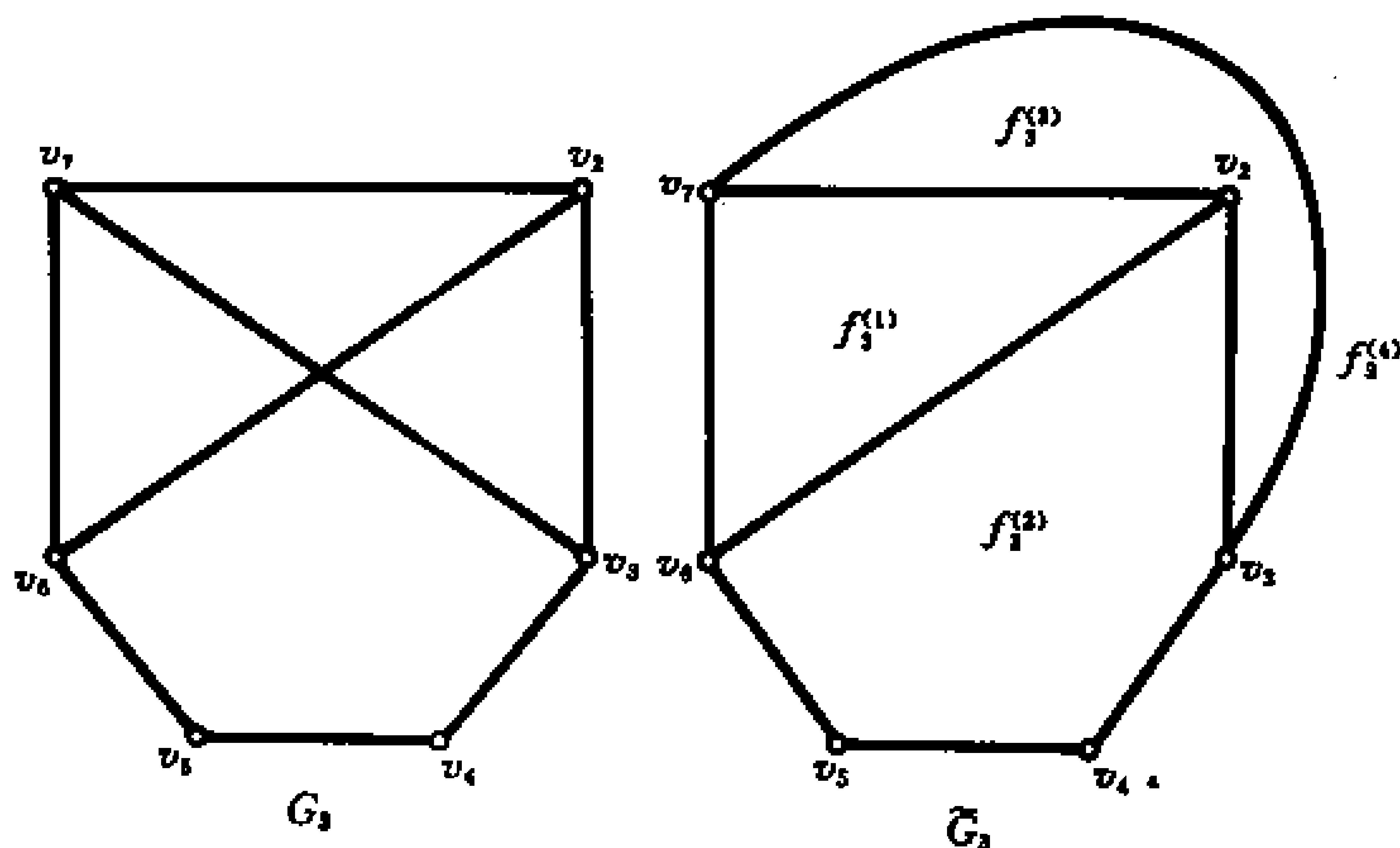


图 10.4-7

$3^{(1)}$：取 G_3 和 $\tilde{G}_3$。

$3^{(2)}$：G 中 G_3 的片是 $B_3^{(1)}$ 和 $B_4^{(1)}$，对 $B_3^{(1)}$，有

$$F(B_3^{(1)},\tilde{G}_3)=\{f_3^{(4)}\}$$

对 $B_4^{(1)}$，有

$$F(B_4^{(1)},\tilde{G}_3)=\{f_3^{(3)}\}$$

取片 $B_3^{(1)}$ 和面 $f_3^{(4)}$。

$3^{(3)}$：在片 $B_3^{(1)}$ 中取一条连接 $B_3^{(1)}$ 的两个附着点 v_6 和 v_7 的道路 $P_3=v_6v_8v_7$，置 $G_4=G_3\cup P_3$。在面 $f_3^{(4)}$ 中画出 P_3，得 G_4 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_4$（图 10.4-8）。

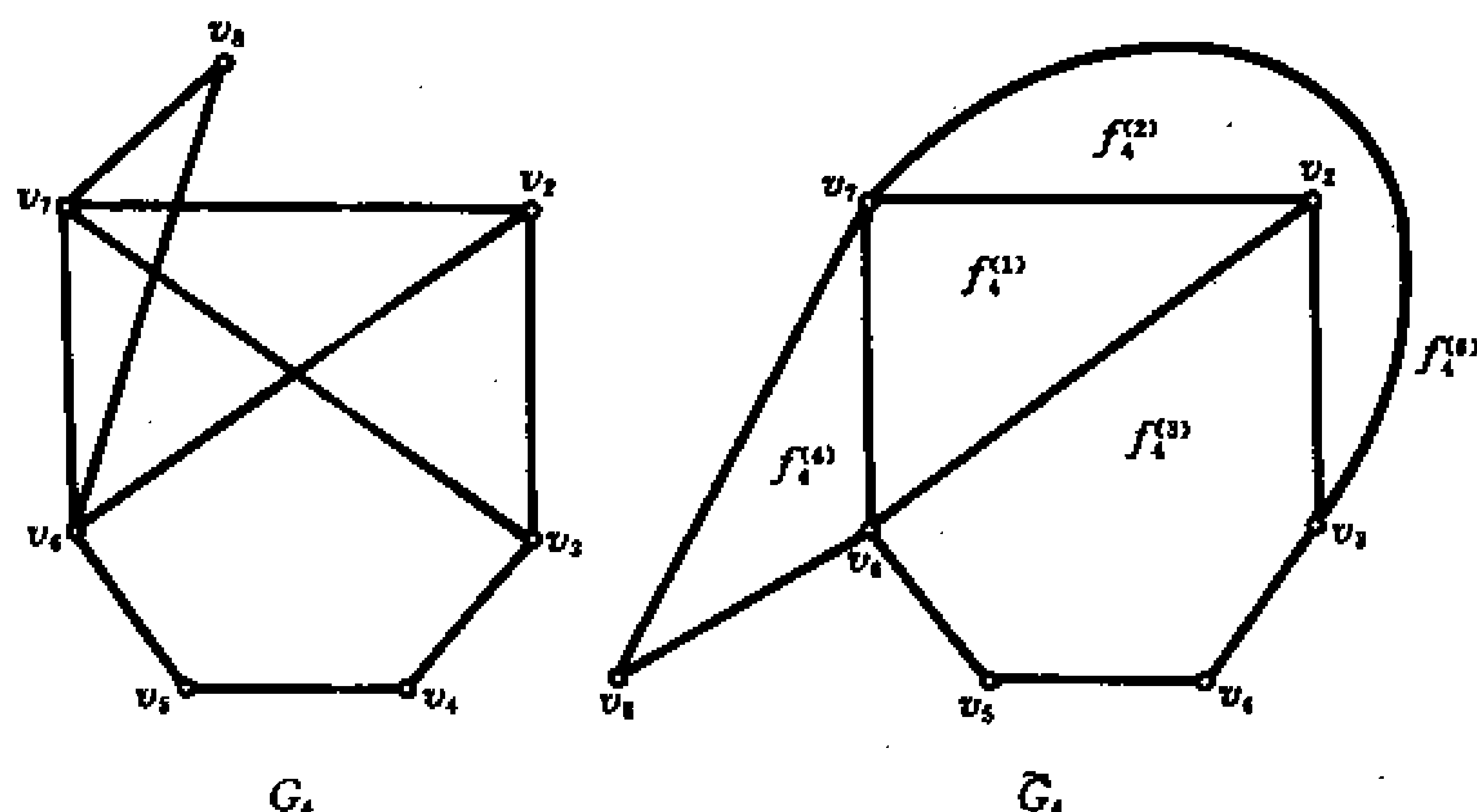


图 10.4-8

$4^{(1)}$：取 G_4 和 $\tilde{G}_4$。

$4^{(2)}$：G 中 G_4 的片是

$$B_1^{(4)}=\{(v_4,v_8)\},\quad B_2^{(4)}=\{(v_5,v_8)\},\quad B_4^{(1)}$$

对 $B_1^{(4)}$ 和 $B_2^{(4)}$，有

$$F(B_1^{(4)},\tilde{G}_4)=F(B_2^{(4)},\tilde{G}_4)=\{f_4^{(5)}\}$$

对 B_4，有

$$F(B_4^{(1)},\tilde{G}_4)=\{f_4^{(4)}\}$$

取片 $B_1^{(4)}$ 和面 $f_4^{(5)}$。

$4^{(3)}$：在片 $B_1^{(4)}$ 中取连接附着点 v_4 和 v_8 的道路 $P_4=v_4v_8$，置 $G_5=G_4\cup P_4$。在面 $f_4^{(5)}$ 中画出 P_4，得 G_5 的一个平面嵌入（图 10.4-9）。

$5^{(1)}$：取 G_5 和 $\tilde{G}_5$。

$5^{(2)}$：G 中 G_5 的片是 $B_2^{(4)}$，$B_4^{(1)}$，对 $B_2^{(4)}$，有

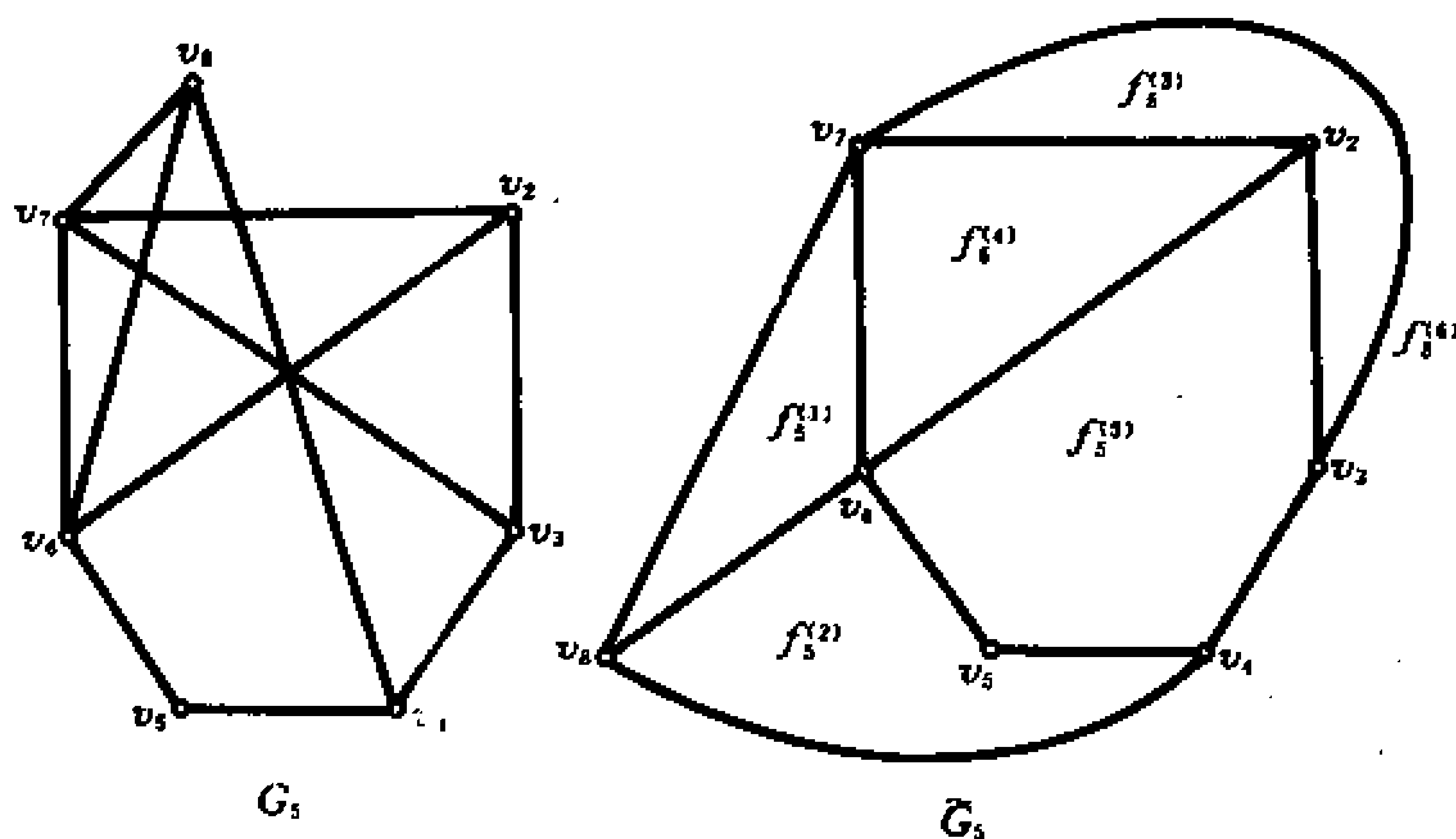


图 10.4-9

$$F(B_2^{(4)},\tilde{G}_5) = \{f_5^{(2)}\}$$

对 $B_4^{(1)}$ 有

$$F(B_4^{(1)},\tilde{G}_5) = \{f_5^{(5)}\}$$

取片 $B_2^{(4)}$ 和面 $f_5^{(2)}$。

$5^{(3)}$：在片 $B_2^{(4)}$ 中取连接附着点 v_5、v_8 的道路 $P_5=v_5v_8$，置 $G_6=G_5\cup P_5$。在面 $f_5^{(2)}$ 中画出 P_5，得 G_6 的一个平面嵌入(图 10.4-10)。

$6^{(1)}$：取 G_6 和 $\tilde{G}_6$。

$6^{(2)}$：G 中 G_6 的片是 $B_4^{(1)}$，对 $B_4^{(1)}$，有

$$F(B_4^{(1)},\tilde{G}_6) = \{f_6^{(6)}\}$$

取片 $B_4^{(1)}$ 和面 $f_6^{(6)}$。

$6^{(3)}$：在片 $B_4^{(1)}$ 中取连接附着点 v_2 和 v_3 的道路 $P=v_2v_1v_3$，置 $G_7=G_6\cup P_6$。在面 $f_6^{(6)}$ 中画出 P_6，得 G_7 的一个平面嵌入(图 10.4-11)。

$7^{(1)}$：取 G_7 和 $\tilde{G}_7$。

$7^{(2)}$：G 中 G_7 的片是

$$B_1^{(7)} = \{(v_1,v_4)\}, \quad B_2^{(7)} = \{(v_1,v_5)\}$$

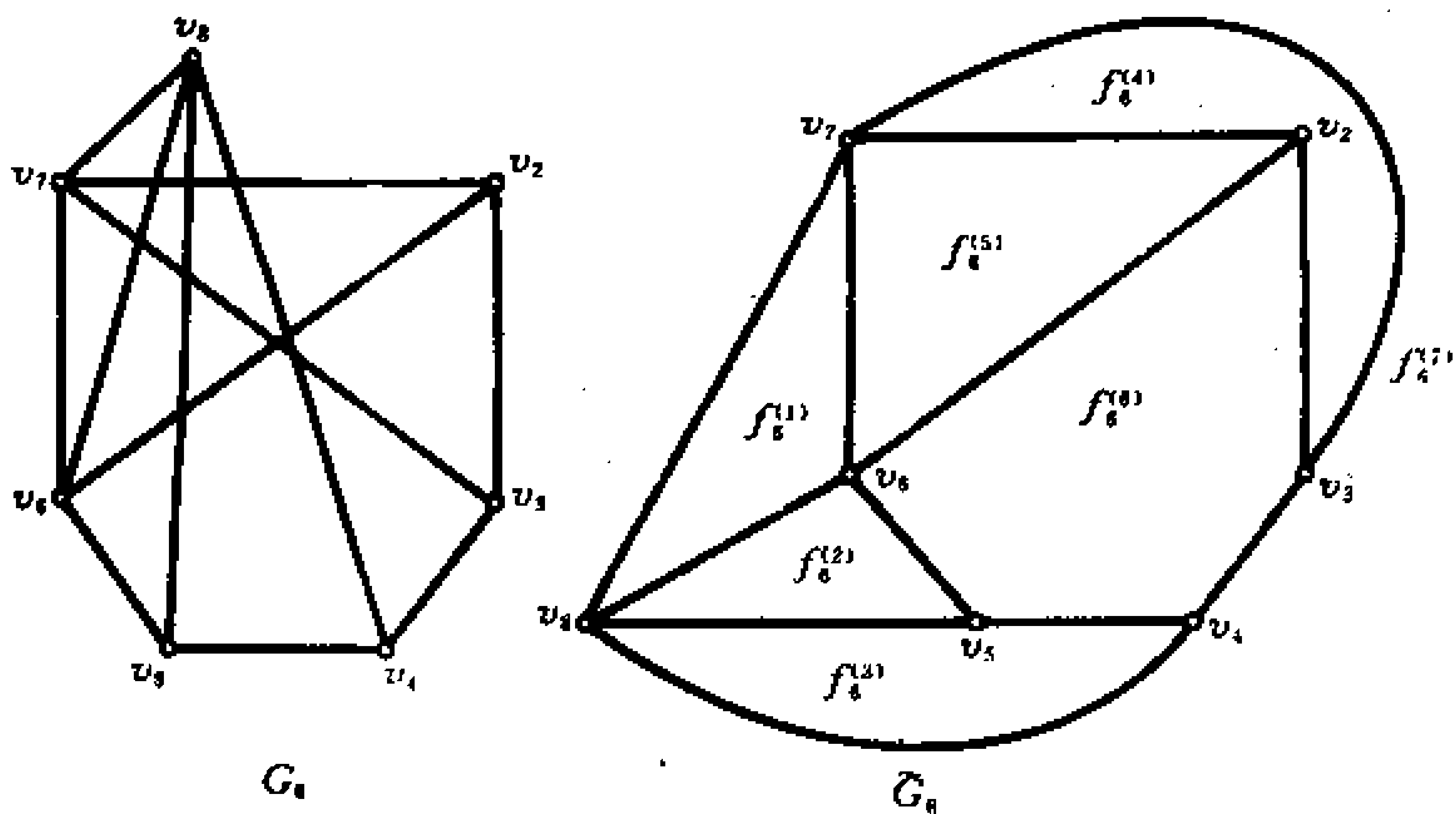


图 10.4-10

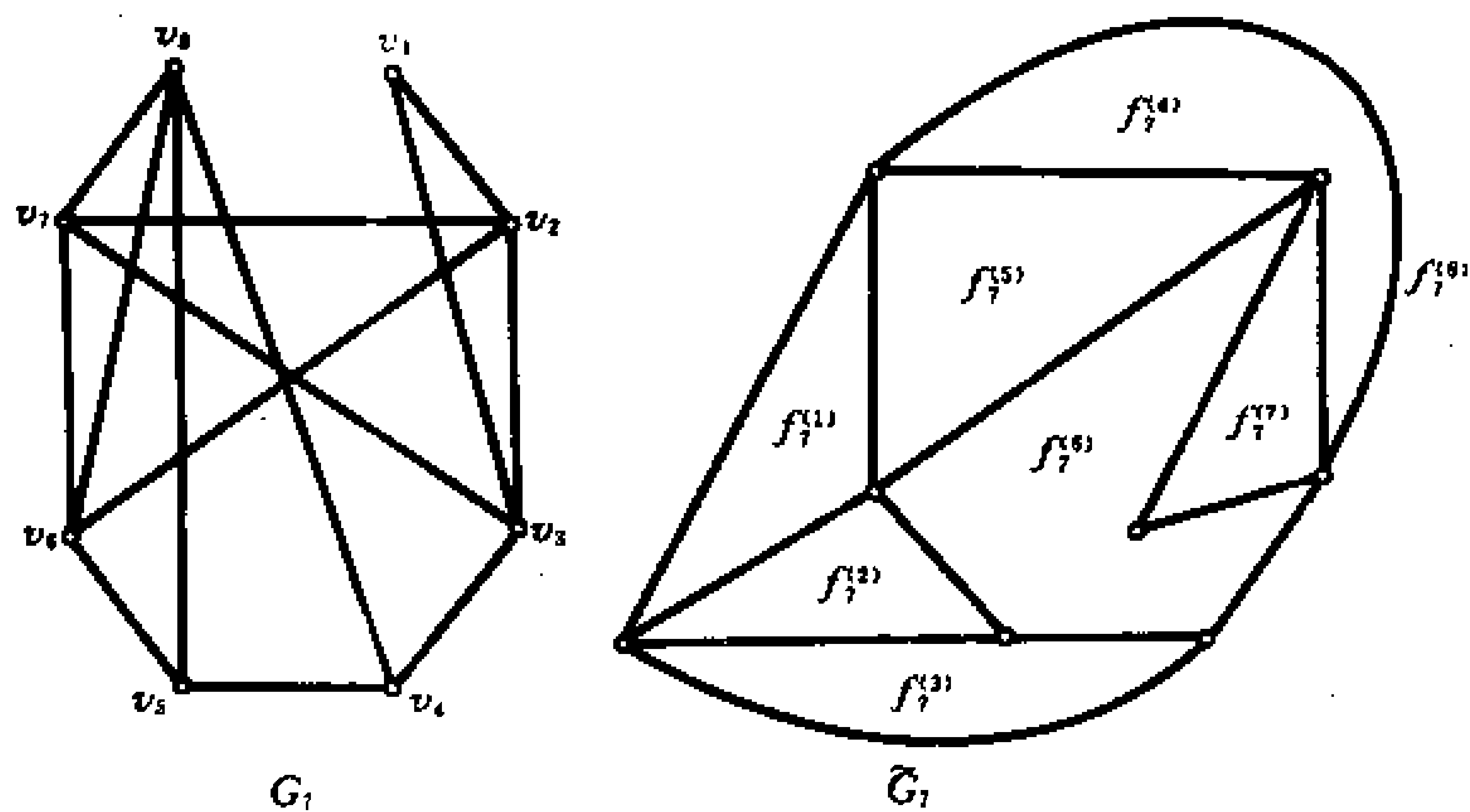


图 10.4-11

对 $B_1^{(7)}$ 和 $B_2^{(7)}$，有

$$F(B_1^{(7)},\tilde{G}_7) = F(B_2^{(7)},\tilde{G}_7) = \{f_7^{(6)}\}$$

取片 $B_1^{(7)}$ 和面 $f_7^{(6)}$。

$7^{(3)}$：在片 $B_1^{(7)}$ 中取连接 $B_1^{(7)}$ 的两个附着点的道路 $P_7=v_1v_4$，置 $G_8=G_7\cup P_7$。在面 $f_7^{(6)}$ 中画出 P_7，得 G_8 的一个平面嵌入(图 10.4-12)。

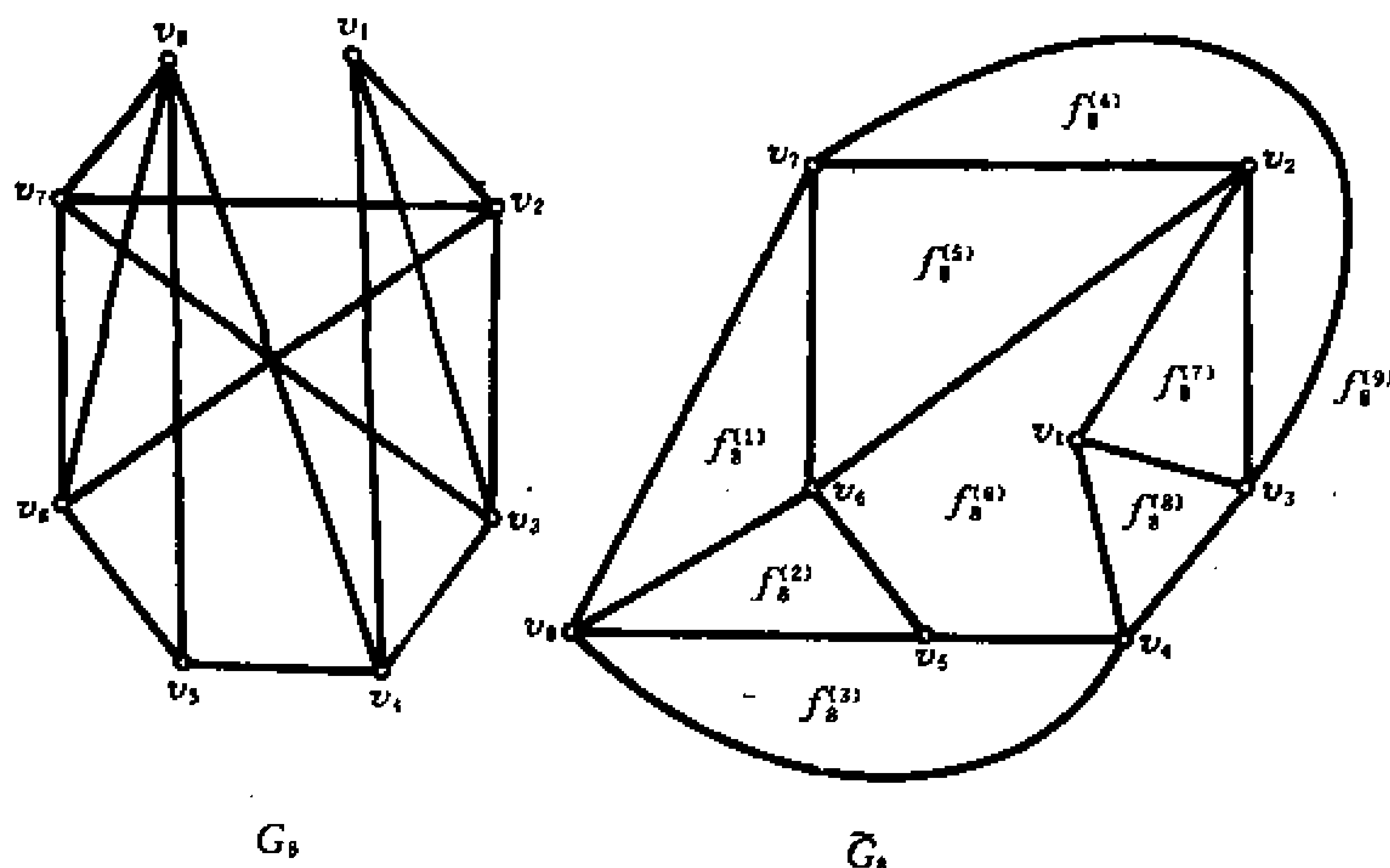


图 10.4-12

$8^{(1)}$：取 G_8 和 $\tilde{G}_8$

$8^{(2)}$：G 中 G_8 的片是 $B_2^{(7)}$，对 $B_2^{(7)}$，有

$$F(B_2^{(7)},\tilde{G}_8) = \{f_8^{(6)}\}$$

取片 $B_2^{(7)}$ 和面 $f_8^{(6)}$。

$8^{(3)}$：在片 $B_2^{(7)}$ 中取连接 $B_2^{(7)}$ 的两个附着点的道路 $P_8=v_1v_5$，置 $G_9=G_8\cup P_8$。在面 $f_8^{(6)}$ 中画出 P_8，得 G_9 的一个平面嵌入(图 10.4-13)。

因为 $E(G)-E(G_9)=\varnothing$，所以算法停止，$\tilde{G}_9$ 是 G 的一个平面图嵌入。

例 10.4.2 用 $D.M.P$ 算法判定 Petersen 图(图 10.4.-14)G 的平面性。

(1) 取 G 的一个圈 G_1，它的平面嵌入 $\tilde{G}_1=G_1$，(图 10.4-15)。

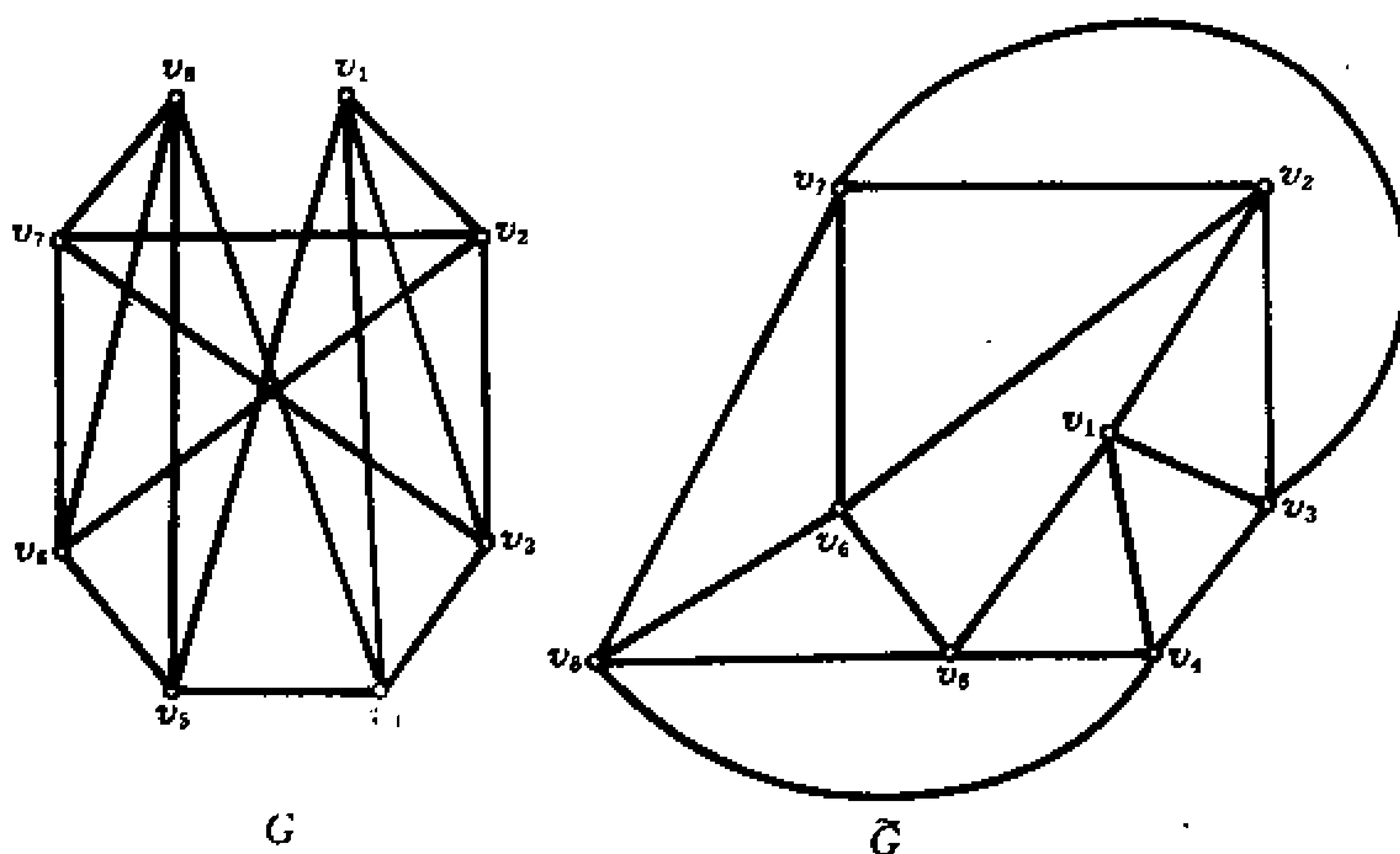


图 10.4-13

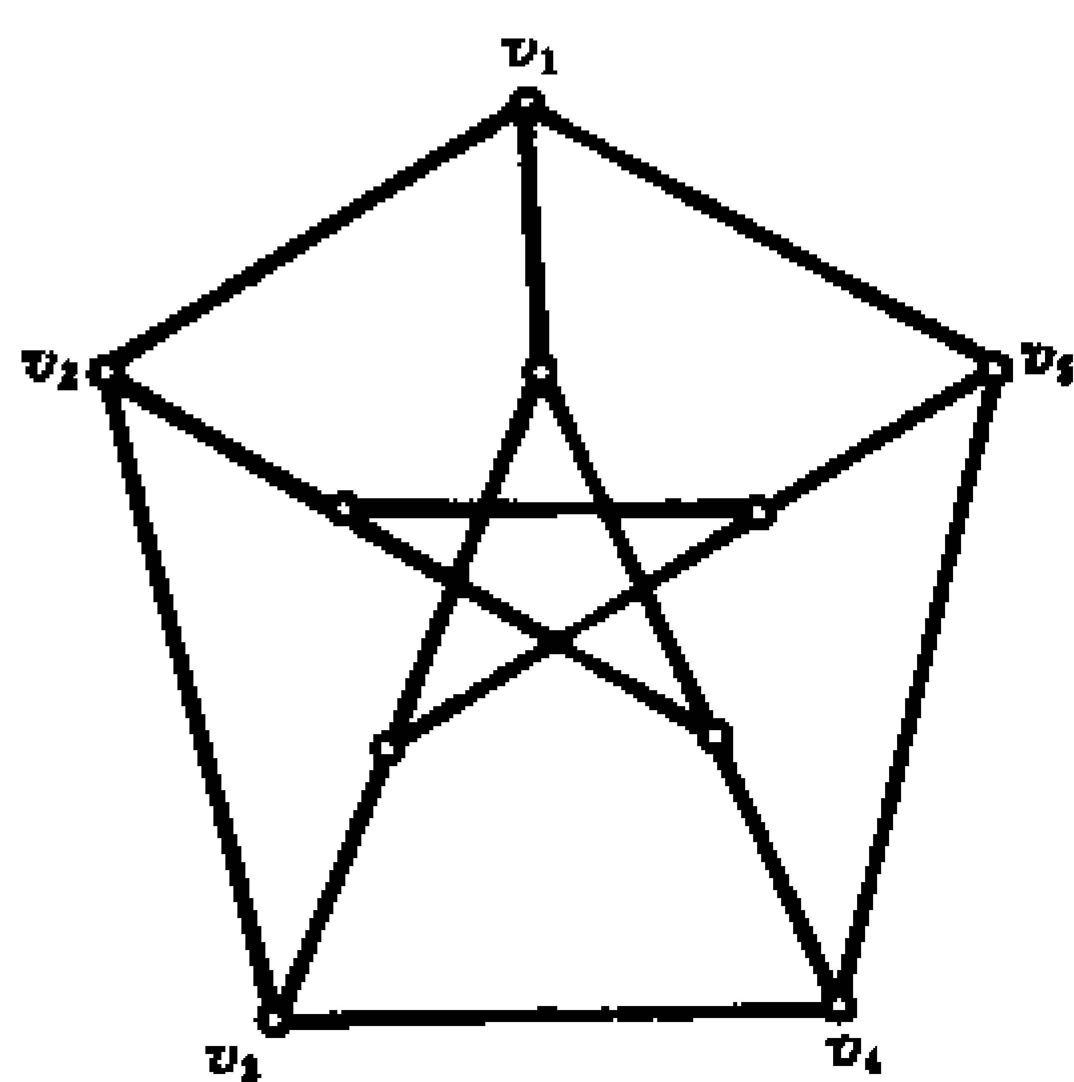


图 10.4-14

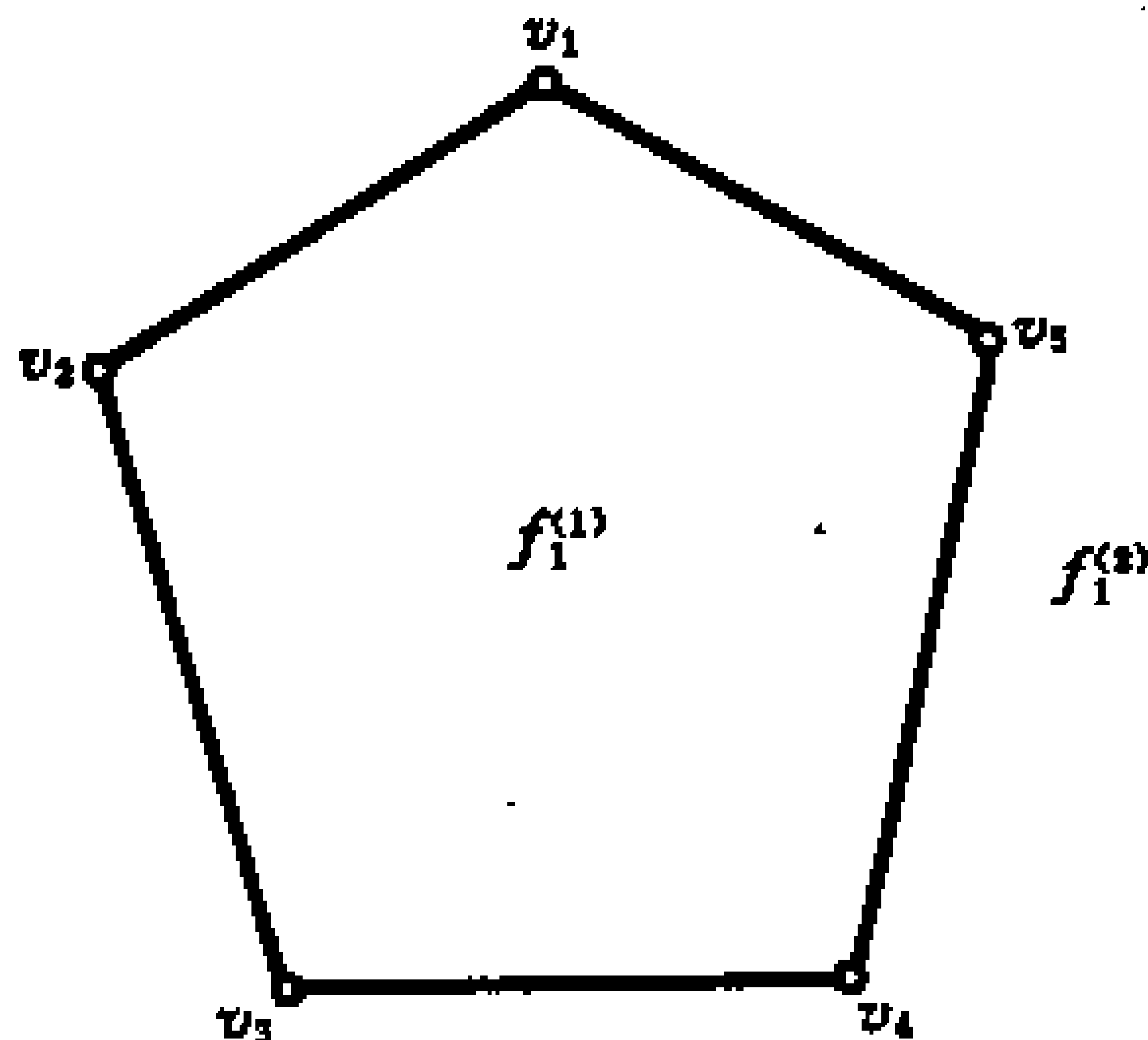


图 10.4-15

(2) G 中 G_1 的片 B_1 如图 10.4-16 所示：

对片 B_1，有

$$F(B_1, \tilde{G}_1) = \{f_1^{(1)}, f_1^{(2)}\}$$

取片 B_1 和面 $f_1^{(1)}$。

(3) 在片 B_1 中取连接附着点 v_3，v_4 的道路 $P_1 = v_3v_8v_6v_5v_4$，置 $G_2 =$

$G_1 \cup P_1$，在面 $f_1^{(1)}$ 中画出 P_1，得 G_2 的一个平面嵌入 $\widetilde{G}_2$（图 10.4-17）。

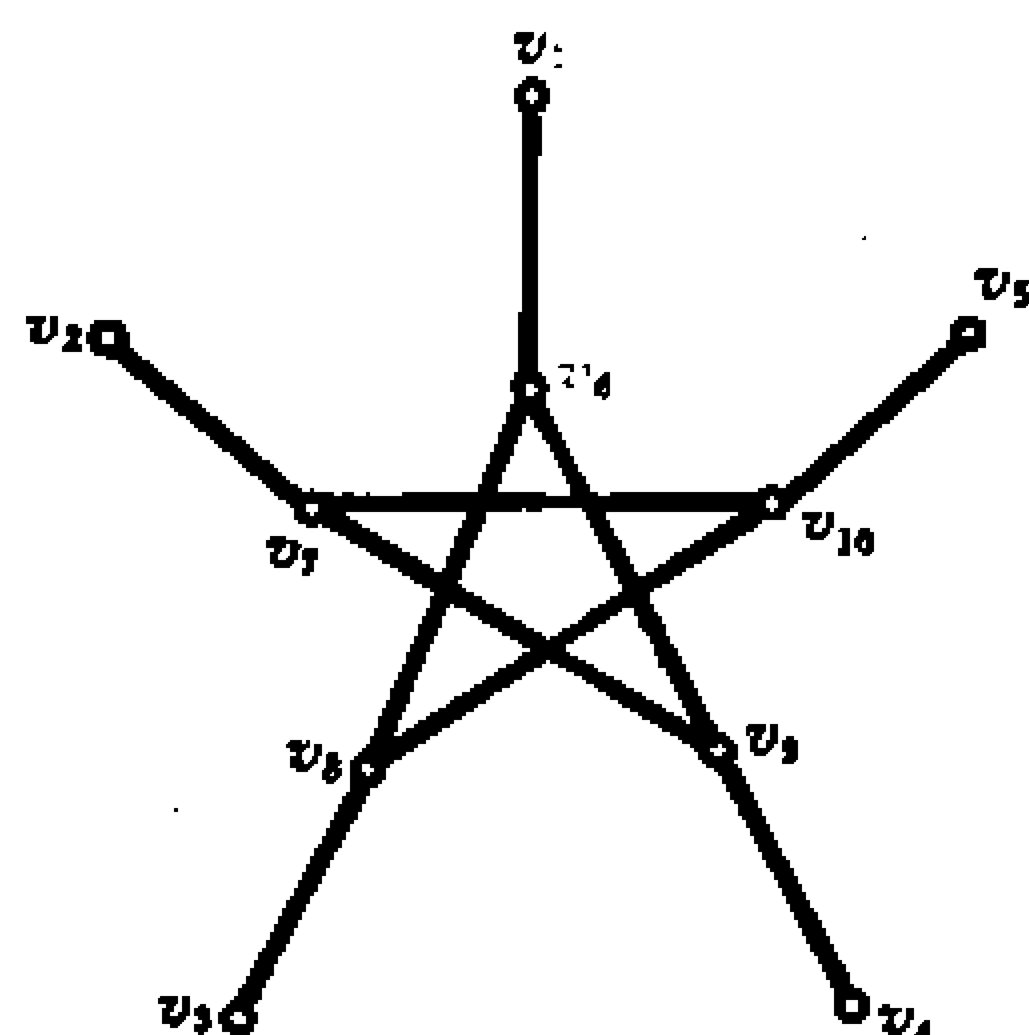


图 10.4-16

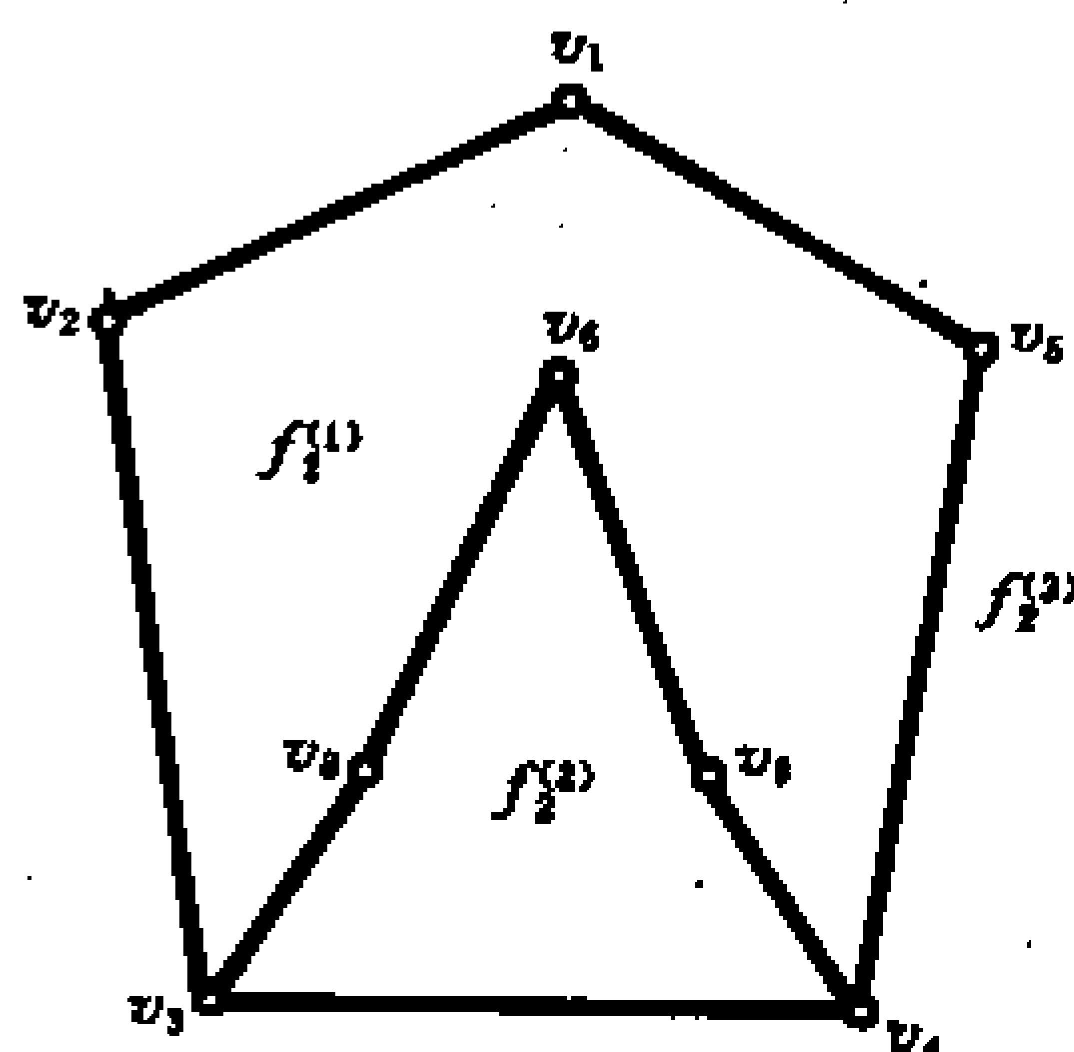


图 10.4-17

(4) G 中 G_2 的片 B_2 和 B_3 如图 10.4-18 所示：

对片 B_1 和 B_3，有

$$F(B_2,\widetilde{G}_2) = F(B_3,\widetilde{G}_2) = \{f_2^{(1)}\}$$

取片 B_2 和面 $f_2^{(1)}$。

(5) 在片 B_2 中取连接附着点 v_1 和 v_6 的道路 $P_2 = v_1v_6$，置 $G_3 = G_2 \cup P_2$，在面 $f_2^{(1)}$ 中画出 P_2，得 $\widetilde{G}_3$（图 10.4-19）。

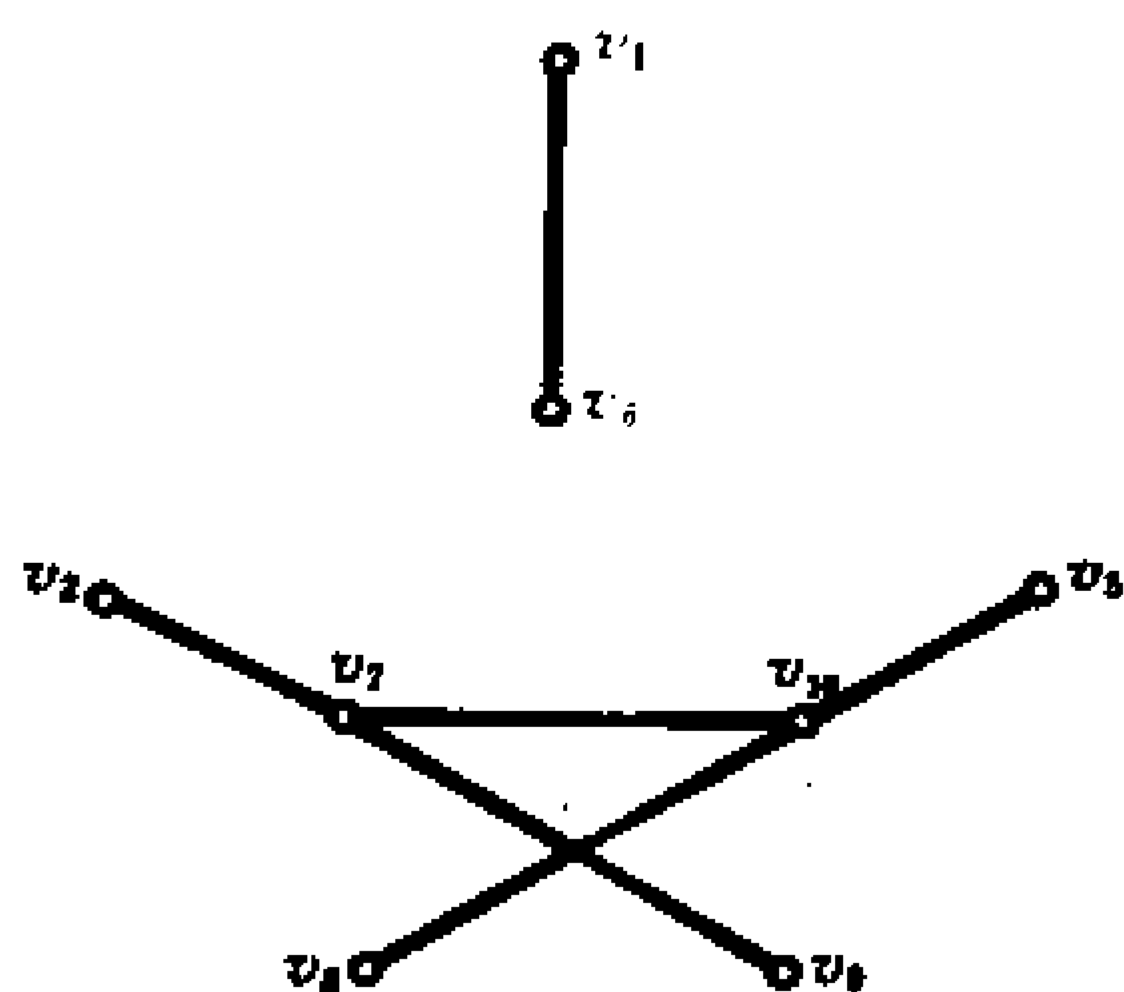


图 10.4-18

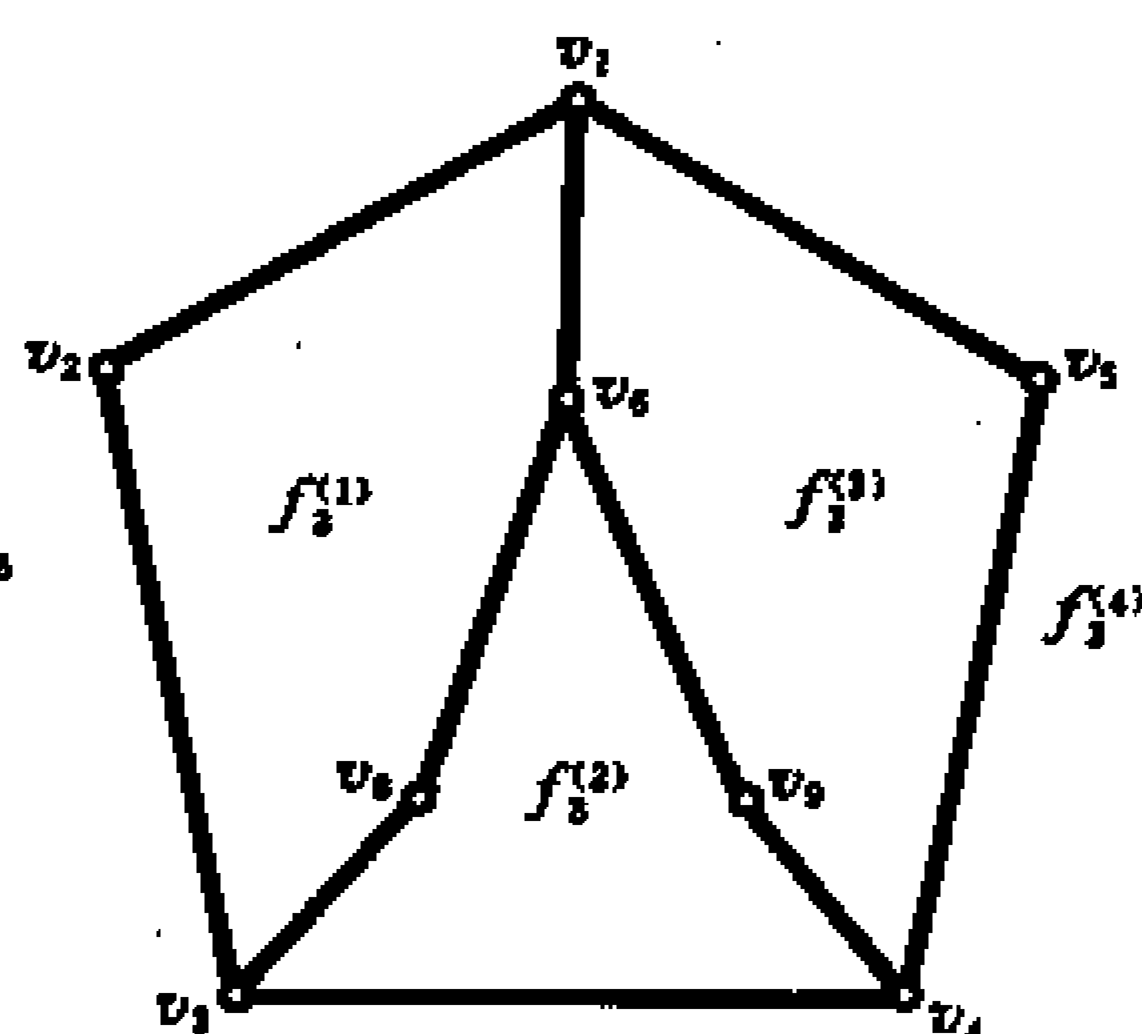


图 10.4-19

(6) G 中 G_3 的片 B_3，对 B_3，有

$$F(B_3,\bar{G}_3) = \varnothing$$

于是片 B_3 不可画，故 Peterson 图是不可平面的。 ▪

10.5 对 偶 图

定义 10.5.1 设 G 是平面图，如果 G 的两个面的边界至少有一条公共边，则称这两个面是**相邻的**。

设 G 是有 p 个顶点，q 条边和 f 个面的平面图，令 G 的 f 个面为 $S_1,S_2,\cdots S_f$。

定义 10.5.2 在图 G 的每个面 S_i 中放置一个顶点 v_i；如果 S_i 和 S_j 相邻，则用边 (v_i,v_j) 连接 v_i 和 v_j，使它与面 S_i,S_j 的公共边只相交一次（此时称 (v_i,v_j) 与所相交的边为对应边），且与 G 的其他边界无交点，这样得到的图 G^* 称为 G 的**对偶图**(dual graph)。

显然，G 的对偶图 G^* 有 f 个顶点和 q 条边。

例 10.5.1 在图 10.5-1 所示的平面图 G(图中实线)的四个面中，分别放置 4 个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4，连接 v_1 和 v_2 与边 c 相交；v_1 和 v_3 分别与 a,b 相交；连接 v_2 和 v_3 分别与 d,e 相交；连接 v_3 和 v_4 与环 h 相交；与边 f,g 相交的是环 (v_3,v_3)，这样得到图 G^*(图 10.5-1 中的虚线)是 G 的对偶图。

显然，若 G^* 是 G 的对偶图，则 G 也是 G^* 的对偶图。

定理 10.5.1 平面图 G 的对偶图是连通的。

［证明］ 把图 G 画在平面 Z 上，在 G^* 中任取两个顶点 v_i 和 v_j（它们分别在 G 的面 S_i 和 S_j 中）。因为 G 中的顶点数是有限的，我们可以在平面 Z 上画一条从 v_i 到 v_j 的边 e，使 e 不经过 G 中的任何顶点。设 G 中与 e 相交的边是 $e_1,e_2,\cdots,e_n$。考虑 G^* 中和 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 相对应的边 $e_1',e_2',\cdots,e_n'$ 组成的子图

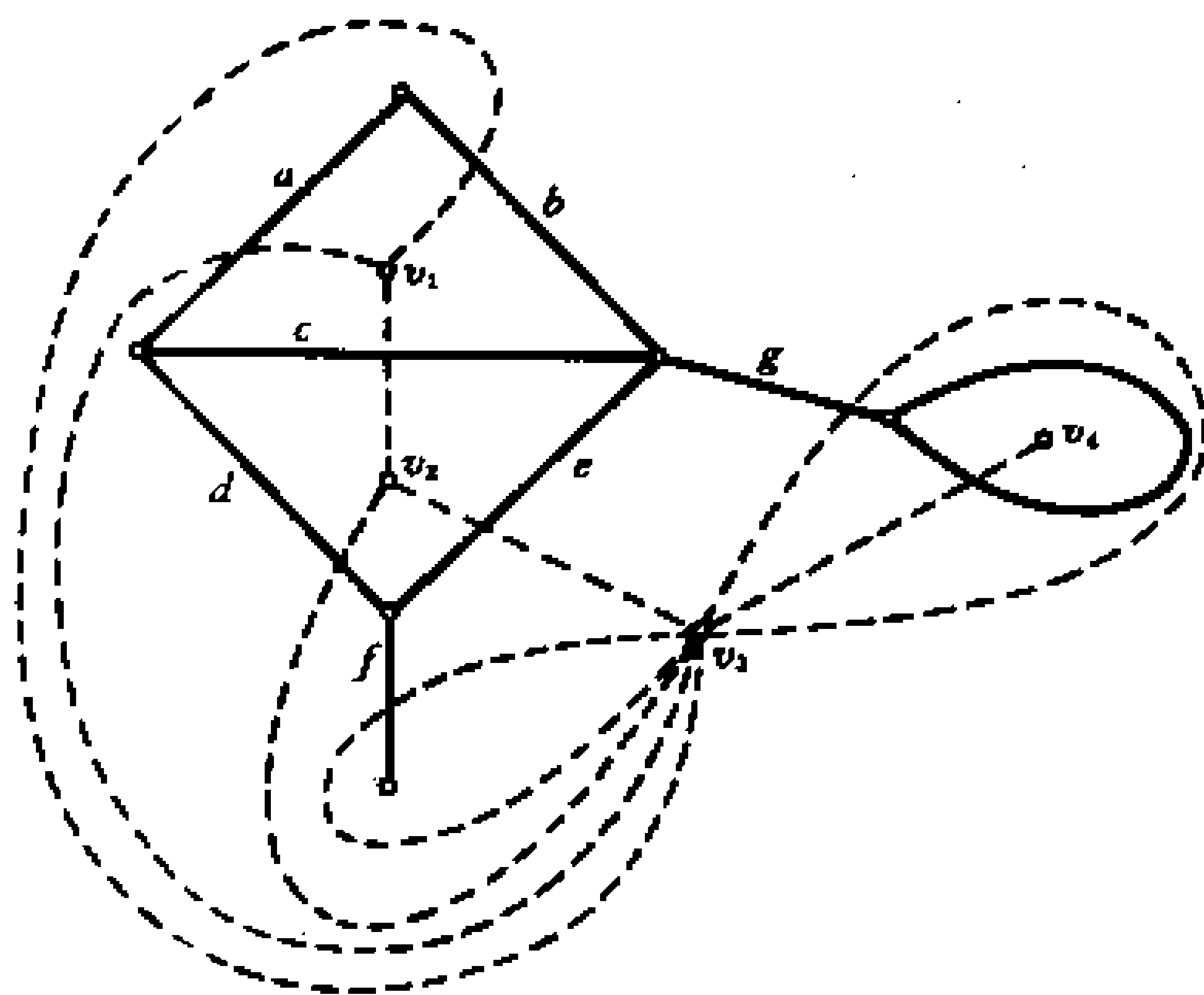


图 10.5-1

g。因为边 e 一一穿过一些边一直画到 v_j，虽然这种画法有些边可能重复，但是，显然在子图 g 中顶点 v_i 和 v_j 间有一条道路，由于这对 G^* 中的任意两个顶点均成立，故 G^* 是连通的。▮

定理 10.5.2 设 G^* 是 G 的对偶图，则 G 中的圈对应 G^* 中的割集；反之，G 中的割集对应 G^* 中的圈。

［证明］ 设 $S_{j_1},S_{j_2},\cdots,S_{j_r}$ 是 G 中圈 $C=e_1e_2\cdots e_n$ 内部包含的面，$v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_r}$ 分别是面 S_{j_i} 中 G^* 的顶点，$e_1',e_2',\cdots,e_n'$ 是 G^* 中与 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 对应的边。令 $V_1=\{v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_r}\}$，则边集 $\{e_1',e_2',\cdots e_n'\}$ 可以写成 $E(V_1\times\overline{V}_1)$ 的形式，即

$$E(V_1\times\overline{V}_1)=\{e_1',e_2',\cdots,e_n'\}$$

如果 $E(V_1\times\overline{V}_1)$ 不是割集，而是割集的边不重并，则由边集 $E(V_1\times V_1)$ 和边集 $E(\overline{V}_1\times\overline{V}_1)$ 导出的子图必有一个是分离的。下面我们来证明这是不可能的。因而边集 $E(V_1\times\overline{V}_1)$ 必是割

集。

设 G_1 是由圈 C 和 C 内部的边所组成的子图，那么 G^* 中和 $G_1-\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 对应的边集就是 $E(V_1\times V_1)$。用 G_r 表示在 G 中把 C 上的边全部收缩（参见定义 9.4.3）后得到的图，则 G_r 的对偶图就是由边集 $E(V_1\times V_1)$ 组成的图。由定理 10.5.1 知，这个对偶图是连通的。同理可证边集 $E(\overline{V}_1\times\overline{V}_1)$ 组成的子图也是连通的。于是定理的前一部分得证。定理的后一部分的证明留给读者。▮

10.6 五色定理

在图论中，也是在数学中一个著名的一直到现在还没有解决的问题就是所谓**“四色猜想”**。

四色猜想是说：一个平面地图只需用 4 种颜色来着色，就可以使得两个相邻的地区没有相同的颜色。每一个地区必须由一个单连通域构成，而两个地区相邻是指它们有一段公共的边界线（而不仅只有一个公共点）。

平面地图 G 的着色，是对 G 的每一个面指定一种颜色，使得没有两个相邻的面有相同的颜色。

若平面地图 G 有一种用 n 种或更少的颜色的着色，就称 G 是 n-可着色的。

因此，四色猜想可叙述为：

每一个平面地图是 4-可着色的。

四色猜想的起源有些模糊，有一种说法是麦比乌斯（Mobius）在 1840 年就熟悉这个问题。但是可以肯定，1850 年格思里（Guthrie）把四色猜想转告给德·摩根（De morgan）。

四色猜想是一个至今仍没有得到理论证明[①]的著名数学难题。虽然如此，在一百年来试图证明四色猜想的历史长河中发展了图论的许多方面。

1871 年，肯普(Kempe)给出了四色猜想的许多错误"证明"中的第一个"证明"。1890 年，希伍德(Heawood)发现了它的一个错误，但是希伍德指出，如果把"四"换成"五"，这个猜想就对了。

我们知道，一个图的着色是指它的顶点的着色，而一个平面地图的着色是指它的面的着色，但是我们有下面的

命题 10.6.1 平面地图 G 是 n-可着色的与 G 是 n-可着色的说法是等价的。

[证明] 令 G^* 是 G 的对偶图。因为 G 的两个面是邻接的当且仅当 G^* 的对应顶点是邻接的。所以由图 G^* 是 n-可着色的(指顶点着色!)就得到 G 是 n-可着色的(指面着色!)。

反之，假定平面地图是 n-可着色的，而令 H 为任何一个可平面图，不失一般性，假定 H 是一个连通的平面图。令 H^* 是 H 的对偶图，并且将 H^* 画成它的每一个面正好包含 H 的一个顶点。在 H^* 的每一个环中插入一个新顶点；这样，连通的平面图 H^* 就变成一个平面图 H'。H' 的 n-可着色性就蕴含 H 是 n-可着色的。▌

下面我们来证明五色定理。

定理 10.6.1 每一个可平面图是 5-可着色的。

[证明] 对顶点个数用归纳法。

假定所有有 $p-1(\geqslant 5)$ 个顶点的可平面图是 5-可着色的。令 G 是一个有 p 个顶点的可平面图。由推论 10.2.6 知，

① 1976 年美国的阿普尔(K. Appel)、黑肯(W. Hakan)和考齐(J. Koch)等三人声称他们借助于计算机，用了 1200 个小时证明了四色猜想。

G 含有一个度为 5 或小于 5 的顶点 v_0，由归纳法假设，$G-v_0$ 是 5-可着色的。

考虑用一种方法指定 $G-v_0$ 的顶点的着色，使之产生一个 5-着色，其中颜色用 c_i 表示 $1\leqslant i\leqslant 5$。若某种颜色，例如 c_j 确实没有用于邻接于 v_0 的顶点的着色，则将 v_0 指定为 c_j，就产生 G 的一个 5-着色。于是仅考虑 $\deg v_0=5$，而且五种颜色都用来给与 v_0 邻接的顶点着色。必要时置换颜色的编号，使从 c_1,c_2,c_3,c_4 和 c_5 着色的顶点依次环绕 v_0 排列，现在把与 v_0 邻接的顶点中用颜色 c_i 着色的顶点标以 v_i，$1\leqslant i\leqslant 5$（图 10.6-1）。

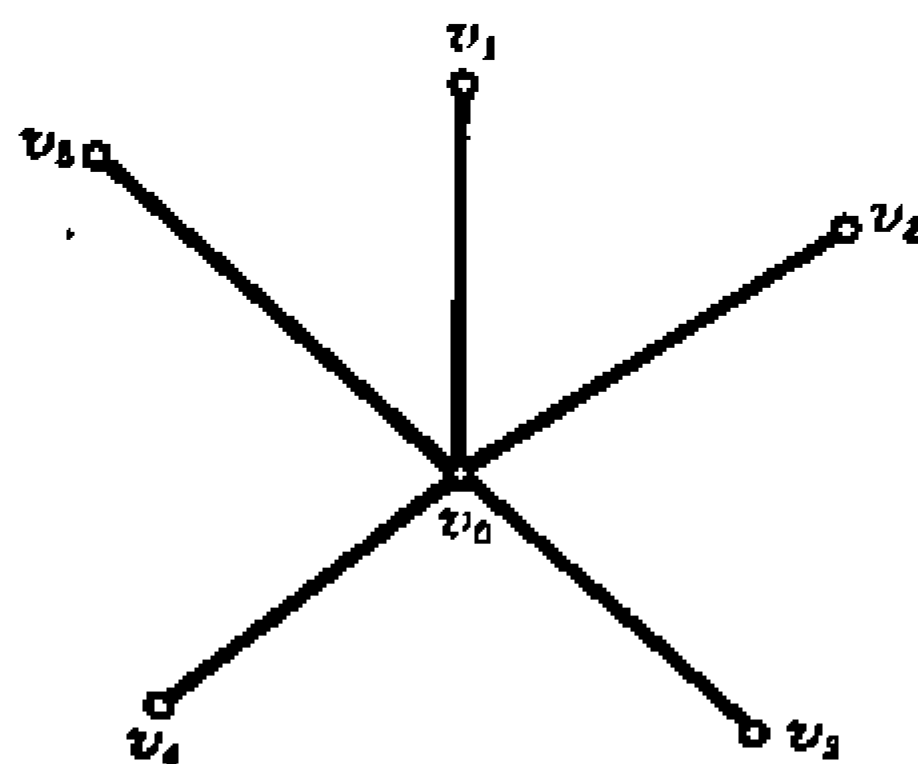


图 10.6-1

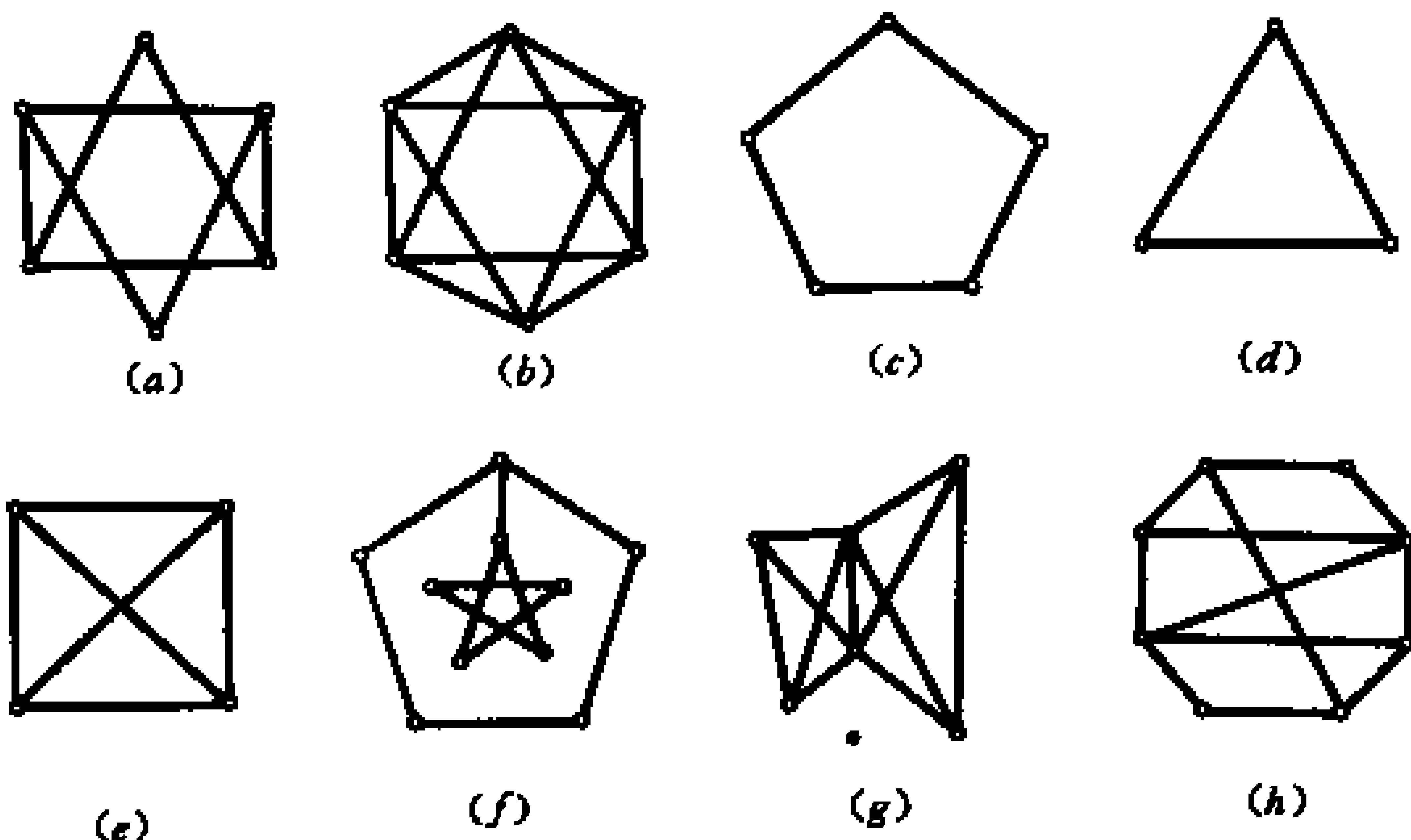
令 G_{13} 记 $G-v_0$ 的一个子图，它由用 c_1 或 c_3 着色的顶点导出。若 v_1 和 v_3 属于 G_{13} 不同的分支，则在 G_{13} 的含 v_1 的分支中交换用 c_1 着色的顶点和用 c_3 着色的顶点的颜色，导出 $G-v_0$ 的另外一个 5-着色。但是在这个 5-着色中，邻接于 v_0 的顶点没有一个用 c_1 着色。所以用 c_1 将 v_0 着色得到 G 的一个 5-着色。

另一方面，若 v_1 和 v_3 属于 G_{13} 的同一分支，则在 G 中存在一条 (v_1,v_3) 道路，它的所有的顶点都用 c_1 或 c_3 着色。(v_1,v_3) 道路与 $v_1v_0v_3$ 道路构成一个圈，它把 v_2 包含在它里面，或者同时把 v_4 和 v_5 也包含在它里面。在任何一种情况下，存在联结 v_2 和 v_4 并且全部顶点用 c_2 或 c_4 着色的道路。从而，如果令 G_{24} 记 $G-v_0$ 的由用 c_2 或 c_4 着色的顶点导出的子图，则 v_2

和 v_4 属于 G_{24} 的不同的分支。于是，在 G_{24} 的含有 v_2 的分支中交换用 c_2 着色的顶点与用 c_4 着色的顶点的颜色，导出 $G-v_0$ 的又一个 5-着色，其中没有一个与 v_0 邻接的顶点用 c_2 着色。于是我们可以将 v_0 指定为颜色 c_2，而得到 G 的一个 5-着色。▌

习 题 十

10-1 指出下列哪些是可平面图？哪些是不可平面图？并对其中的可平面图作出它的一个平面嵌入。



题 10-1 图

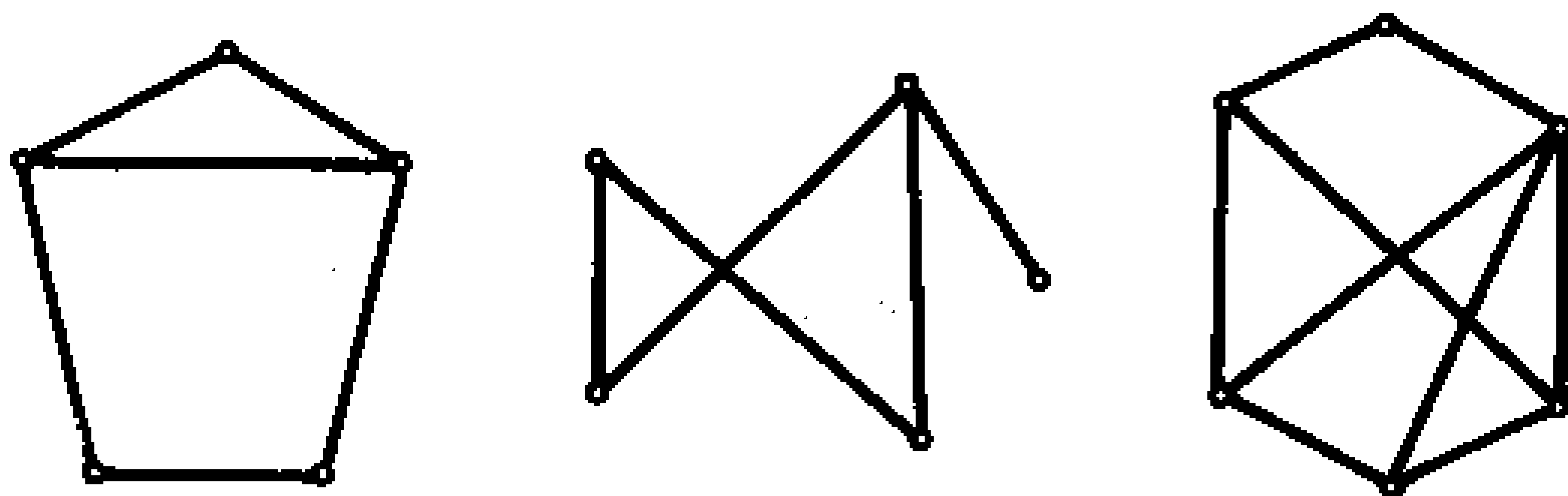
10-2 下列各图是否是最大可平面图？若不是，试在图中加边，使其成为最大可平面图。

10-3 若图 $G=(V,E)$ 适合

$$q \leqslant 3p-6$$

其中 $|V|=p$，$|E|=q$，则 G 一定是最大可平面图吗？为什么。

10-4 证明：



题 10-2 图

(1) 对 K_5 的任一边 e，K_5-e 是可平面的。

(2) 对 $K_{3,3}$ 的任一边 e，$K_{3,3}-e$ 是可平面的。

10-5 证明：若 G 是 $p\geqslant 11$ 的可平面简单图，则 $\overline{G}$ 是非可平面的。

10-6 平面图若和它的对偶图同构，则称图为自对偶图。证明：若 G 是自对偶的，则 $q=2p-2$。

10-7 证明平面欧拉图的对偶图是二部图。

10-8 用 $D.M.P$ 算法验证 $K_{3,3}$ 和 K_5 是不可平面的。

10-9 证明：每一个可平面图是 6—可着色的。

10-10 证明：无割边的平面连通图 G 是 2—面可着色的当且仅当 G 是连通欧拉图。

第十一章　最短道路与最小树

实际生活中，经常遇到各种各样的图，诸如交通运输图，线路图，工序流线图等等。在这些图中，常常要考虑所谓最短道路问题。最短道路和最小树是图论应用中的基本问题之一。本章讨论两类最短道路问题，最小树问题，本章还将讨论道路的集合与最优化问题。

11.1　道路集合

本节讨论如何求出图 G 中某两个顶点间的所有道路。

定义 11.1.1　设 A 是一个以集合为元素的集合，如果

1. A 中存在互不包含的元素 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_r$；

2. 对任意 $\beta\in A(\beta\neq\alpha_i,i=1,2,\cdots\cdots,r)$，存在一个 α_j，使 $\alpha_j\subset\beta$，则称 $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 A 的**最小化集合**(minimi zing set)，记为 $\min A\{\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$。

假设 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$。可按下列步骤求得 $\min A$：

依次考察 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，看 A 中是否有一个异于 α_i 使得 $\alpha_i\subset\alpha_j$，如果有就留下 α_i 去掉 α_j，否则把 α_i 留下，这样最后留下的那些 α_k 就是 $\min A$。这种求 $\min A$ 的运算称为**最小化运算**(minimizing operate)。

例 11.1.1　设$\{E\}$为图 11.1-1 所示的图的所有圈和环路的集合(图 11.1-2)。

由图 11.1-2 知

$\{E\} = \{\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,e\},$
$\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{a,d,e\},$
$\{a,b,c,d\}\}$

因为在$\{E\}$中仅有$\{a,b,c,d\}$有非空子集$\{a,b\}$，即$\{a,b,c,d\}\supset\{a,b\}$，在$\{E\}$中删去$\{a,b,c,d\}$，故有

$\min\{E\} = \{\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,e\},$
$\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{a,d,e\}\}$

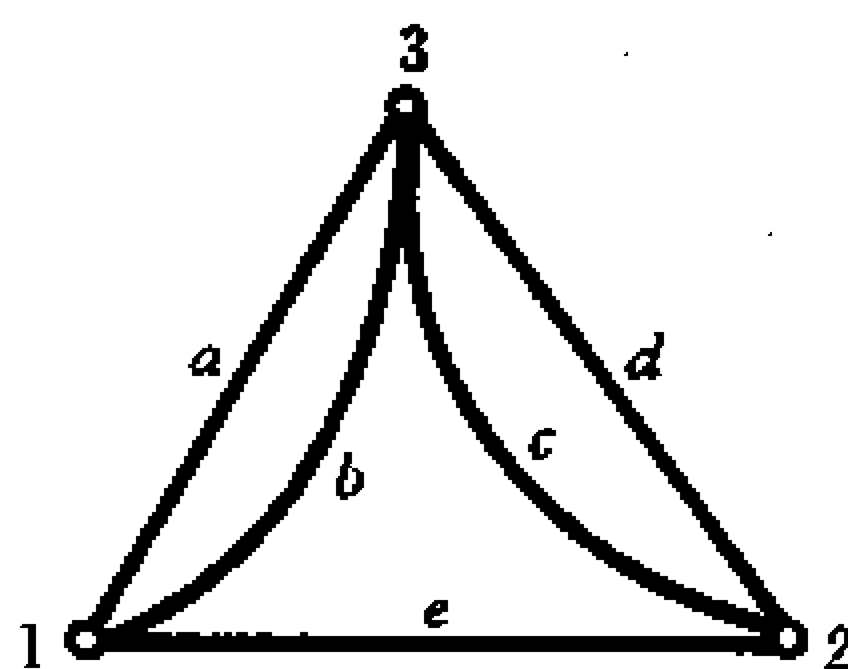


图 11.1-1

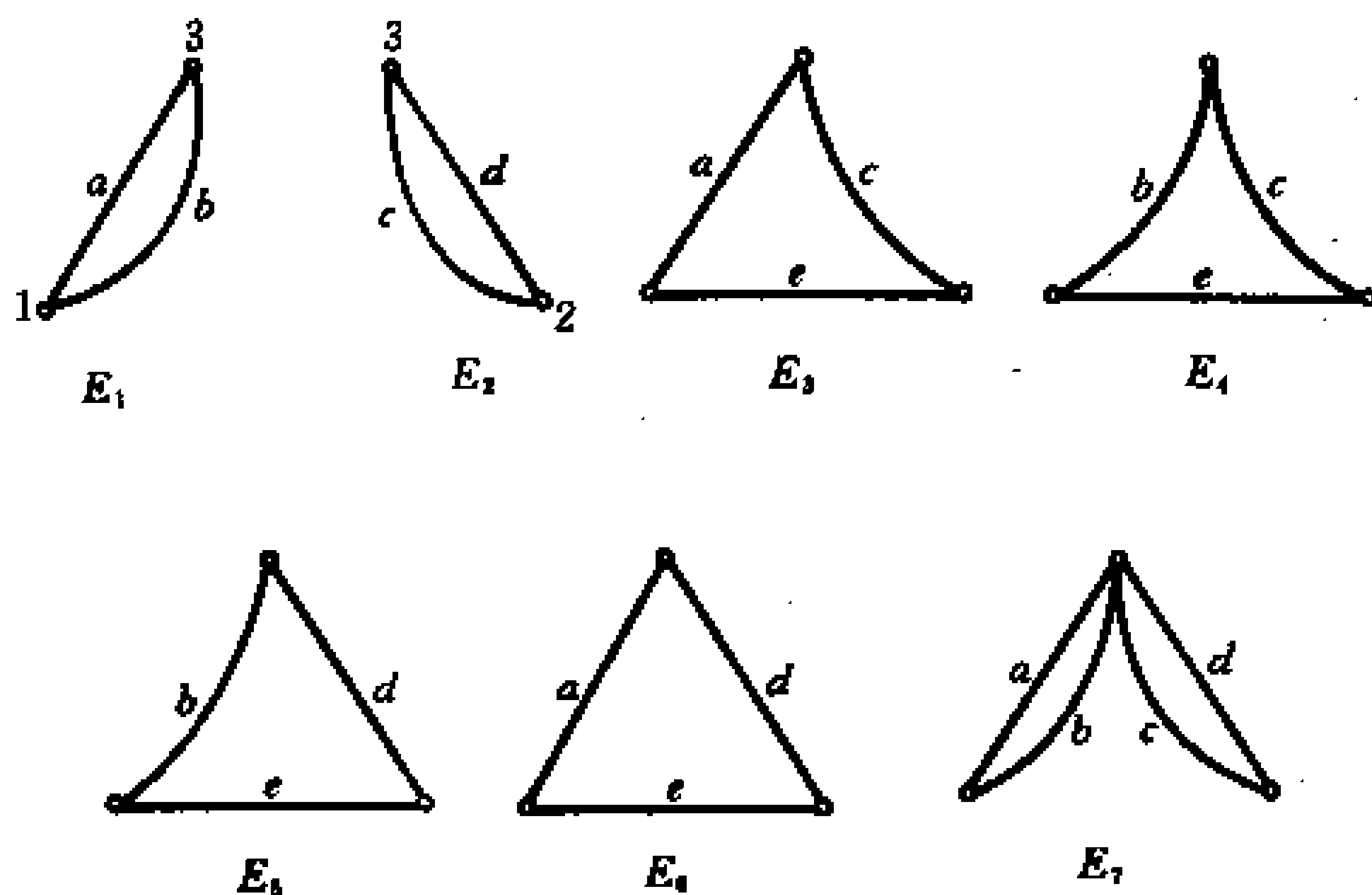


图 11.1-2

定理 11.1.1 设$\{E\}$表示图 G 的所有圈和环路的集合，$\{C\}$表示 G 的所有圈和空集的集合，$\{M_{ij}\}$表示所有只有 v_i 和 v_j 的度为奇数的图的集合，$\{P_{ij}\}$表示所有(i,j)道路的集合，则有

$$\min\{E\} = \{C\},\min\{M_{ij}\} = \{P_{ij}\}$$

[证明] 先证第一个等式，因为$\{E\}$由图的所有圈和环路及空集组成，若 $E_1\in\{E\}$是圈 $C_1,C_2,\cdots\cdots,C_k$ 的边不重并，由于圈 C_1 即是$\{E\}$中的元素，又有 $C_1\subset E_1$，故在求 $\min\{E\}$的

过程中 E_1 将被删去。又圈中的任一真子图不会是圈，这就是说，任一圈在求 $\min\{E\}$ 时都不能被删去，因此，$\min\{E\}=\{C\}$。

现证第二个等式。设 M_1 是以 i,j 为端点的除 i,j 外顶点的度均为偶数的图，即 $M_1\in\{M_{ij}\}$。那么 M_1 是一条道路 P_{ij} 或一条道路和欧拉图的边不重并，如果是后者，则在求 $\min\{M_{ij}\}$ 的过程中将被删去，故 $\{M_{ij}\}$ 是道路的集合。下面证明 $\min\{M_{ij}\}$ 是所有 (i,j) 道路。假如 P'_{ij},P''_{ij} 是两条 (i,j) 道路，则 $P'_{ij}\oplus P''_{ij}$ 应为圈或环路，如果 $P''_{ij}\subset P'_{ij}$，那么 $P'_{ij}\oplus P''_{ij}\subset P'_{ij}$，但道路的子图不可能是圈或环路。因此，$P''_{ij}\not\subset P'_{ij}$。同理 $P'_{ij}\not\subset P''_{ij}$。这就是说，在求 $\min\{M_{ij}\}$ 的过程中任何一个 (i,j) 道路都不可能被删去。∎

定理 11.1.2 设 $P_0\in\{P_{ij}\}$，则

$$\min\{P_0\oplus E;E\in\{E\}\}=\{P_{ij}\}$$

〔证明〕 对任意的 $P\in\{P_{ij}\}$，由推论 3.1.3，$P_0\oplus P$ 是一个环路，即 $P_0\oplus P\in\{E\}$，于是

$$P_0\oplus(P_0\oplus P)=(P_0\oplus P_0)\oplus P=P$$

对于 $\{E\}$ 中不是由 $P_0\oplus P$ 形成的环路，在求最小化集合时将被删去，故有

$$\min\{P_0\oplus E;E\in\{E\}\}=\{P_{ij}\} \quad ∎$$

定理 11.1.2 表明，只要求出图 G 的全部圈和环路，就可以求出任意两个顶点之间的全部道路。

开关理论是道路集合的一个应用领域，若某一个图表示一开关网络，其中每一条边表示一个开关变量，从顶点 i 到顶点 j 的一个开关函数可表示成

$$F_{ij}=\sum_{(q)}\text{道路 }P_{q_{ij}}\text{ 积}$$

其中 $\sum_{(q)}$ 表示所有 i,j 间道路的环和，道路 $P_{q_{ij}}$ 积是与 $P_{q_{ij}}$ 中相关联的所有开关变量的乘积。因此，如果我们知道了所有的 (i,j) 道路，就可以求出函数 F_{ij}。

例 11.1.2 图11.1-3表示一个开关网络，其中 a,b,c,d,e,f,g 是开关变量，求 F_{14}

我们先来求$\{E\}$

取一棵生成树 $T=\{a,b,c,f\}$ 于是

$$C_1=\{a,c,d\},$$

$$C_2=\{a,b,c,e\},$$

$$C_3=\{c,f,g\}$$

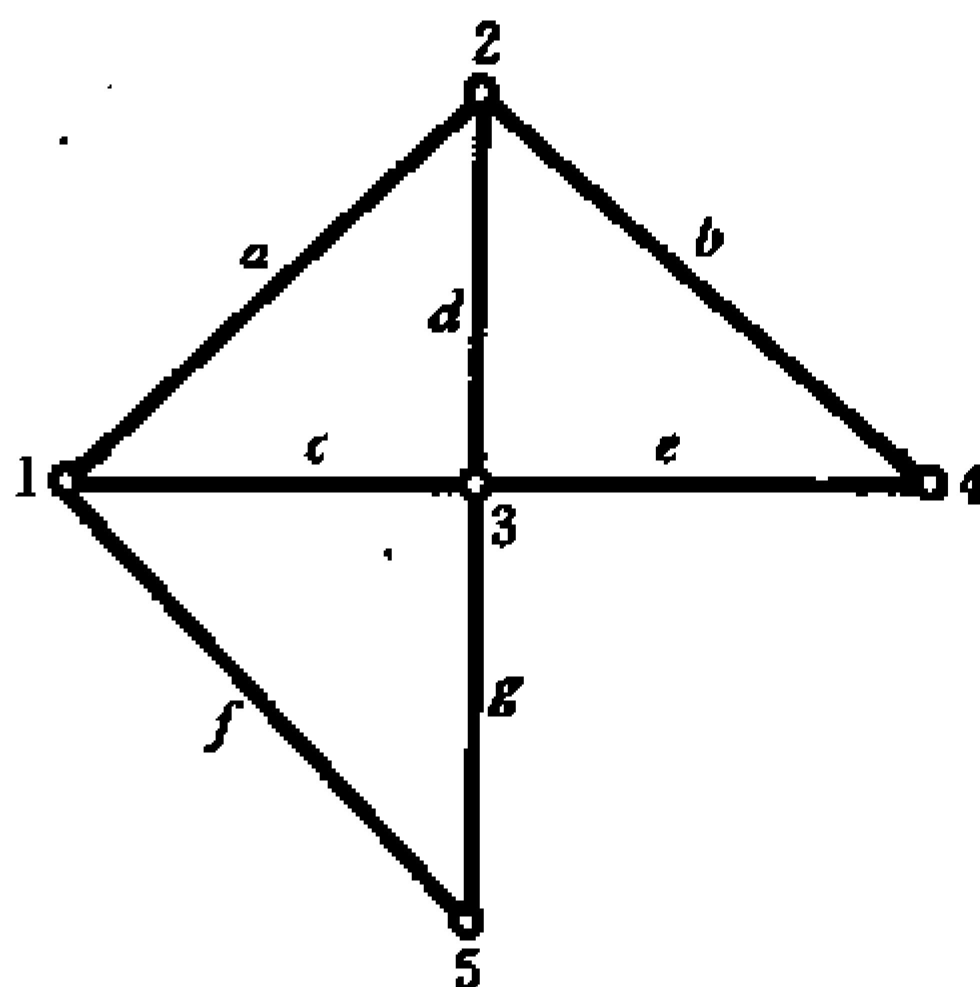


图 11.1-3

作环和：

$$C_4=C_1\oplus C_2=\{b,d,e\}$$

$$C_5=C_1\oplus C_3=\{a,d,f,g\}$$

$$C_6=C_2\oplus C_3\{a,b,e,f,g\}$$

$$C_7=C_1\oplus C_2\oplus C_3=\{b,c,d,e,f,g\}$$

取一(1,4)道路 $P_0=(a,b)$，那么

$$\{P_0\oplus C_i|i=1,2,\cdots\cdots,7\}$$

$$=\{(a,b)\oplus\Phi,(a,b)\oplus C_1,(a,b)\oplus C_2,(a,b)\oplus C_3,$$

$$(a,b)\oplus C_4,(a,b)\oplus C_5(a,h)C_6,(a,h)\oplus C_7\}$$

$$=\{(a,b),(c,d,b),(c,e),(a,b,c,f,g),(a,d,e)$$

$$(b,d,f,g),(e,f,g),(a,c,d,e,f,g)\}$$

由定理 11.1.2，得

$$\{p_{14}\}=\min\{P_v\oplus C_i,i=1,2,\cdots\cdots7\}$$

$$=\{(a,b),(c,e),(c,d,b),(a,d,e),(e,f,g),$$

$$(b,d,f,g)\}.$$

于是

$$F_{14}=ab+ce+bcd+ad+efg+bdfg.$$

11.2 最短道路

定义 11.2.1 设图 $G=(V,E)$，对 G 的每一条边 (v_i,v_j)，相应地有一个数 $l(v_i,v_j)$（简记作 (l_{ij})）称为边 (v_i,v_j) 的**权**(weight)。G 连同在它边上的权称为**赋权图**(weighted graph)。

定义 11.2.2 设 H 是赋权图 G 的子图，**H 的权**，是它每一条边的权的和。

为了说明清楚起见，在赋权图中，一条边的权也说成是它的**长**。由定义 11.2.2，G 中一条道路 $\mu=v_{i_1}v_{i_2}\cdots\cdots v_{i_k}$ 的长是 μ 上所有长的和，即

$$\sum_{r=1}^{k-1} l(v_{i_r},v_{i_{r+1}})$$

在赋权图中给定一个顶点 v_i（称为始点）及顶点 v_j（称为终点）。所谓最短道路问题就是在 (v_i,v_j) 道路集合 $\{P_{ij}\}$ 中，寻求长为最小的道路，这样的道路称为从 v_i 到 v_j 的**最短道路**。从 v_i 到 v_j 的最短道路的长记作 $d(v_i,v_j)$。

最短道路问题可以直接应用于生产实际。例如，各种管道的铺设，线路的安排，输送网络最小费用流问题等等，近年来也有人把最短道路问题应用于解整数规则及某些特殊动态规划问题中。譬如，曾有人考虑过这样一个问题：甲地至乙地约有 100 公里，要在两地之间铺设煤气管道。将两地之间的长方形地区划分为格子点，横的 10 段，直的 24 段，共 $11\times25=275$ 个格子点。每横段或直段是 4 公里长，斜段是 $4\sqrt{2}$ 公里。从一点至邻近格子点的费预先估计出来。这是根据地形、土壤、是否通过江河、泥塘、农田，村庄，郊区、城镇、公路、铁路等各种情况估计的。这样就有了铺设管道的造价 l_{ij}，求由甲至

乙经过哪些格子点来铺设管道使总的造价最小。这就是用最短道路问题解决动态规划的一个例子。

我们要指出，问题中所说的"长"(即权)具有广泛意义，比如，在输送网络中，从 v_i 输送一个单位的物质到 v_j，若"长"是指通常意义下的距离，则最短道路就是使运输距离最短的运输路线；若"长"表示时间，最短道路就是运输时间最短的路线；也可以代表费用等等。

我们介绍两类最短道路问题的算法。

在下面的讨论中，我们假定边的长 $l_{ij}\geqslant 0$，如果顶点 v_i 与 v_j 不邻接，则令 $l_{ij}=+\infty$(在实际计算中，可用任一足够大的数代替)，又对图中每个顶点，令 $l_{ii}=0$。

第一类问题

从一个始点 v_1 到一个终点 v_N 的最短道路。

目前公认的最好算法是由得克斯特拉(E. W. Dijnstra)于1959 年提出的，它不仅求出从 v_1 到 v_N 的最短道路，最后所得到的实际上是从 v_1 到各顶点的最短道路。

先给赋权图 G 的每一个顶点记一个数(称为标号)—临时标号(简称 T 标号)或者固定标号(简称 P 标号)。T 标号表示从始点到这一点的最短道路长的上界；P 标号则是从始点到这一点的最短道路长。每一步把某个点的 T 标号改变为 P 标号。这样，一旦终点得到 P 标号，算法停止。若寻求从始点到每一点的最短道路，则最多经过 $N-1$ 步算法停止(N 是 G 的顶点数)。

Dijkstra 算法的步骤：

(1) 给始点 v_1 标上 P 标号 $d(v_1)=0$，给其他各点标上 T 标号 $d(v_j)=l_{1j}(j=2,3\cdots\cdots,N)$

(2) 在所有 T 标号中取最小者，譬如说是 $d(v_{j_0})=l_{1j_0}$，则

把点v_{j_0}的T标号改为P标号。

(3) 重新计算具有T标号的其他各点的T标号：选点v_j的T标号$d(v_j)$与$d(v_{j_0})+l_{j_0}$中较小者作为v_j的新的T标号。

一般地，设$P=\{v_j|v_j$具有P标号$\}$，$T=\{v_j|v_j$具有T标号$\}$ $V\backslash P$(V为图G的顶点集合)。令

$$d(v_k) = \min_{v_j\in T}\{d(v_j)\} \qquad (11.2\text{-}1)$$

为点的P标号，于是$v_k\in P$。把$T\backslash\{v_k\}$中点v_j的T标号修改为

$$\min\{d(v_j), d(v_k) + l_{kj}\}$$

(4) 重复上述步骤，直到$v_N\in P$，这时$d(v_N)$是从v_1到v_N的最短道路长。

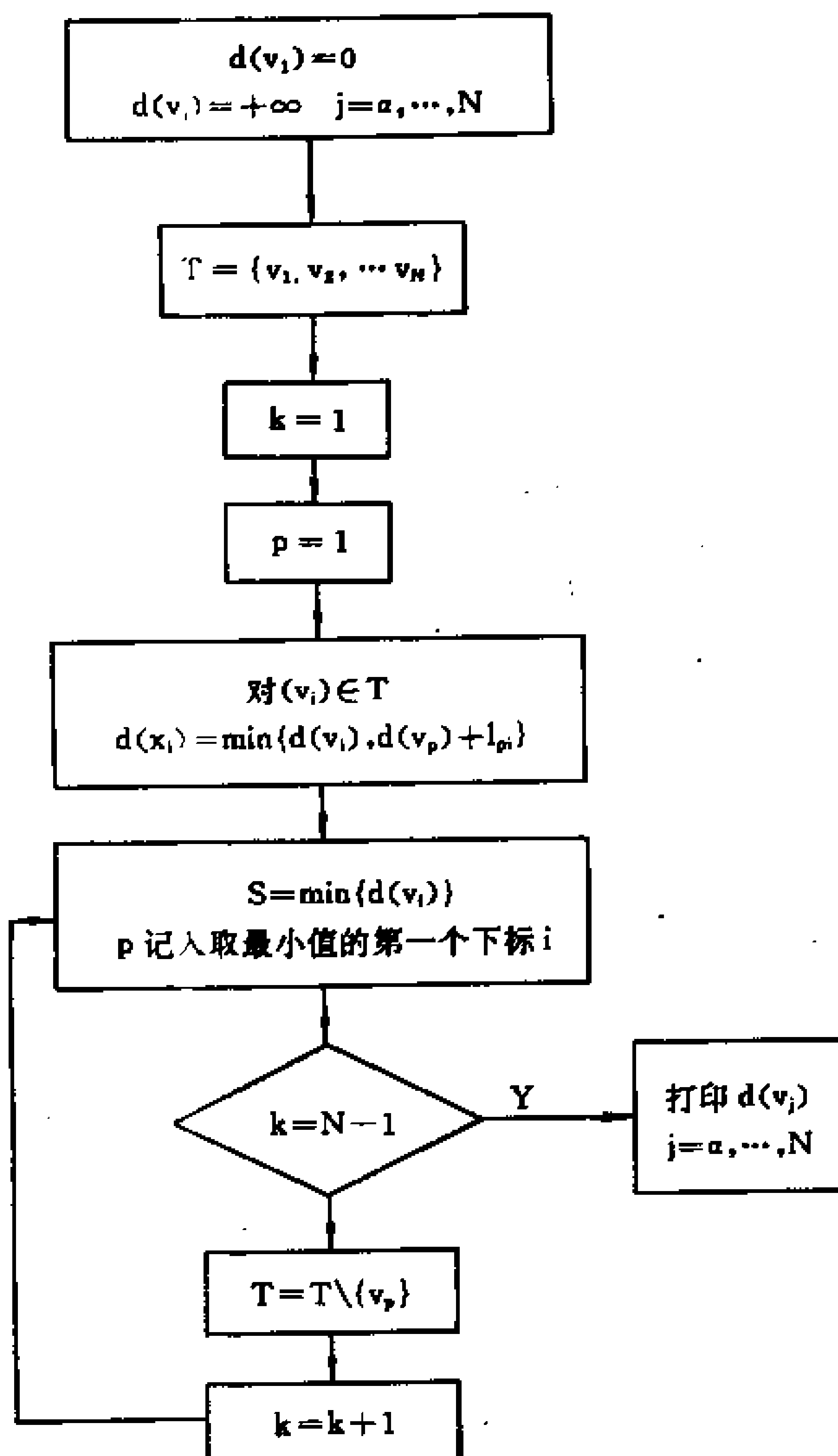
如果问题只要求从v_1到v_N的最短道路，那么在编制程序时，可安排停机，一般会缩短时间，或者$|P|=N-1$，这时，求得从v_1到每一点的最短道路长。

算法的正确性是显然的。因为在任一步，设P中每一点的P标号是从v_1到该点的最短道路的长(开始$P=\{v_1\}$，$d(v_1)=0$，这个假设显然是对的)，那么只要说明(11.2-1)式$d(v_k)$正是从v_1到v_k的最短道路长就行了。事实上，任一条从v_1到v_k的道路，若通过T的第一个点是v_p，而$v_p=v_k$的话，由于所有边长为非负，则这种道路的长不会比$d(v_k)$小。

在编制计算机程序时，也可以把开始各点的T标号为$+\infty$。

例 11.2.1 求图 11.2-1 所示的赋权图G中从顶点v_1到v_{11}的最短道路。

(1) 如图 11.2-2 所示，给顶点v_1标上P标号，并用方框框起来。与v_1邻接的各顶点v_2，v_3，v_4的T标号分别是 2，8，1，其余顶点的T标号



$d(v_1)=0$
$d(v_j)=+\infty \quad j=a,\cdots,N$
$T=\{v_1, v_2, \cdots v_N\}$
$k=1$
$p=1$
对$(v_i)\in T$
$d(x_i)=\min\{d(v_i), d(v_p)+l_{pi}\}$
$S=\min\{d(v_i)\}$
p 记入取最小值的第一个下标 i
$k=N-1$
Y
打印 $d(v_j)$
$j=a,\cdots,N$
$T=T\backslash\{v_p\}$
$k=k+1$

框图一

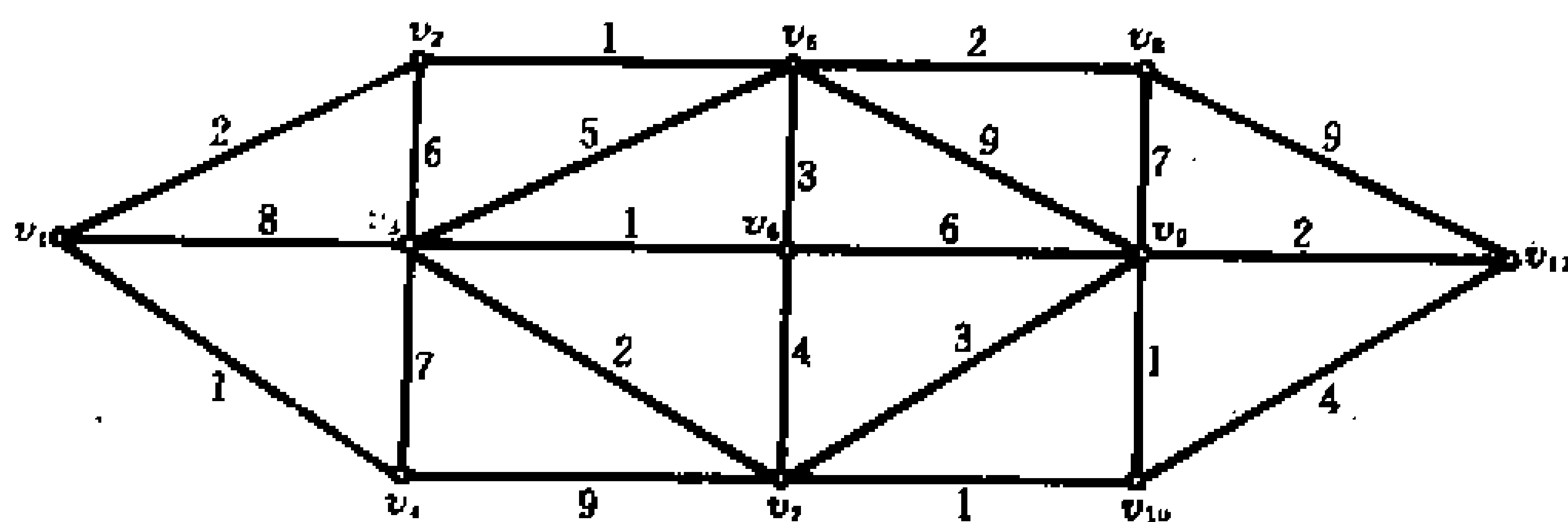


图 11.2-1

均为∞，并把它们用圆圈圈起来。

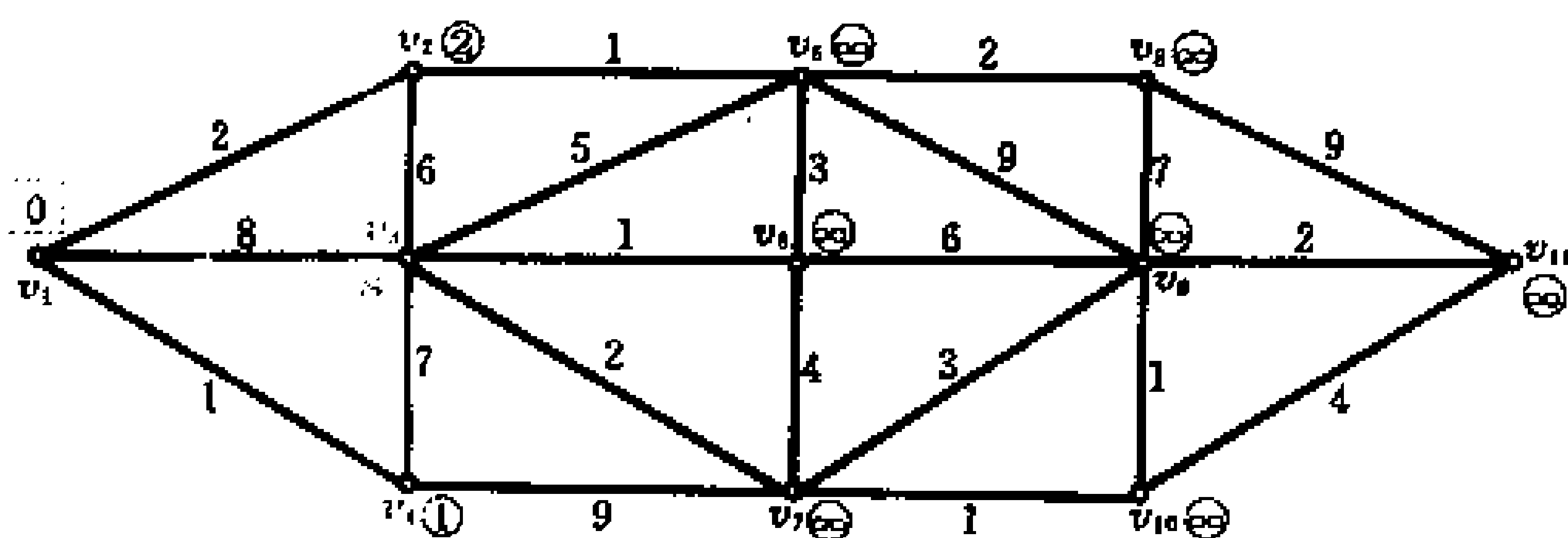


图 11.2-2

(2) 如图 11.2-3 所示。顶点 v_4 的 T 标号是所有 T 标号中最小的，把 v_4 的 T 标号改为 P 标号并且方框框起来，把与顶点 v_4 邻接的顶点 v_7 的 T 标号改为 $10=\min\{\infty,1+9\}$，其余顶点顶点的 T 标号不动。

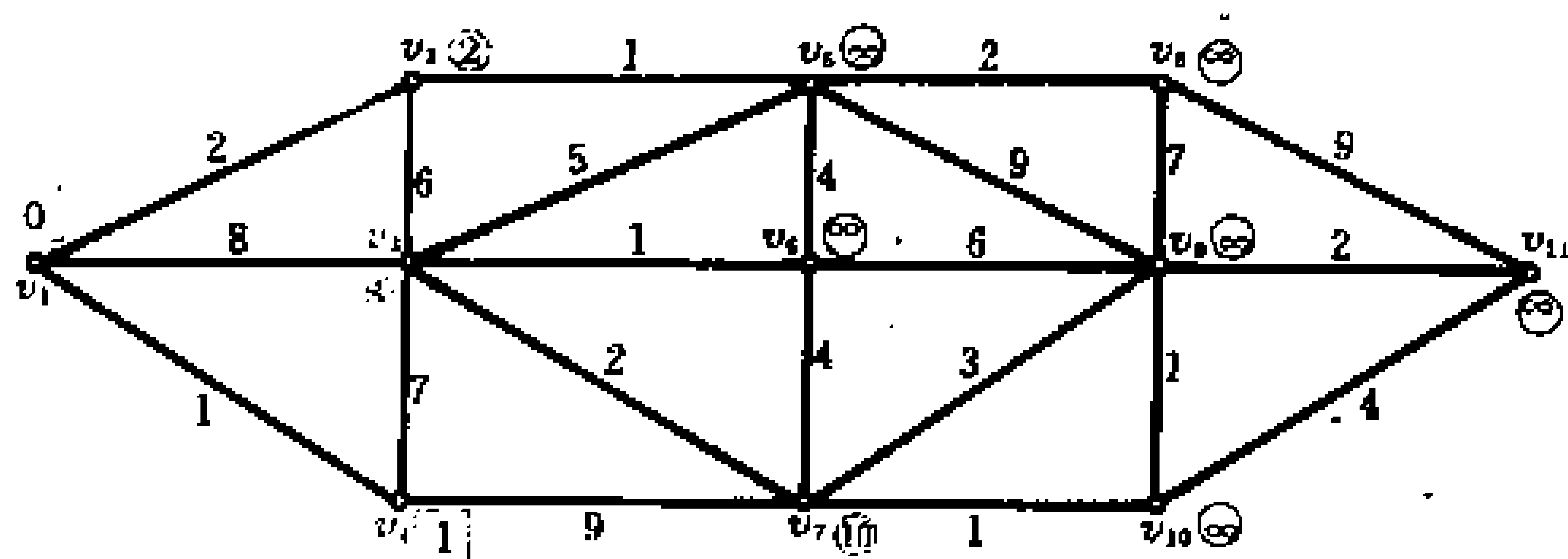


图 11.2-3

(3) 如图 11.2-4 所示，顶点 v_2 的 T 标号是所有 T 标号中最小者，把 v_2 的 T 标号改为 P 标号，并用方框框起来，把与 v_2 邻接的顶点 v_5 的 T 标号改为 $3=\min\{\infty,2+1\}$，其余顶点的 T 标号不变。

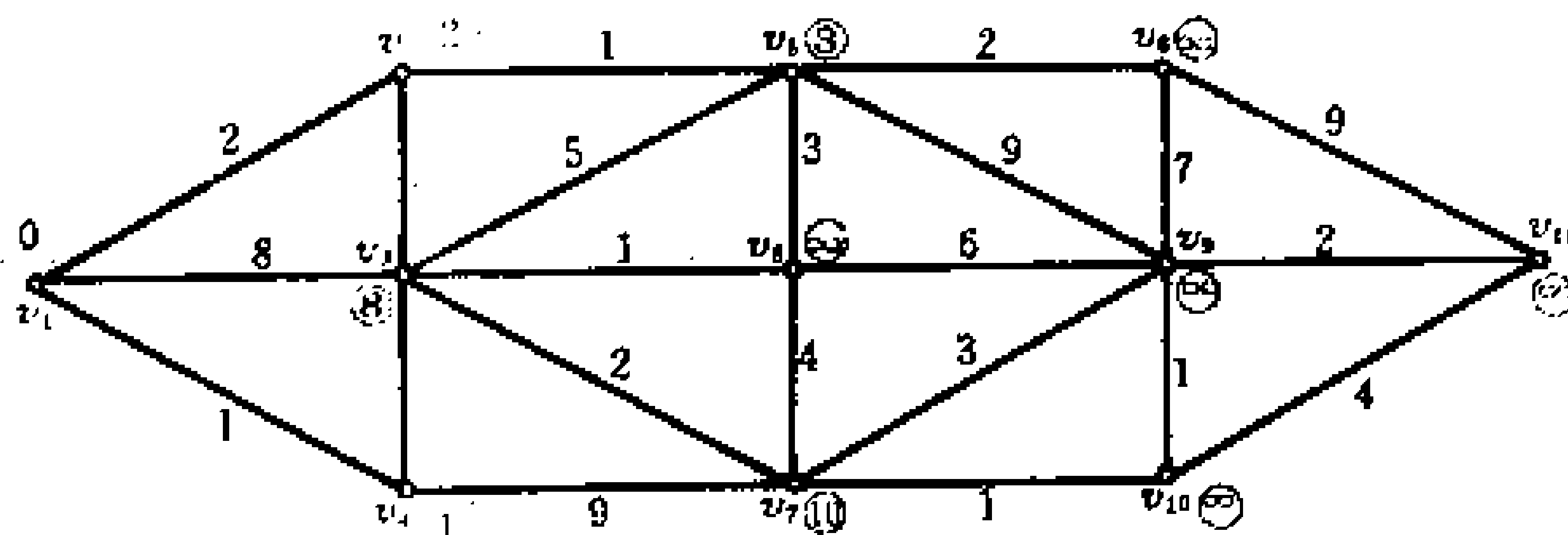


图 11.2-4

(4) 如图 11.2-5 所示。把顶点 v_5 的 T 标号改为 P 标号，用方框框起来。把与顶点 v_5 邻接的 v_6 和 v_8 的 T 标号改成 6 和 5，其余顶点的 T 标号不变。

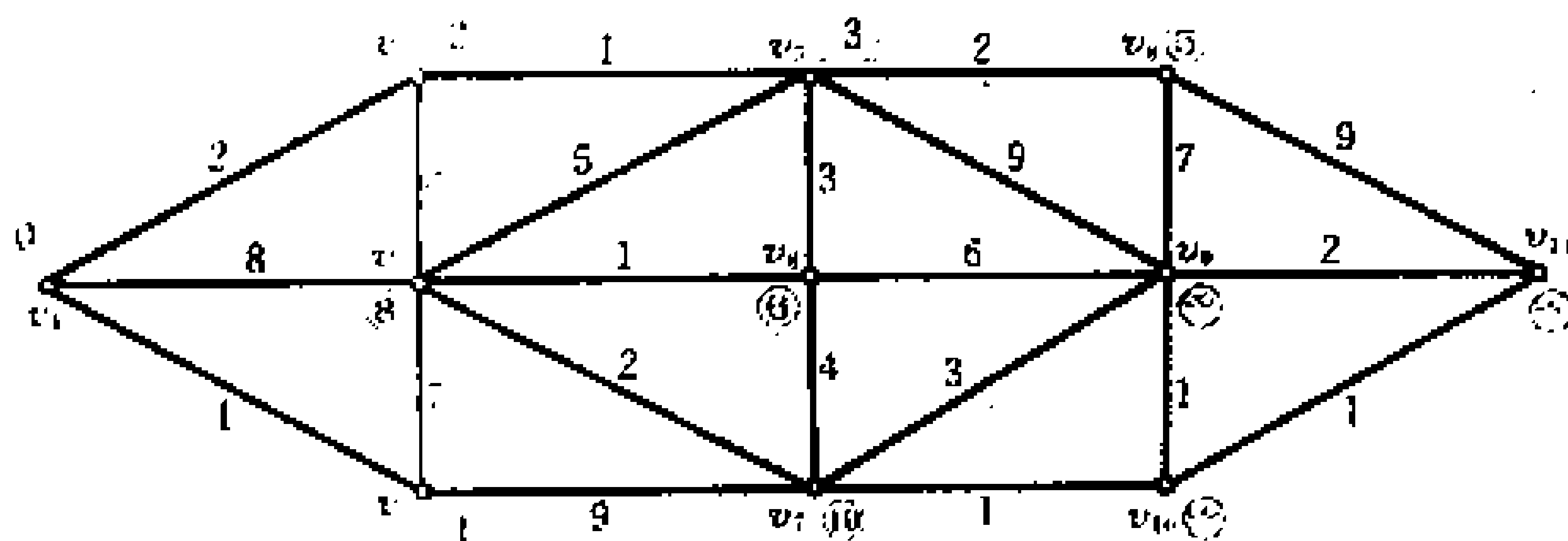


图 11.2-5

(5) 如图 11.2-6 所示，把顶点 v_8 的 T 标号改为 P 标号，并用方框框起来。把与 v_8 邻接的顶点 v_9 和 v_{11} 的 T 标号改成 12 和 14，其余顶点的 T 标号不变。

(6) 如图 11.2-7 所示，把顶点 v_6 的 T 标号改成 P 标号，用方框框起来。顶点 v_3 的 T 标号改成 7。

(7) 如图 11.2-8 所示，项点 v_3 的 T 标号改变 P 标号，用方框框起来，顶点 v_7 标号改成 9。

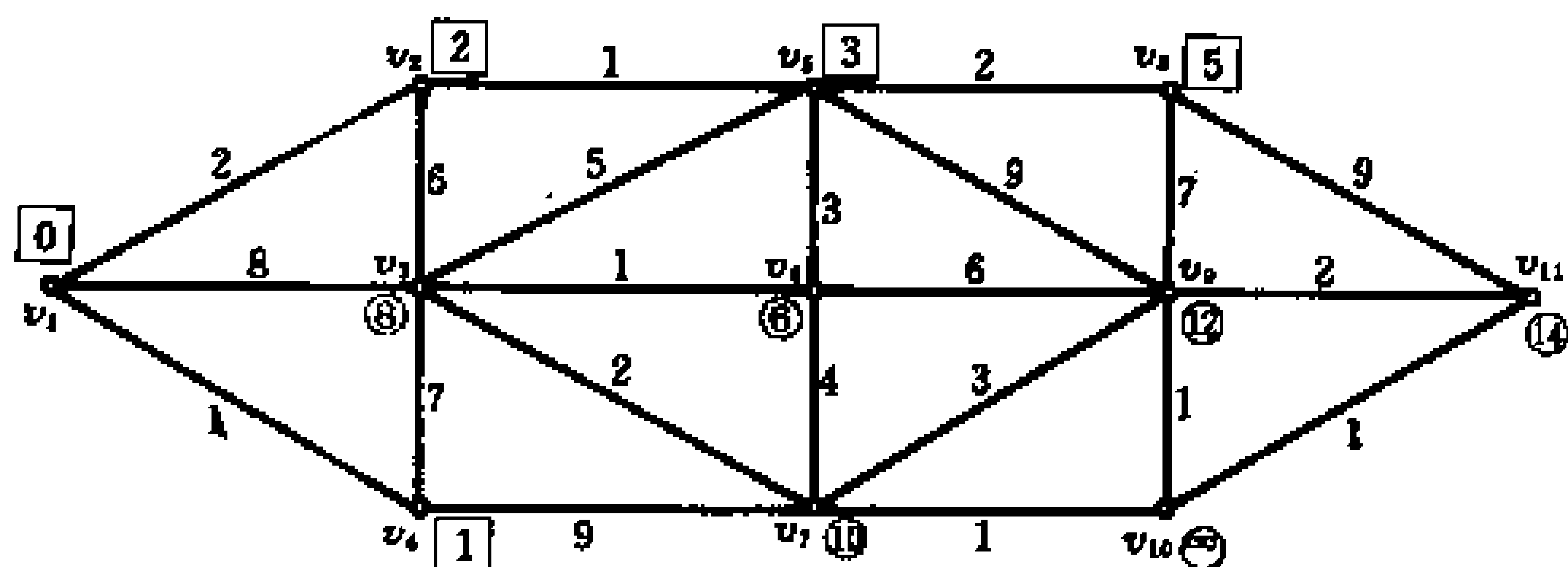


图 11.2-6

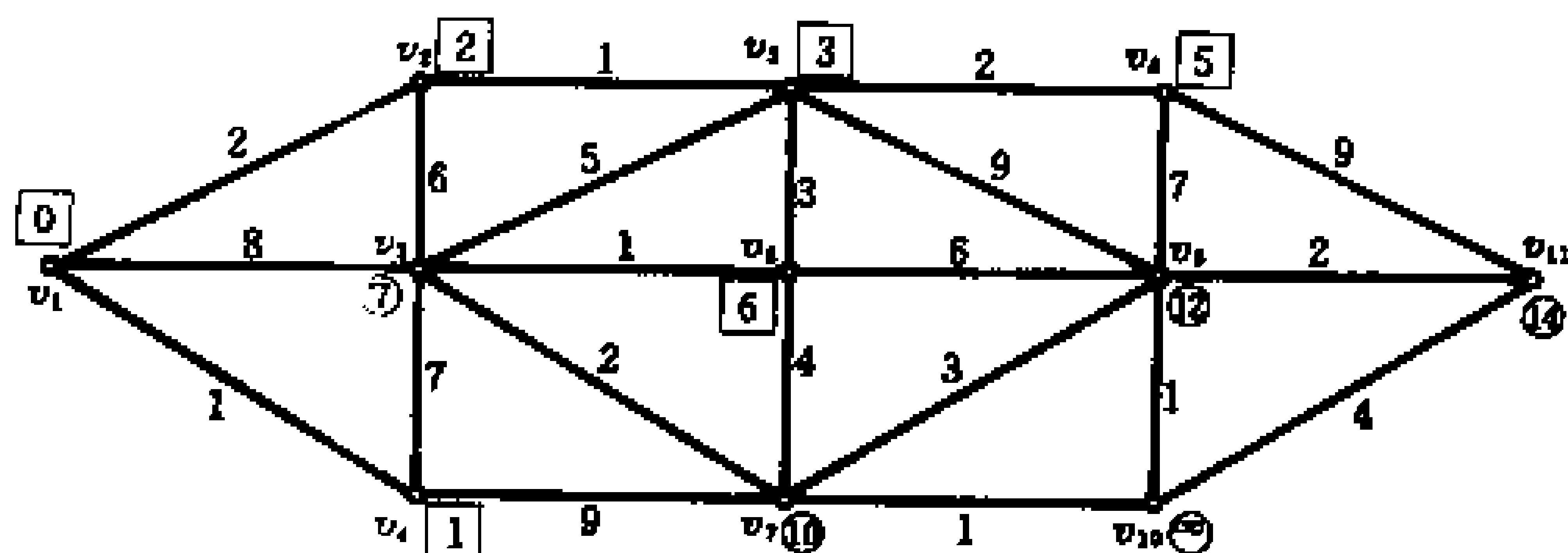


图 11.2-7

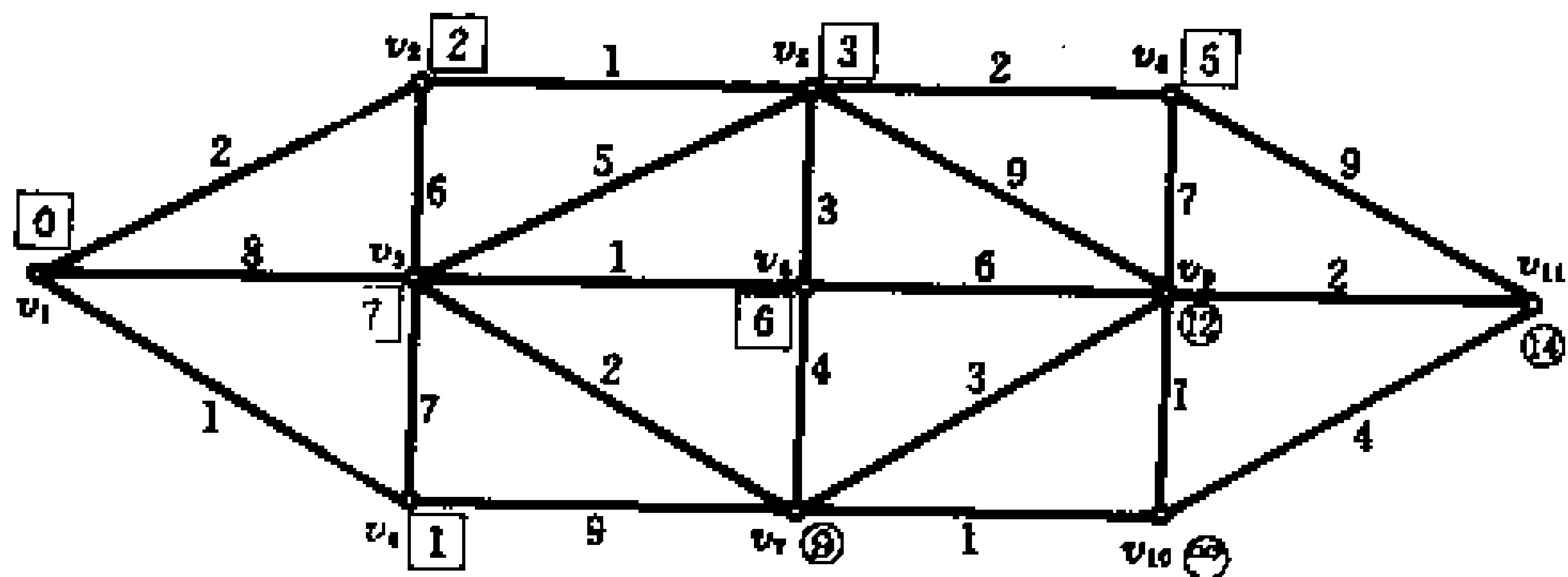


图 11.2-8

(8) 如图 11.2-9 所示。顶点 v_7 的 T 标号改成 P 标号，用方框框起来，顶点 v_{10} 的 T 标号改成 10。

(9) 如图 11.2-10 所示。顶点 v_{10} 的 T 标号改成 P 标号，用方框框起来。顶点 v_9 的 T 标号改成 11；v_9 的 T 标号改成 P 标号，用方框框起来。

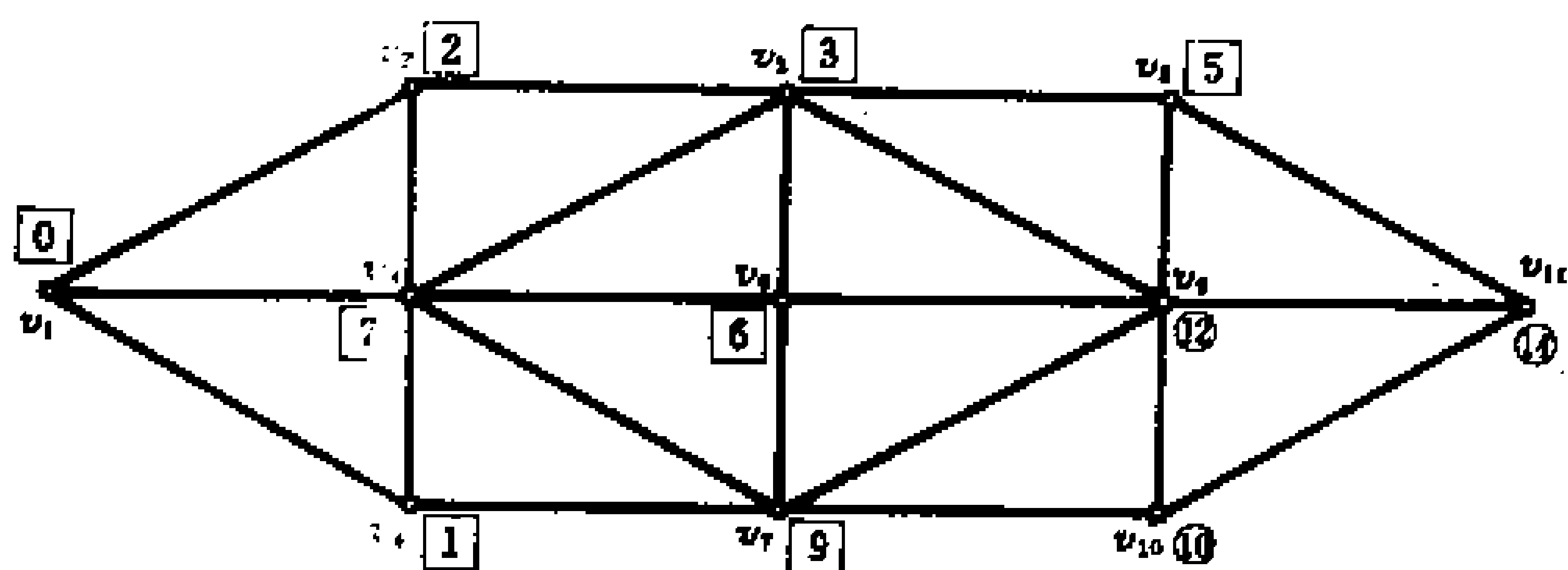


图 11.2-9

最后顶点 v_{11} 改成 13，用方框框起来，算法停止。

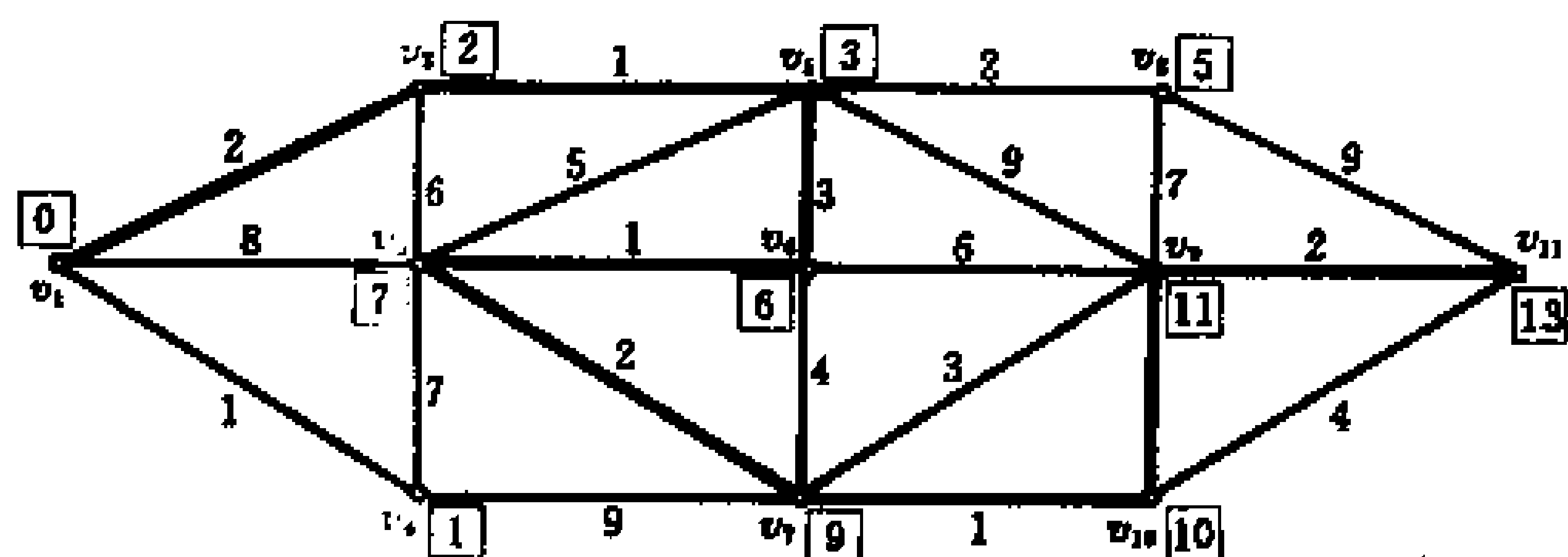


图 11.2-10

由图 11.2-10 可知，从 v_1 到 $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$ 各顶点的最短道路长分别是 2，7，1，3，6，9，5，11，10，13。图 11.2-10 中的粗线顶点 v_1 到顶点 v_{11} 的最短道路，长为 13。

第二类问题

图中任意两个顶点间的最短道路。

下面介绍的算法是 R. W. Flogd 给出的。从 $D^{(0)}=(l_{ij})$ 出发，依次构造出 N 个矩阵 $D^{(1)}, D^{(2)}, \cdots\cdots D^{(N)}$，第 k 个矩阵 $D^{(k)}=(d_{ij}^{(k)})$ 的元素 $d_{ij}^{(k)}$ 表示从 v_i 到 v_j 而中间顶点仅属于 v_i 到 v_j 的 k 个点的所有道路中的最短道路长。

已知 $D^{(k-1)}=(d_{ij}^{(k-1)})$，第 k 个矩阵 $D^{(k)}=(d_{ij}^{(k)})$ 定义如下：

$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$$

运算过程从 $k=1$ 开始，让 i,j 分别取遍从 1 到 N 的所有值，然 k 增加 1，反复进行，直到 $k=N$ 时终止。这时 $D=(d_{ij}^{(N)})$ 的元素 $d_{ij}^{(N)}$ 就是从 v_i 到 v_j 的最短道路长。

例 11.2.2 求图 11.2-11 所示的图 G 中任意两顶点的最短道路长。

由图 11.2-11 知

$$D^{(0)} = (l_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

按 R. W. Floyd 算法有：

$d_{11}^{(1)}=0$，　$d_{12}^{(1)}=1$，　$d_{13}^{(1)}=\infty$，　$d_{14}^{(1)}=2$，　$d_{15}^{(1)}=\infty$，　$d_{16}^{(1)}=\infty$

$d_{21}^{(1)}=1$，　$d_{22}^{(1)}=0$，　$d_{23}^{(1)}=3$，　$d_{24}^{(1)}=3$，　$d_{25}^{(1)}=\infty$，　$d_{26}^{(1)}=\infty$

$d_{31}^{(1)}=\infty$，　$d_{32}^{(1)}=3$，　$d_{33}^{(1)}=0$，　$d_{34}^{(1)}=1$，　$d_{35}^{(1)}=2$，　$d_{36}^{(1)}=2$

$d_{41}^{(1)}=2$，　$d_{42}^{(1)}=3$，　$d_{43}^{(1)}=1$，　$d_{44}^{(1)}=0$，　$d_{45}^{(1)}=3$，　$d_{46}^{(1)}=\infty$

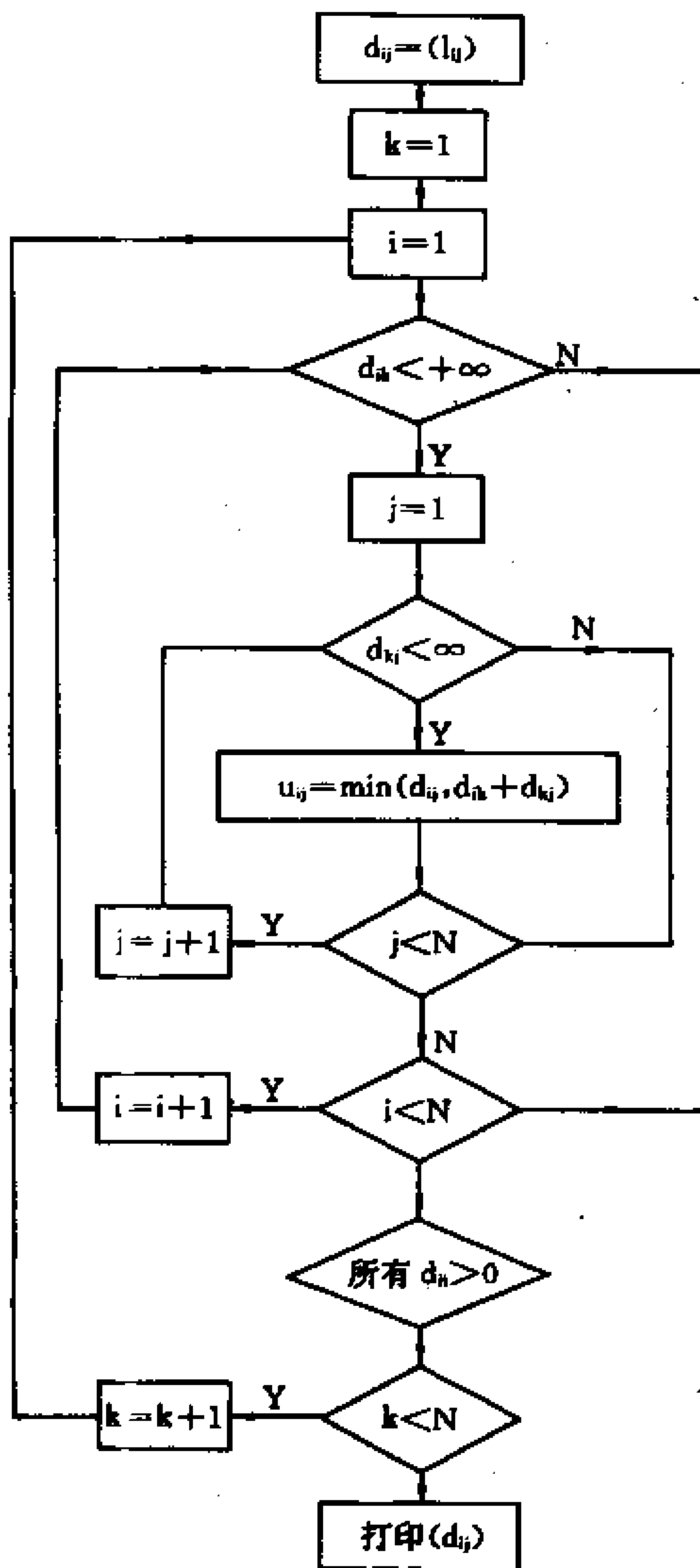
$d_{51}^{(1)}=\infty$，　$d_{52}^{(1)}=\infty$，　$d_{53}^{(1)}=2$，　$d_{54}^{(1)}=3$，　$d_{55}^{(1)}=0$，　$d_{56}^{(1)}=2$

$d_{61}^{(1)}=\infty$，　$d_{62}^{(1)}=\infty$，　$d_{63}^{(1)}=2$，　$d_{64}^{(1)}=\infty$，　$d_{65}^{(1)}=2$，　$d_{66}^{(1)}=0$

于是

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

由 $D^{(1)}$ 计算出 $D^{(2)}$：



$d_{ij}=(l_{ij})$
k=1
i=1
$d_{ik}<+\infty$
N
Y
j=1
$d_{kj}<\infty$
N
Y
$u_{ij}=\min(d_{ij},d_{ik}+d_{kj})$
j=j+1
Y
j<N
N
i=i+1
Y
i<N
所有 $d_{ii}>0$
k=k+1
Y
k<N
打印(d_{ij})

框图二

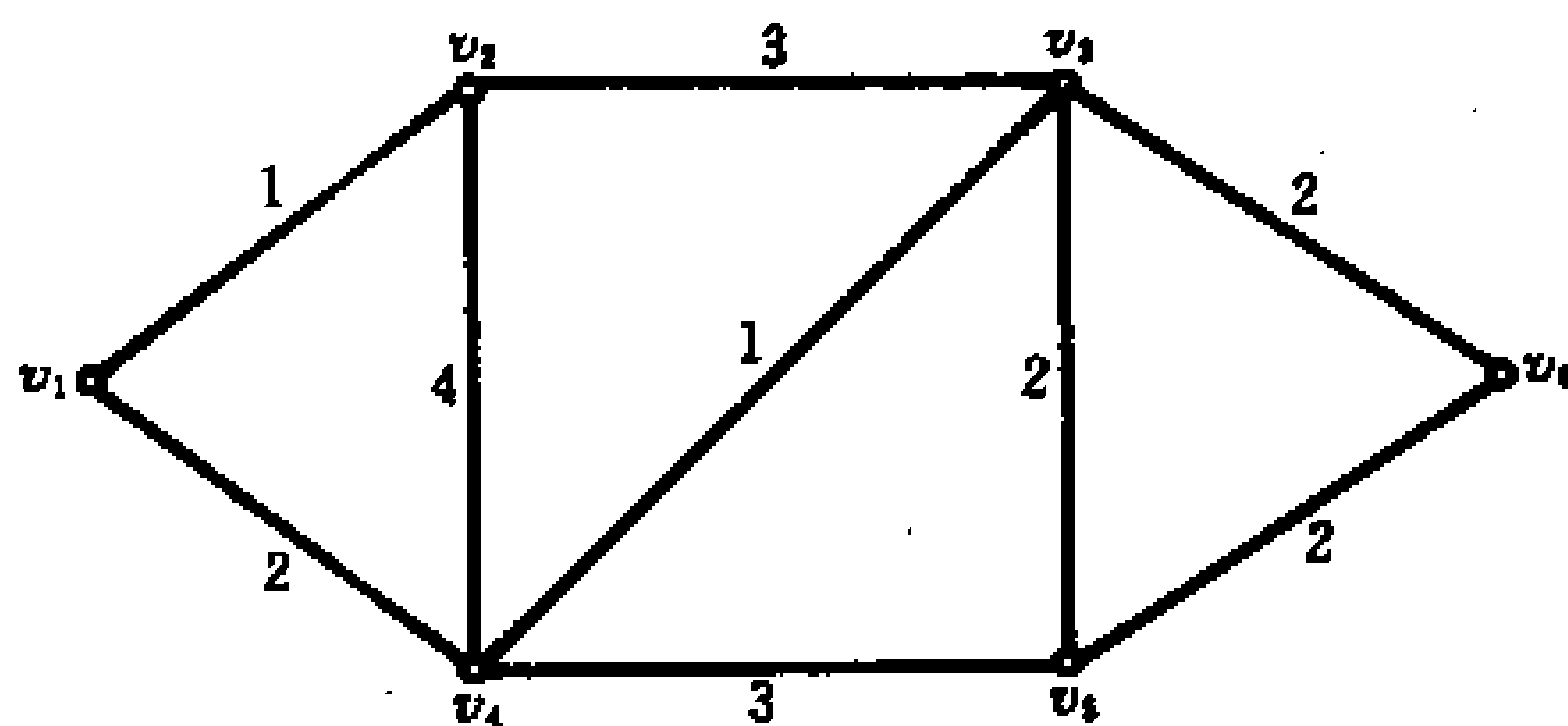


图 11.2-11

$$D^{(2)}=\begin{pmatrix}0&1&4&2&\infty&\infty\\1&0&3&3&\infty&\infty\\4&3&0&1&2&2\\2&3&1&0&3&\infty\\\infty&\infty&2&3&0&2\\\infty&\infty&2&\infty&2&0\end{pmatrix}$$

由 $D^{(2)}$ 计算出 $D^{(3)}$：

$$D^{(3)}=\begin{pmatrix}0&1&4&2&6&6\\1&0&3&3&5&5\\4&3&0&1&2&2\\2&3&1&0&3&3\\6&5&2&3&0&2\\6&5&2&3&2&0\end{pmatrix}$$

由 $D^{(3)}$ 计算出 $D^{(4)}$：

$$D^{(4)}=\begin{pmatrix}0&1&3&2&5&5\\1&0&3&3&5&5\\3&3&0&1&2&2\\2&3&1&0&3&3\\5&5&2&3&0&2\\5&5&2&3&2&0\end{pmatrix}$$

最后，我们得到

$$D^{(4)} = D^{(5)} = D^{(6)}$$

下面我们给出根据框图一和框图二编写的计算例 11.2.1 和例 11.2.2 的 DTS—8 电子计算机的 FORTRAN 语言程序：

子程序 GM_1

```
      SUBROUTINE  GM1(D,N,M)
      INTEGER  D
      DIMENSION  D(N,N)
      DO 20 K=1,N
      DO 20 I=1,N
      IF(D(I,K).GT.M) GOTO 20
      DO 10 J=1,N
      IF(D(K,J).GT.M) GOTO 10
      IF(D(I,K)+D(K,J)-D(I,J))9,10,20
9     D(I,J)=D(I,K)+D(K,J)
10    CONTINUE
20    CONTINUE
      RETURN
      END
```

子程序 GM_2

```
      SUBROUTINE  GM2(L,D,T,N,M)
      INTEGER D, T, P1, P
      DIMENSION  LC(N,N),D(N),T(N)
      D=M
      D(1)=0
      P=1
      DO 30 K=2,N
      MIN=M
      DO 21 J=1,N
      IF(T(J).LT.0) GOTO 21
```

```
      JT=T(J)
      IF(D(JT).GT.D(P)+L(P,JT))
     .   D(JT)=D(P)+L(P,JT)
      IF(MIN.LE.D(JT)) GOTO 21
      MIN=D(JT)
      P1=T(J)
21    CONTINUE
      IF(MIN.GE.M) GOTO 31
      P=P1
30    T(P)=-1
31    RETURN
      END
```

主程序

```
      MASTER GM
      INTEGER D6,D11,DGM2,TGM2
      DIMENSION D6(6,6),D11(11,11),
         DGM (11),TGM2(11)
      READ(0) D6,D11
      WRITE(2,10)D6, D11
10    FORMAT(//20X,4HD6=,6(/5X,6I10)//20X,
      5HD11=,11(/5X,11I10)
      DO 5I=2,11
5     TGM2(I) =1
      TGM2(1) =-1
      CALL GM1(D6,6,500)
      WRITE (2,11 ) D6
11 FORMAT( /20X,4HD6=6,(/5X,6I10)
      CALL GM1(D11,11,500)
      WRITE(2,12)D11
12    FORMAT(//20X,5HD11=,11(/5X,11I10))
```

```
      CALL GM2(D11,DGM2,TGM2  11,500)
      WRITE(2,13) DGM2
13    FORMAT(//20X,3HD=/5X,11I10)
      STOP 1
      END
      FINISH
```

11.3 最优化原则

最优化原则是美国数学家贝尔曼(R. Bellman)提出的，它是动态规划的理论基础，最优化原则也可以应用于求最短道路问题，我们先来讨论一个例子。

例11.3.1 如图11.3-1，我们要从 A 地至 F 地找一条最短道路。

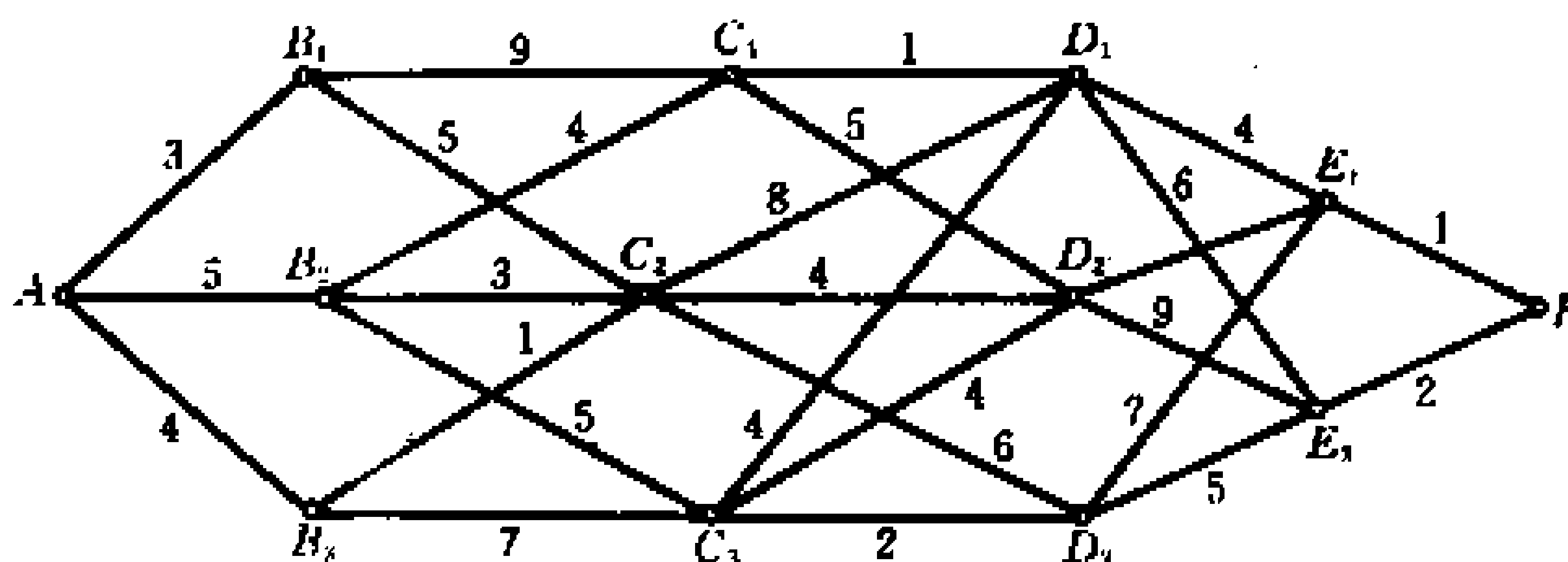


图11.3-1

我们把图11.3-1分为五个阶段：由 A 到 $B(B_1,B_2,B_3)$ 中的一点是第一阶段；B 中的点至 C 中的点是第二阶段；C 至 D 是第三阶段；D 至 E 是第四阶段；E 至 F 是第五阶段。我们来引入几个符号和概念。

令 n 表示由某点至终点之间的阶段数(如由 B_2 至 F 是四个阶段)，n 称为**阶段变量**(Stage variable)。如果用 S 表示在任一阶段所处的位置，那么 S 就称为**状态变量**(State variable)。

令 $v_n(S)$ 表示当状态还有 n 个阶段要走时，所要选择的下一个点，$v_n(S)$ 称为**决策变量**(Polieg variable)。**策略**(tactics)是指各个阶段的决

策组成的全体。

令 $d_n(S)$ 表示现在处在状态 S(即处在 S 点)还有 n 个阶段要，由 S 至终点 F 的最短路长

令 $d(S,v_n)$ 表示 S 到 v_n 的边长。

我们从最后一个阶段开始计算，由定义 $d_1(E_1)$ 表示由 E_1 至 F 的最短道路长，故 $d_1(E_1)=1$。同理，$d_1(E_2)=2$，现在计算最后两个阶段，$n=2$，从 D_1 出发有两种选择，一个是到 E_1，一个是到 E_2，故有

$$d_2(D_1) = \min\begin{Bmatrix} d(D_1,E_1) + d_1(E_1) \\ d(D_1,E_2) + D_1(E_2) \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 4+1 \\ 2+2 \end{Bmatrix} = 4$$

上式说明，由 D_1 到 F 的最短道路长是4，其路线是由 $D_1 \to E_2 \to F$，且相应的决策变量 $v_2(D_1)=E_2$

同理

$$d_2(D_2) = \min\begin{Bmatrix} d(D_2,E_1) + d_1(E_1) \\ d(D_2,E_2) + D_1(E_2) \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 6+1 \\ 9+2 \end{Bmatrix} = 7$$

即由 D_2 到 F 的最短道路是 $D_2 \to E_1 \to F$，其长为7，$v_2(D_2)=E_1$。同样可得 $d_2(D_3)=7$，路线是 $D_3 \to E_2 \to F_1$，$v_2(D_3)=E_2$。

再看 $n=3$ 的情况，起点有 C_1,C_2,C_3 而

$$d_3(C_1) = \min\begin{Bmatrix} d(C_1,D_1) + d_2(D_1) \\ d(C_1,D_2) + d_2(D_2) \end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 1+4 \\ 5+7 \end{Bmatrix} = 5$$

$v_3(C_1)=D_1$，上式表示由 C_1 出发有两种选择，一个是到 D_1，一个是到 D_2(C_1 至 D_3 无道路)。如果选择 D_1，则以后显然应该选择由 D_1 至 F 的最短路线；如果选择 D_2，则以后也必然应该选择由 D_2 至 F 的最短路线。然后再在两条路线中选一条短的，即 $C_1 \to D_1 \to E_2 \to F$。同理，若从 C_2 出发，此时有三种选择。

$$d_3(C_2) = \min\begin{cases} d(C_2,D_1) + d_2(D_1) \\ d(C_2,D_2) + d_2(D_2) \\ d(C_2,D_3) + d_2(D_3) \end{cases}$$

$$= \min\begin{Bmatrix}8+4\\4+7\\6+7\end{Bmatrix} = 11$$

故由 C_2 到 F 的最短道路是 $C_2 \to D_2$(由 $D_2 \to E_1 \to F$)，长度为11，$v_3(C_2) = D_2$。同理，$d_3(C_3) = 8$，$v_3(C_3) = D_1$

对 $n=4$，同理可得

$$d_4(B_1) = 14,\ v_4(B_1) = C_1,$$

$$d_4(B_2) = 9,\ v_4(B_2) = C_1,$$

$$d_4(B_3) = 12,\ v_4(B_3) = C_2。$$

最后，$n=5$，出发点只有 A 点

$$d_5(A) = \min = \begin{Bmatrix}d(A_1,B_1) + d_4(B_1)\\d(A_1,B_2) + d_4(B_2)\\d(A_1,B_3) + d_4(B_3)\end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix}3+14\\5+9\\4+12\end{Bmatrix} = 14$$

$v_5(A) = B_2$，故最短道路是 $A \to B_2 \to C_1 \to D_1 \to E_2 \to F$。长为14。

上面我们利用了 n 个阶段与 $n-1$ 个阶段之间的关系

$$\begin{cases} d_n(S) = \min\limits_{v_n(S)}\{d(S,v_n(S)) + d_{n-1}(v_n(S)) \\ d_1(S) = d(S,F) \end{cases}$$

归纳起来，这个递推关系可以用“最优化原则”来描述：

一个过程的最优策略具有如此性质，即无论其初始状态和初始决策如何，其今后诸决策对以第一个决策所形成的状态作为初始状态的过程而言，必须构成最优策略。

对函数方程

$$d_n(S) = \min\{d(s,v_n(S)) + d_{n-1}(v_n(S))\}$$

当选择第一个决策 $v_n(S)$ 时，它有两种影响，其一是它直接影响第一个阶段的长度 $d(S,v_n(S))$，其二是它影响后面 $n-1$ 个阶段的初始状态，因而也影响到后面 $n-1$ 个阶段的最短道路长。最优策略的选择是根据

两者统一考虑的结果而决定的。

将最优化原则应用在求最短道路问题可以得出这样一个原则：在边长非负的无向图（赋权图）中任一最短道路具有这样的性质，其任一子道路必构成该子道路两个端点间的最短道路。

11.4 中国邮路问题

一个邮递员从邮局出发递送信件，然后再返回邮局。如果他必须至少一次地走过他管辖范围内的每一条街道，在这个前提下，如何选择递送路线，以便走尽可能少的路程。这个问题是由我国管梅谷在1962年首先提出的，因此称为**中国邮路问题**。中国邮路问题是一个即与欧拉图又与最短道路有关的一个问题。中国邮路问题用图论的术语来描述就是：

在一个网络（即赋权图）N 中，能不能找到一条闭链 W，使得 W 包含 N 中的每条边至少一次，且总长最小。

我们知道，如果网络 N 是一个连通欧拉图，则 N 中必存在一条闭欧拉链。因此，问题的答案是肯定的；如果网络 N 是一个只有两个顶点的度是奇数连通图，则存在一条欧拉链，因此，所要求的闭链是由这样一条欧拉链和在 N 中这条欧拉链的两个端点间的最短道路组成。例如图11.4-1(a)的网络中，所要求的闭链是由一条欧拉链 $v_1v_2v_3v_5v_4v_3v_1$

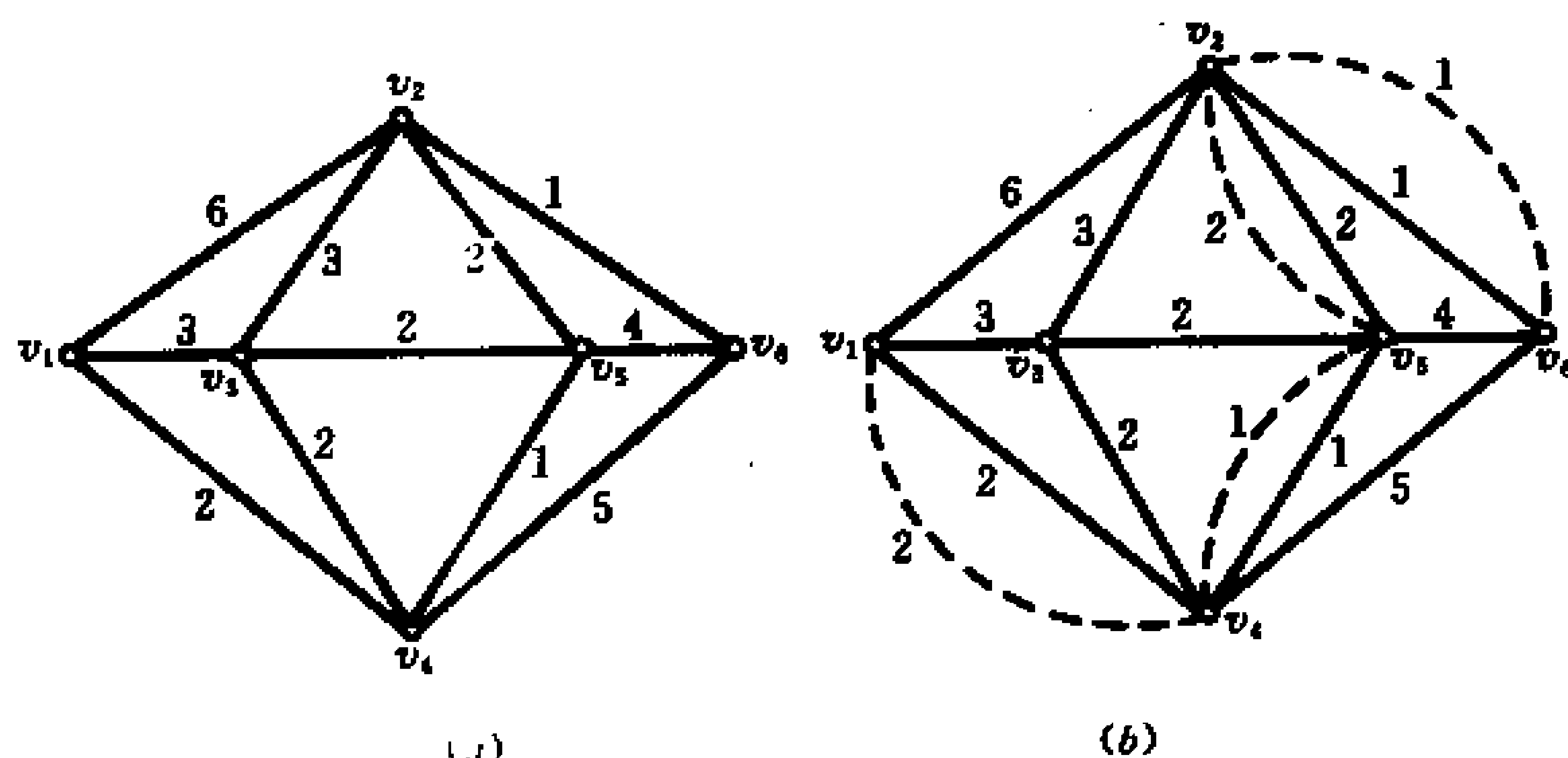


图11.4-1

$v_4 v_6 v_5 v_8$和最短道路 $v_1 v_4 v_2 v_6$(图11.4-1(b)中的虚线)的并组成。

如果网络 N 中奇顶点的个数多于2,那么所要求的闭链必须要加更多重复的边,但怎样加才能使重复边的总长最小呢?下面的定理回答了这一问题。

定理11.4.1 设 W 是网络 N 的一条包含 N 的所有边的闭链,则 W 具有最小长的充要条件是

(1) 每条边最多重复一次;

(2) 在 N 的每个圈上,有重复边的长的和不超过圈长的一半。

下面我们简要的叙述一下定理的证明。

必要性、首先,假如每条边重复 $n(\geqslant 2)$ 次得到的图是欧拉图,那么重复 $n-2$次则与此边关联的两个顶点的度都减2,故仍为欧拉图。

其次,注意到在一个图上,如果原来重复的边(重复一次)都不重复,而原来不重复的边都重复一次,这样图上每个顶点的度改变0或2,所以也不改变欧拉图的性质。因此,如果一个图中重复边的长超过圈长的一半,作如上改变后重复边长减少,欧拉图的性质不变。

充分性,只要证明满足定理中条件1),2)的所有闭链的长均相等,即重复边的长相等即可。

设 W_1,W_2是两条满足(1),(2)的闭链,D 是 W_1与 W_2中重复边的环和,由边集 D 组成的网络的每个分支是欧拉图(因为对 N 的每个顶点 v,W_1和 W_2中与 v 相关联的重复边的数目的奇偶性相同,取决于 v 原来的度为奇或为偶,重复边数也必为奇或偶),因此 D 是圈的边不重并。但在每一个圈上,W_1和 W_2的重复边长都不超过圈长的一半,故只能相等,且等于圈长的一半。从而 D 中在 W_1和 W_2中重复边的长相等。于是 W_1和 W_2中重复边的长相等,即 W_1和 W_2的长相等。▮

由此定理,我们对每一个圈检查,并用必要性证明中的方法调整,可以得到解答,这种方法叫做"奇偶点图上作业法"。但因此方法要验算每一个圈,很不方便。Edmods 和 Johason1973年提出一种比较有效的方法,有兴趣的读者可参考 Math Programmiug,5(1973)88-124。

11.5 最小树

定义11.5.1 设 T^* 是赋权图 G 的一棵生成树，若对 G 的任意生成树 T 都有 $l(T^*)<l(T)$，则称 T^* 为 G 的**最小树**。

下面我们来讨论最小树的性质

为了讨论方便，我们用 $C_T(e')$ 表示由连枝 e' 确定的关于生成树 T 的基本圈，用 $S_T(e)$ 表示由树枝 e 确定的关于生成树 T 的基本割集。

定理11.5.1 设 T 是 G 的一棵生成树，则下列条件都是 T 为最小树的充要条件

(1) 对任意连枝 $e'\in G\backslash T$，有

$$l(e')=\max_{e\in C_T(e')}\{(l(e))\}$$

(2) 对图 G 中任意圈 C，存在 $e'\in C\backslash T$，有

$$l(e')=\max_{e\in C}\{l(e)\}$$

(3) 对任意树枝 $e\in T$，有

$$l(e)=\min_{e\in S_T(e)}\{(l(e'))\}$$

(4) 对 G 的任意割集 S，在 $T\cap S$ 中存在一条边 e，有

$$l(e)=\min_{e'\in S_T(e)}\{l(e')\}$$

[证明] 因为这些条件中有包含关系，故只须证明(2)，(4)两个命题即可。

先证命题(2)：

设 T^* 是 G 的一棵最小树，则对 G 的任意圈 C，存在 $e'\in C\backslash T^*$，有

$$l(e')=\max_{e\in C}\{l(e)\}$$

用反证法。若命题不成立，即在 G 中存在一个圈 C_0 及 $e\in C_0\cap T^*$，使对任意 $e'\in C_0\backslash T^*$，有 $l(e)>l(e')$。显然，$e\in S_{T^*}(e)\cap C_0\neq\varnothing$，于是，

存有 $e_0 \neq e, e_0 \in S_{T^*}(e) \cap C_0$。由于 e 是 $S_{T^*}(e) \cap T^*$ 的唯一元素，故 $e_0 \in C_0 \backslash T^*$，因此 $l(e_0) < l(e)$。考虑 $T' = T^* - e + e_0$，因为 e, e_0 同属于 $S_{T^*}(e)$，所以 T' 也是 G 的一棵生成树，但 $l(T') = l(T^*) - l(e) + l(e_0) < l(T^*)$，此与 T^* 是最小树的假设矛盾。

反之，设 T^* 是 G 的一棵生成树，对任意的 $e' \in G \backslash T^*$，若都有

$$l(e') = \max_{e^* \in C_{T^*}} \{l(e^*)\}$$

则 T^* 是最小树。

用反证法，设 T^* 不是最小树，那么取一棵 G 的最小树，使 $|T \cap T^*|$ 为最大。取 $e' \in T \backslash T^*$，显然，$e' \in S_T(e') \cap C_{T^*}(e')$，故存在一条边 $e^* \neq e'$，且 $e^* \in S_T(e') \cap C_{T^*}(e')$，于是 $e^* \in T^* \backslash T$。令 $T' = T - e' + e^*$，因为 $l(e^*) \leqslant l(e')$，所以 $l(T') \leqslant l(T^*)$，即 T' 也是最小树，但 $|T \cap T^*| = |T \cap T^*| + 1 > |T \cap T^*|$，此与 T 的取法矛盾，故 T^* 是最小树。

现证命题(4)。设 T^* 是 G 的最小树，则对 G 的任意割集 S，存在 $e^* \in T^* \cap S$，满足

$$l(e^*) = \min_{e' \in S}\{l(e')\}$$

如果命题不成立，即对 G 的一个割集 S_0 及 $e' \in S_0 \backslash T^*$，使得对一切 $e^* \in S_0 \cap T^*$ 都有 $l(e') < l(e^*)$，由于 $e' \in S_0 \cap C_{T^*}(e')$，故存在 $e^* \neq e'$，$e^* \in S_0 \cap C_T^*(e')$，又 e', e^* 都属于 $C_T^*(e')$，所以 $T' = T^* + e' - e^*$ 也是 G 的一棵生成树。于是

$$l(T') = l(T^*) + l(e') - l(e^*) < l(T^*)$$

这与 T^* 是最小树的假设矛盾。

反之，设 T^* 是 G 的生成树，对任意 $e^* \in T^*$，有

$$l(e^*) = \min_{e' \in S_T^*(e^*)} \{l(e')\}$$

则 T^* 是 G 的最小树。

反证，设 T^* 不是 G 的最小树，取 G 的最小树 T，使 $|T^* \cap T|$ 为最大。取 $e^* \in T^* \backslash T$，显然，$e^* \in S_{T^*}(e^*) \cap C_T(e^*)$，故存在 $e' \neq e^*$，有 $e' \in S_{T^*}(e^*) \cap C_T(e^*)$。于是 $e' \in T$，$l(e') \geqslant l(e^*)$。令 $T' = T + e^* - e'$，则 $l(T') \leqslant l(T)$，因而 T' 也是最小树，但 $|T' \cap T| = |T \cap T^*| + 1$，此与 T 的

取法矛盾，所以 T^* 是最小树。▌

定理11.5.2 设 T^* 是 G 的一棵生成树，T^* 是 G 的唯一最小树的充要条件是下列两个条件中的任一个成立：

(1) 对任意 $e\in G\backslash T^*$，e 是 $C_{T^*}(e)$ 的唯一权最大的边。

(2) 对任意 $e^*\in T^*$，e^* 是 $S_{T^*}(e^*)$ 的唯一权最小的边。

[证明] 必要性由定理11.5.1可直接推出，下面证明充分性。

假设条件1°成立，那么 T^* 显然是 G 的最小树，设 T 是 G 的另外一棵不同于 T^* 的最小树，取 $e'\in T\backslash T^*$，$e'\in C_{T^*}(e')\cap S_T(e')$，取 $e^*\neq e'$，使 $e^*\in C_{T^*}(e')\cap S_T(e')$。因为 $e^*\in C_{T^*}(e')$，而 e' 是 $C_{T^*}(e')$ 的唯一权最大的边，所以 $l(e')>l(e^*)$。令 $T'=T-e'+e^*$，则 $l(T')=l(T)-l(e')+l(e^*)<l(T)$，于是 T 不是最小树，与假设矛盾，故 T^* 是 G 的唯一最小树。

假设条件2°成立。T^* 显然也是 G 的最小树，设另有一棵不同于 T^* 的最小树 T，取 $e^*\in T^*\backslash T$。取 $e^*\in T^*\backslash T$，考虑 $S_{T^*}(e^*)\cap C_T(e^*)$ 中不同于 e^* 的边 e'。

由定理11.5.1，T^* 是最小树，因而

$$l(e^*)=\min_{e\in C_T^*(e^*)}\{l(e)\}$$

由于 T 也是最小树，故

$$l(e^*)=\max_{e\in C_T(e^*)}\{l(e)\}$$

由此可知，$l(e^*)=l(e')$。这与 e^* 是 $S_{T^*}(e^*)$ 的唯一权最小边的假设矛盾。所以 G 不能另有最小树，即 G 的最小树 T^* 是唯一的。▌

11.6 最小树算法

在这一节里，我们来介绍几种求最小树的算法。

算法一

1956年 kruskal 推广了求生成树的破圈法(参见2.3)，给

出最优树的一种算法，kruskal 的算法是，首先把赋权图 G 的边按权的递增顺序排列：

$$l(a_1) \leqslant l(a_2) \leqslant \cdots\cdots \leqslant l(a_q)$$

取 $e_1=a_1, e_2=a_2$，检查 a_3，如果 a_3 不与 e_1, e_2 构成圈，则令 $e_3=a_3$，如果 a_3 与 e_1, e_2 构成圈，则放弃 a_3，检查 a_4，若 a_4 不与 e_1, e_2 构成圈，则令 $e_3=a_4$，否则放弃 a_4，检查 a_5。如此继续下去，直到找出 $e_1 e_2, \cdots, e_{p-1}$ 条边的连通图为止，那么 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{p-1}\}$ 就是所要求的一棵生成树。

下面我们来证明算法的有效性

设 $T^*=(e_1, e_2, \cdots, e_{p-1})$。因为 T^* 是没有圈的有 $p-1$ 条边的连通图，所以 T^* 是 G 的一棵生成树。设 T 是 G 的不同于 T^* 的另一棵生成树。用 $f(T)$ 表示使 e_i 不在 T 中的 i 的最小值，如果 T^* 不是最小树，令 T 是使 $f(T)$ 尽可能大的一棵最小树。

设 $f(T)=k$，则 $e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$ 同属于 T 和 T^*，但 e_k 不在 T 中，所以 $T+e_k$ 含有唯一的一个圈 C，令 $e_k' \in C \cap T$，但 $e_k' \notin T^*$，由定理2.2.1知，e_k' 不是 $T+e_k$ 的割边，因此

$$T' = T + e_k - e_k'$$

是有 $p-1$ 条边无圈的连通图，于是 T' 是 G 的另外一棵生成树，显然

$$l(T') = l(T) + l(e_k) - l(e_k')$$

由 kruskal 算法，e_k 是被选为具有最小权的使 $\{e_1, e_2 \cdots\cdots, e\}$ 没有圈的一条边。因为 $\{e_1, e_2 \cdots\cdots, e_{k-1} e_k'\}$ 是 T 的一个子图，也没有圈，所以

$$l(e_k') \geqslant l(e_k)$$

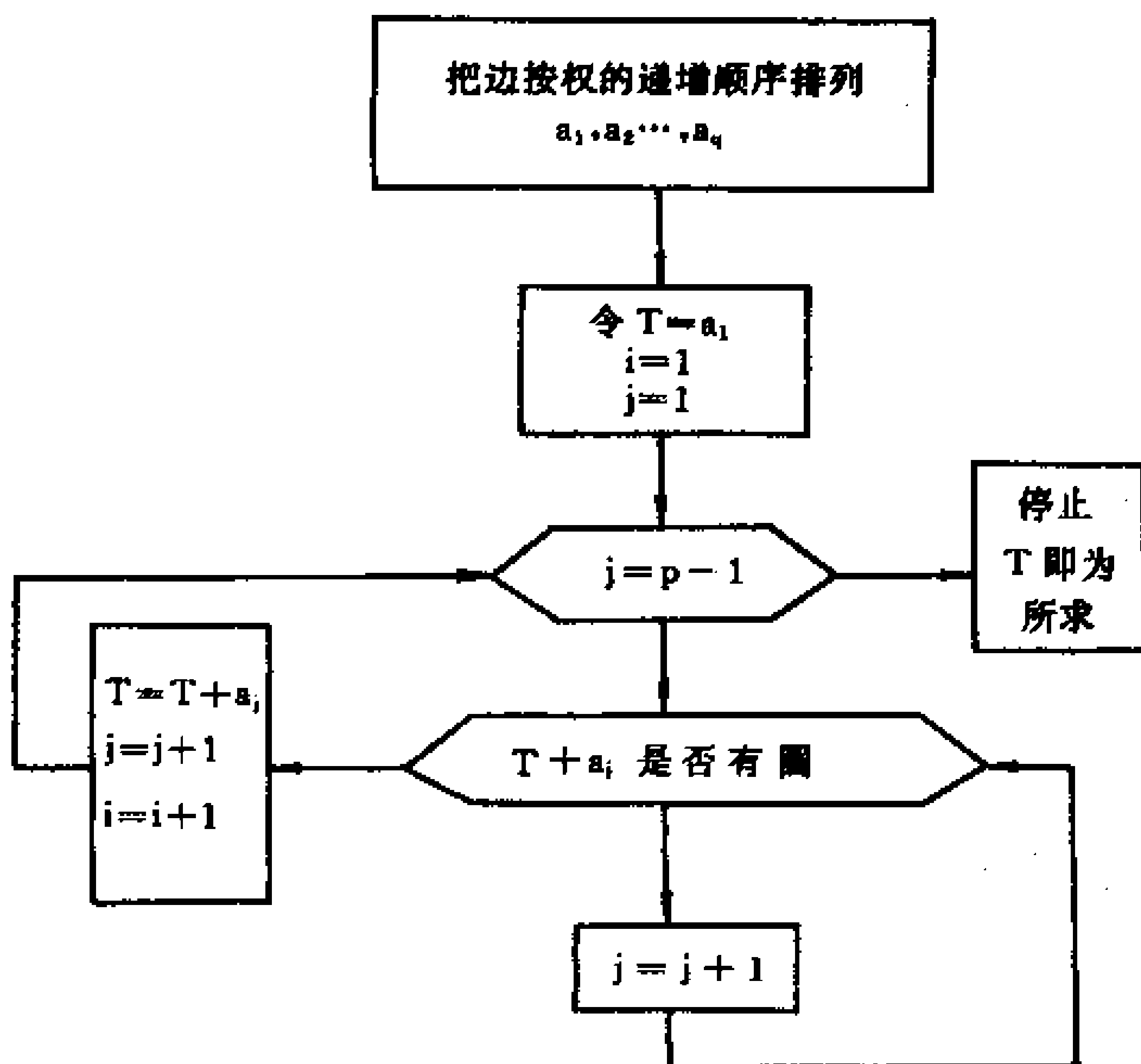
于是 T' 也是一棵最小树，故

$$f(T') > k = f(T)$$

这与 T 的选取矛盾。因此，$T=T^*$ 且 T^* 确是最小树。∎

例11.6-1 求图11.6-1所示的赋权图 G 的最优树（图中括号内的数字为该边的权）。

把边按权的递增顺序排列：



把边按权的递增顺序排列
a₁,a₂…,aq
令 T=a₁
i=1
j=1
j=p-1
停止
T 即为
所求
T=T+aj
j=j+1
i=i+1
T+ai 是否有圈
j=j+1

算法一框图

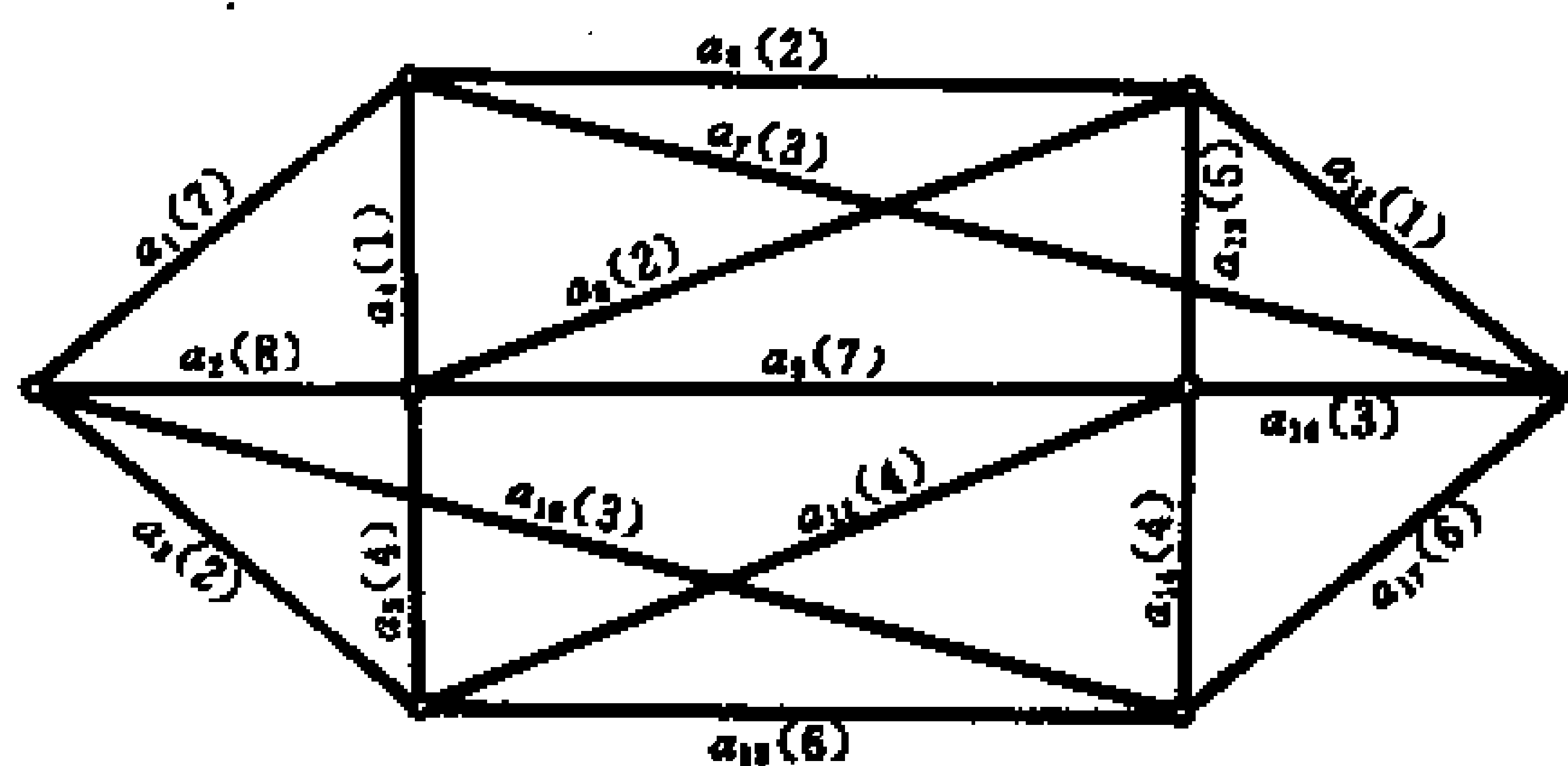


图11.6-1

$a_4(1)$，$a_{15}(1)$，$a_3(2)$，$a_6(2)$，$a_8(2)$，$a_7(3)$，

$a_{10}(3)$，$a_{16}(3)$，$a_5(4)$，$a_{11}(4)$，$a_{14}(4)$，$a_{13}(5)$，

$a_{12}(6)$，$a_{17}(6)$，$a_1(7)$，$a_9(7)$，$a_2(8)$。

取 $e_1=a_{14}$，$e_2=a_{13}$，$e_3=a_3$，$e_4=a_6$，$e_5=a_{10}$，$e_6=a_{16}$，$e_7=a_5$。则由 e_1，e_2，e_3，e_4，e_5，e_6，e_7，构成的生成树就是一棵最优树，它的权是16(图11.6-2)。

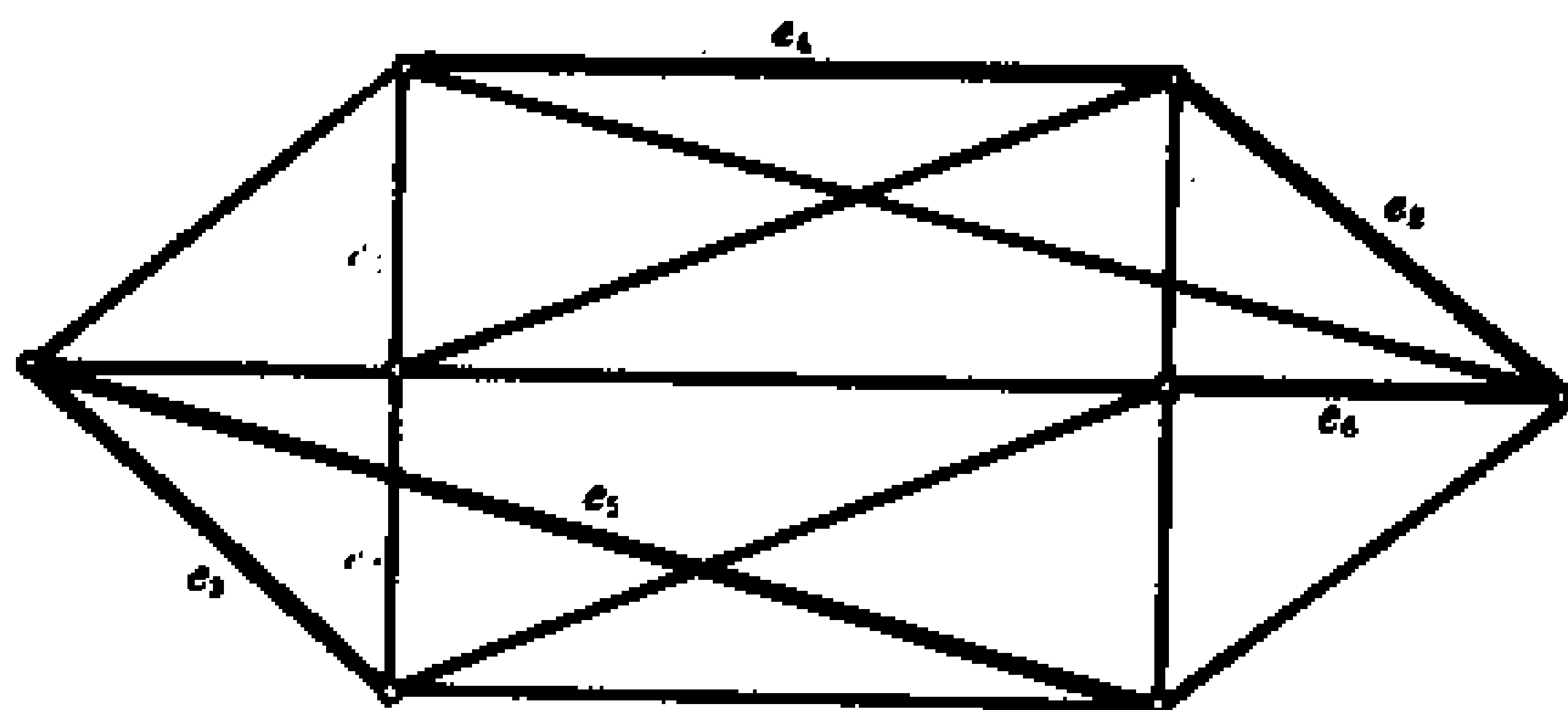


图11.6-2

如果取 $e_1=a_4$，$e_2=a_{15}$，$e_3=a_3$，$e_4=a_8$，$e_5=a_{10}$，$e_6=a_{16}$，$e_7=a_{14}$，可以得到另外一棵权为16的生成树(图11.6-3)。

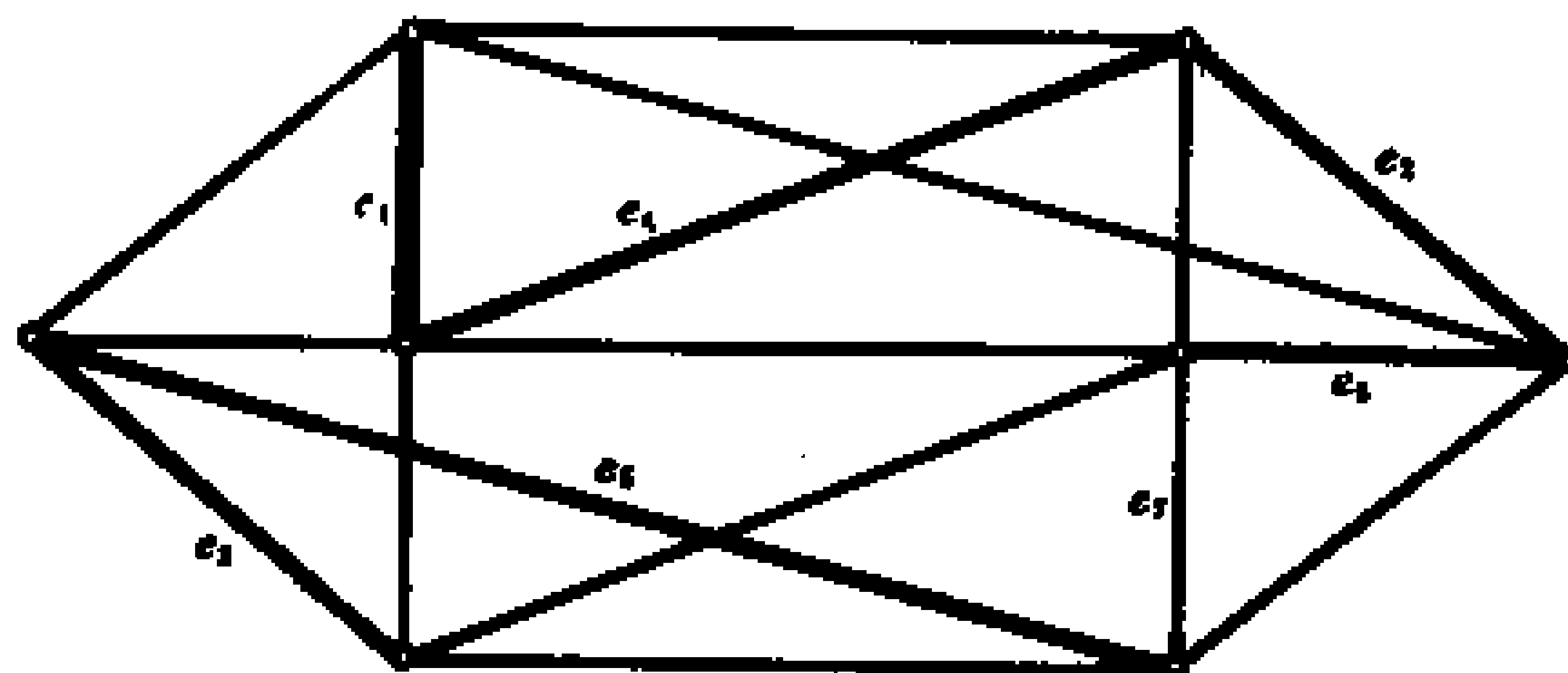
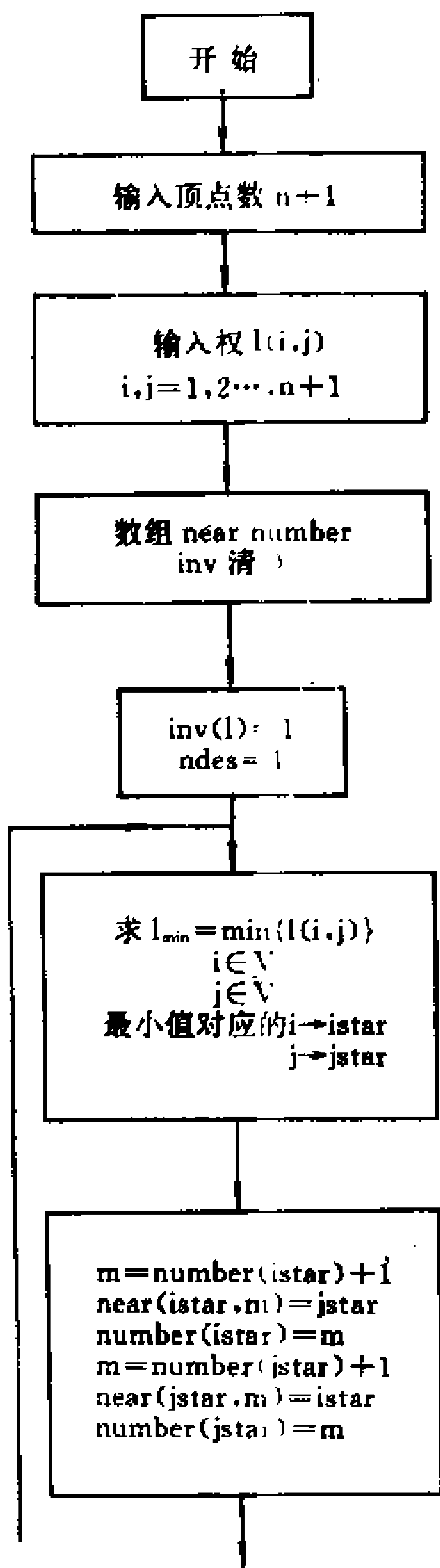


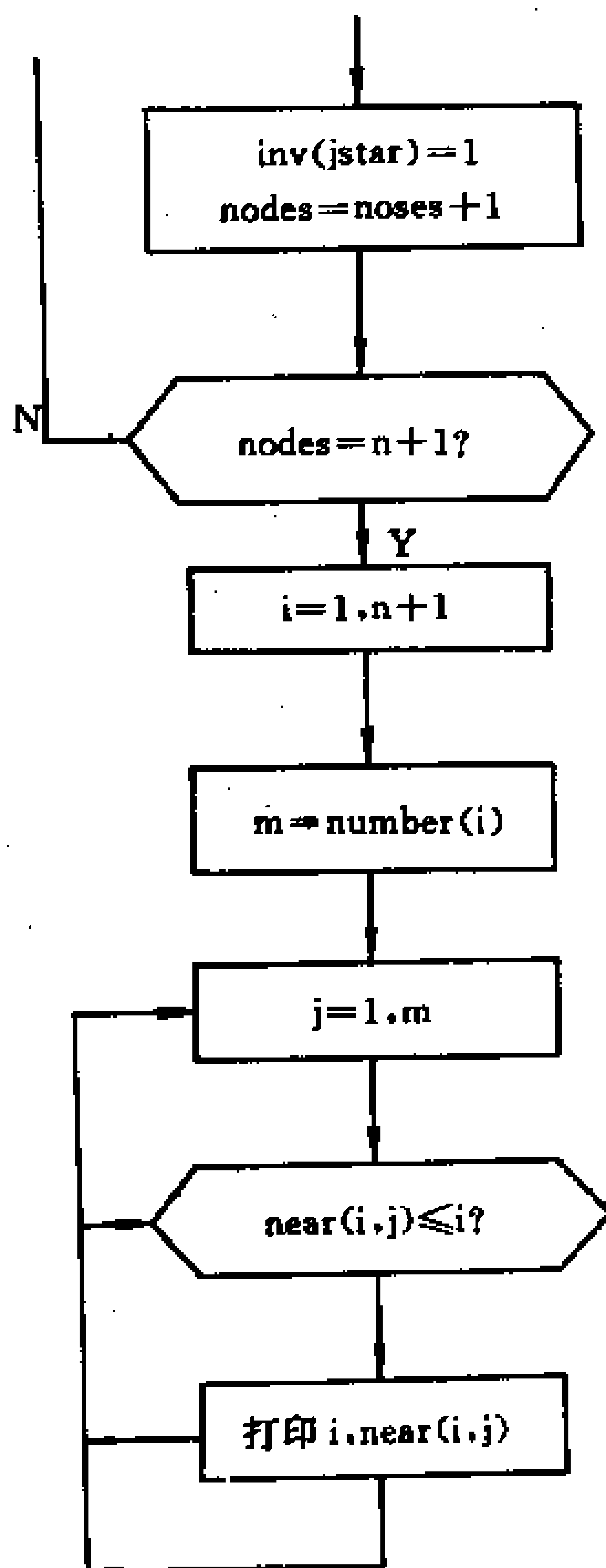
图11.6-3

算法二

设 G 是有 $n+1$ 个顶点的连通的赋权图。

(1) 取 T_0 为 $n+1$ 个顶点的空图，T_0 有 $n+1$ 个分支(即孤立点)，没有圈。


开 始
输入顶点数 n+1
输入权 l(i,j)
i,j=1,2…,n+1
数组 near number
inv 清 0
inv(1)= 1
ndes= 1
求 lmin=min{l(i,j)}
i∈V
j∈V
最小值对应的i→istar
j→jstar
m=number(istar)+1
near(istar,m)=jstar
number(istar)=m
m=number(jstar)+1
near(jstar,m)=istar
number(jstar)=m


inv(jstar)=1
nodes=noses+1
nodes=n+1?
N
Y
i=1,n+1
m=number(i)
j=1,m
near(i,j)≤i?
打印 i,near(i,j)

算法二框图

(2) 把 T_i 的 $n+1-i$ 个分支分成两个子集 V_i 和 $\overline{V}_i$，则 $E(V_i\times\overline{V}_i)$是一个断集。

(3) 取 e_{i+1}为断集 $E(V_i\times\overline{V}_i)$中权最小的边，令 $T_{i+1}=T_i+e_{i+1}$，显然，T_{i+1}没有圈且分支数为$(n+1)-(i+1)=n-i$。

(4) 当 $i=n-1$时算法停止，T_n 中已有 n 条边，构成 G 的一棵生成树，当 $i\neq n-1$时，令 $e'=i+1$返回(2)。

我们来证明算法的有效性。

令 $e'\notin T$，$C_T(e')=\{e',e_{i_1},e_{i_2},\cdots\cdots,e_{i_k}\}$，不妨设 $i_1<i_2<\cdots<i_k$。

今证

$$l(e')=\max_{e\in C_T(e')}\{l(e)\}$$

用反证法，若上式不成立，即 $\max\limits_{e\in C_T(e')}\{l(e)\}>l(e')$。令 i_r 是满足 $l(e_{i_r})=\max\limits_{e\in C_T(e')}\{l(e)\}$的所有 i_r 中指标最大的，这样，对任意 $s>r$，有

$$l(e_{i_r})>l(e_{i_s}),l(e_{i_r})>l(e')$$

显然

$$e_{i_r}\in S_{i_r}\cap C_T(e')$$

其中 $S_{i_r}=E(V_{i_r}\times\overline{V}_{i_r})$。存在 $e_j\neq e_{i_r}$，$e_j\in S_{i_r}\cap C_T(e')\backslash e_{i_r}$，因而 e_j 或者是 $e_{i_s}(s>r)$或者是 e'。故

$$l(e_{i_r})>l(e_j)$$

但 e_{i_r} 与 e_j 同属于 S_{i_r}，这与 e_{i_r}是 S_{i_r} 中权最小的边的假设矛盾，故

$$l(e')=\max_{e\in C_T(e')}\{l(e)\}$$

成立，即 T 是最小树。∎

算法二具体应用时不一定很方便，但是它可以看作是很多种最小树算法的概括，在理论上有一定意义。

下面给出算法二的框图。

设图的顶点数为 $n+1$。

near(i,j)：与顶点 i 邻接的第 j 个顶点的顶点编号。

number(i)：与顶点 i 邻接的顶点个数。

inv(i)：顶点 i 是否属于 V 的标志单元

$$=\begin{cases}1.\ 顶点\ i\ 在\ V\ 中；\\0.\ 顶点\ i\ 不在\ V\ 中。\end{cases}$$

nodes：属于 V 中的顶点数。

算法三

在赋权图 G 中任取一个圈，然后去掉这个圈中权最大的边，如此继续进行直到 G 中不再有圈时为止。这时剩下的边组成的子图就是最小树。

我们来证明算法三的正确性。

设在第一次去掉的边为 e_1，第二次去掉的边为 e_2，…，最后去掉的边为 e_k，与这些边对应的圈为 $C_1,C_2,\cdots,C_k$，即每个 e_j 是 C_i 中权最大的边。这里 C_i 是去掉边 $e_1,e_2\cdots e_{i-1}$后剩下的图中的圈，对于 $i<j$，C_i 不属于 C_j。

设去掉边 $e_1,e_2,\cdots,e_k$ 后剩下的子图为 H，那么 H 是一棵树。这是因为每次去掉的边 e_j 都是圈中的边，故去掉 e_j 后，图仍是连通的。又去掉 e_k 后图中没有圈，因此剩下的子图是一个无圈的连通图，故是一棵树。

在 H 中任取一条边 e'，令 $S_H(e')=\{e_i',e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$ 且不妨设 $i_1<i_2<\cdots<i_k$。今证

$$l(e')=\min_{e\in S_H(e')}\{l(e)\}$$

若不然，设 $\min_{e\in S_H(e')}\{l(e)\}>l(e')$。取 i_r 使 i_r 是满足 $l(e_{i_j})=\min_{e\in S_H(e')}\{l(e)\}$ 的所有 i_j 中指标最大的。所以对 $s>r$，有

$$l(e_{i_r})<l(e_{i_s})，及\ l(t_{i_r})<l(e')$$

显然，$e_{i_r}\in C_{i_r}\cap S_H(e')$，所以

$$e_j\in C_{i_r}\cap S_H(e')\backslash e_{i_r}$$

故 e_j 或等于 e_{i_r} 或等于 e'。由上面的假定，有

$$l(e_{i_r})<l(e_j)$$

这与 e_{i_r} 是 C_{i_r} 中权最大的边矛盾，故式(11.6-1)成立。由定理11.5.2知，H 是最小树。▮

算法三最适合在图上工作，当图较大时，可以几个人同时在各个子图上工作。因此算法三在实用上是很方便的。

例11.6-2 求图11.6-1所示的赋权图的一棵最小树。

(1) 在图11.6-1所示的图中，取圈 $a_1a_2a_4$，去掉 a_2 得一子图 N_1（图11.6-4）。

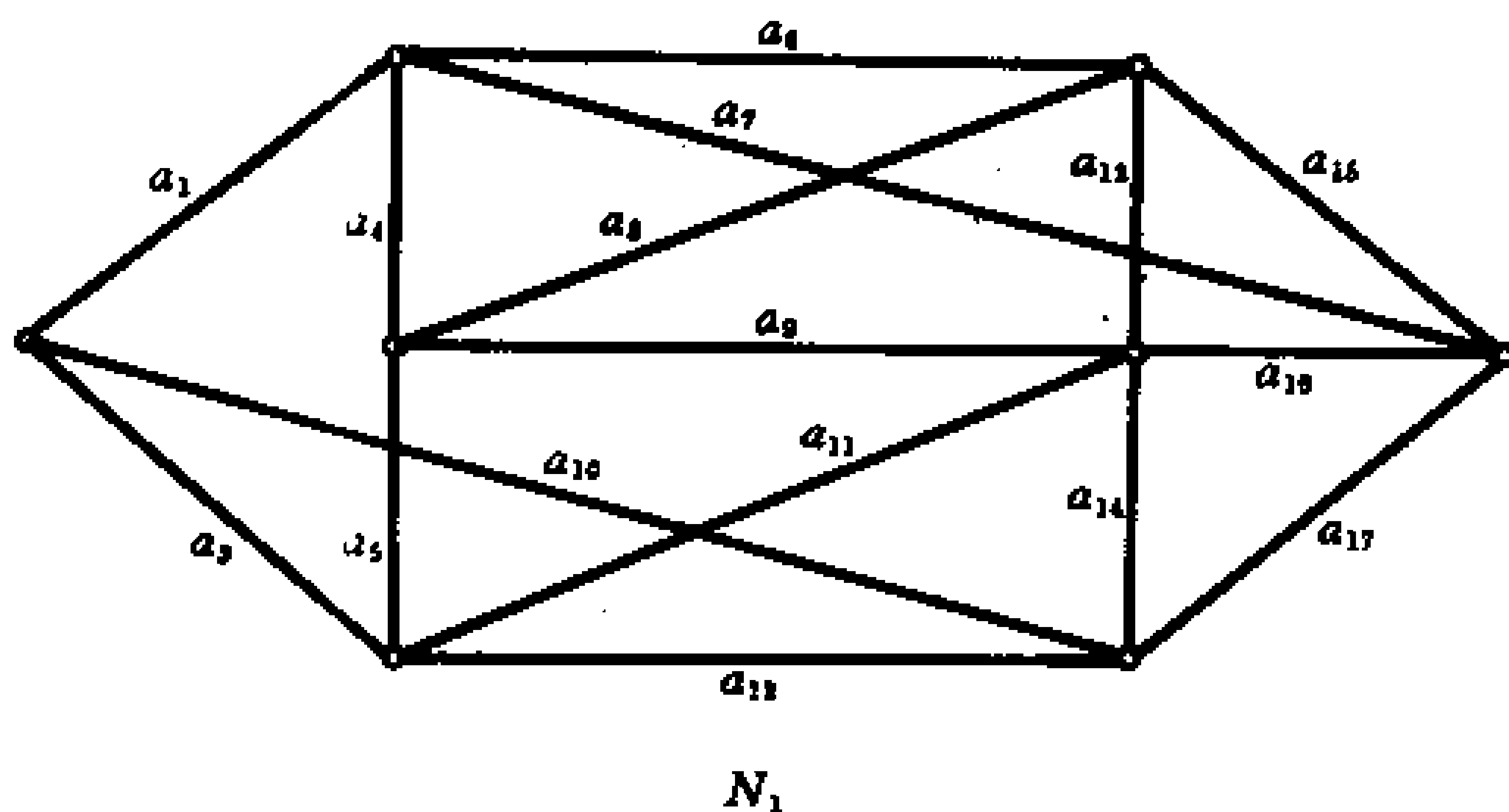


图11.6-4

(2) 在 N_1 中取一圈 $a_1a_4a_5a_3$，去掉 a_1，得一子图 N_2（图11.6-5）。

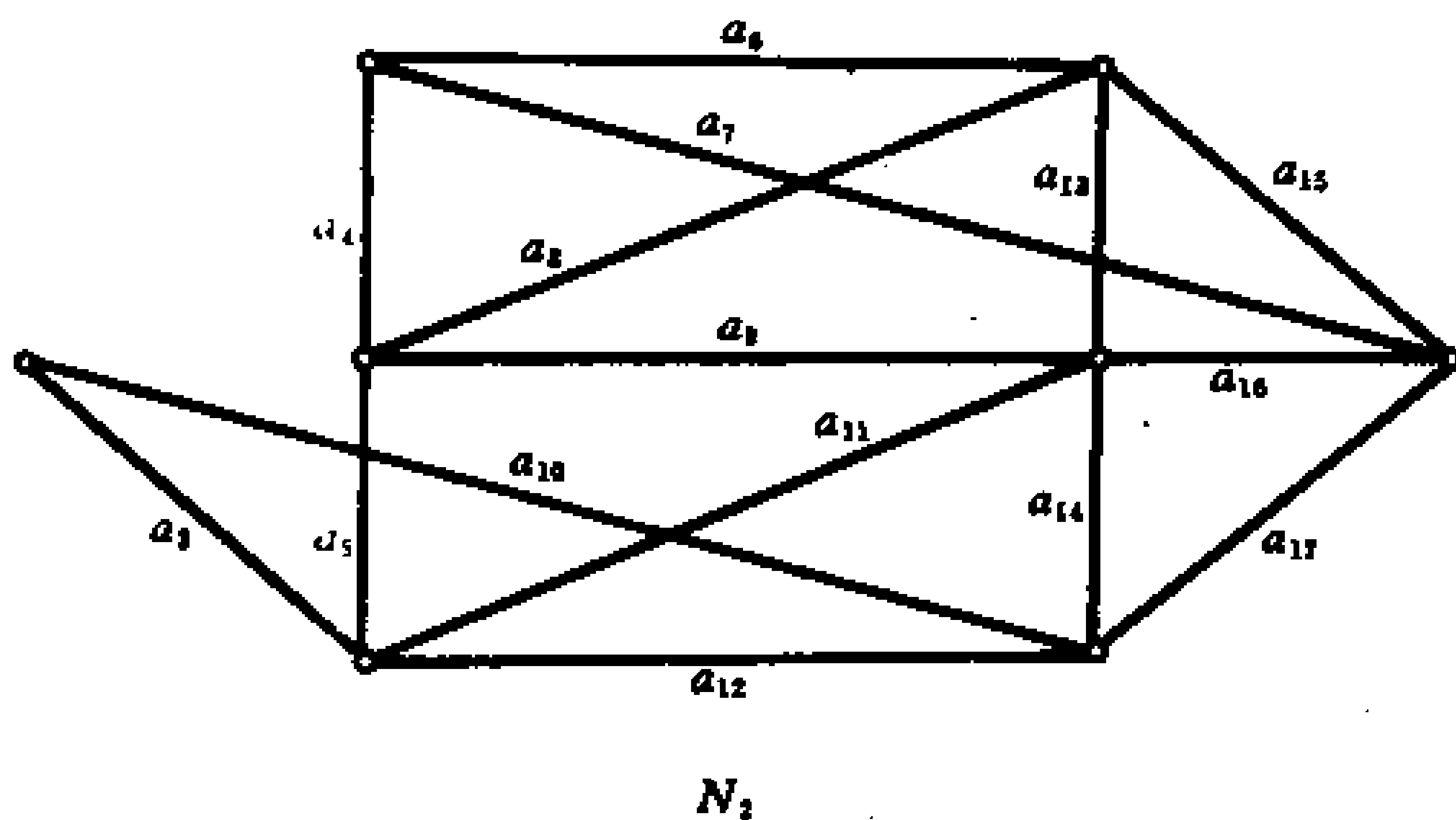
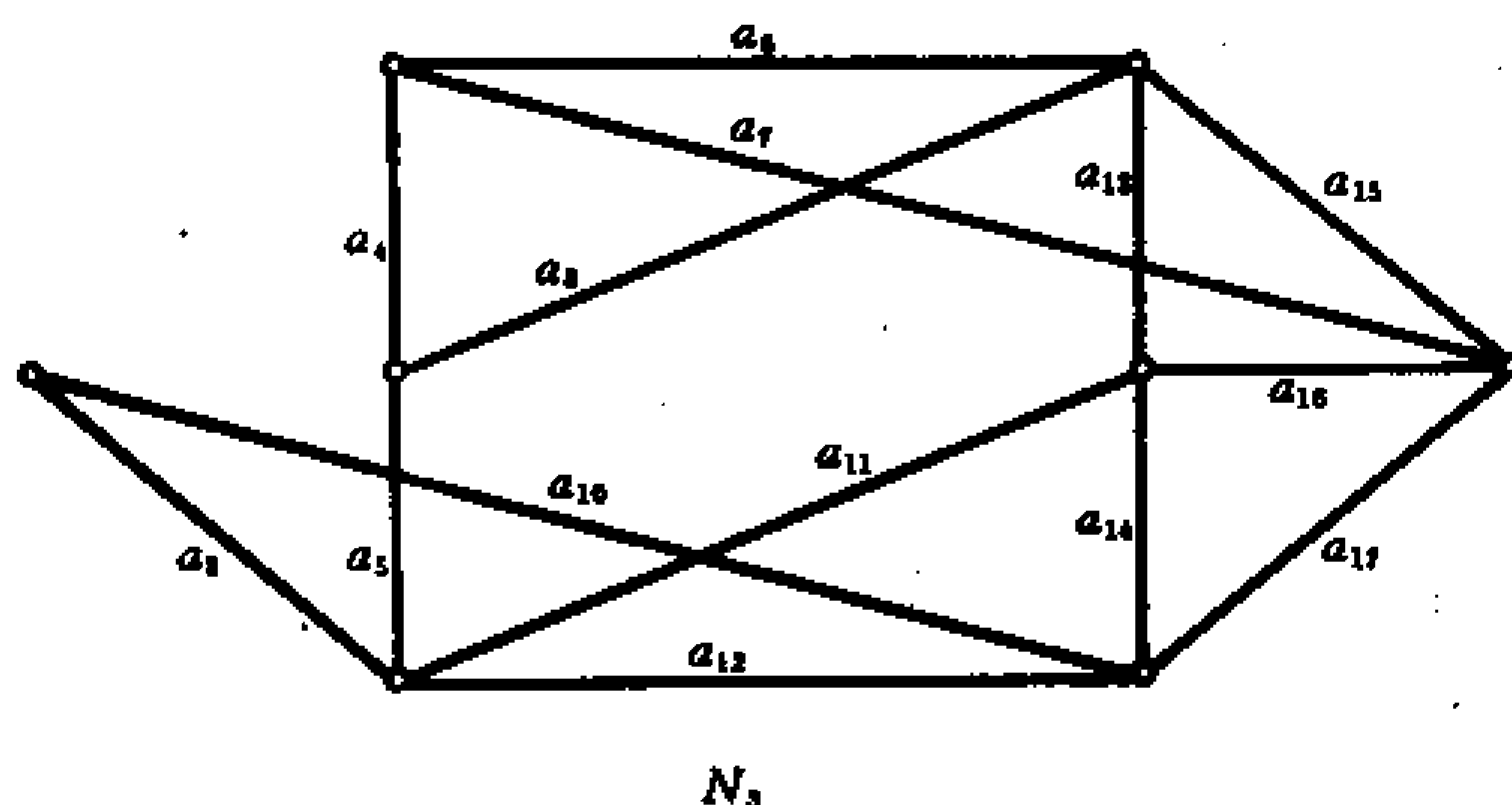


图11.6-5

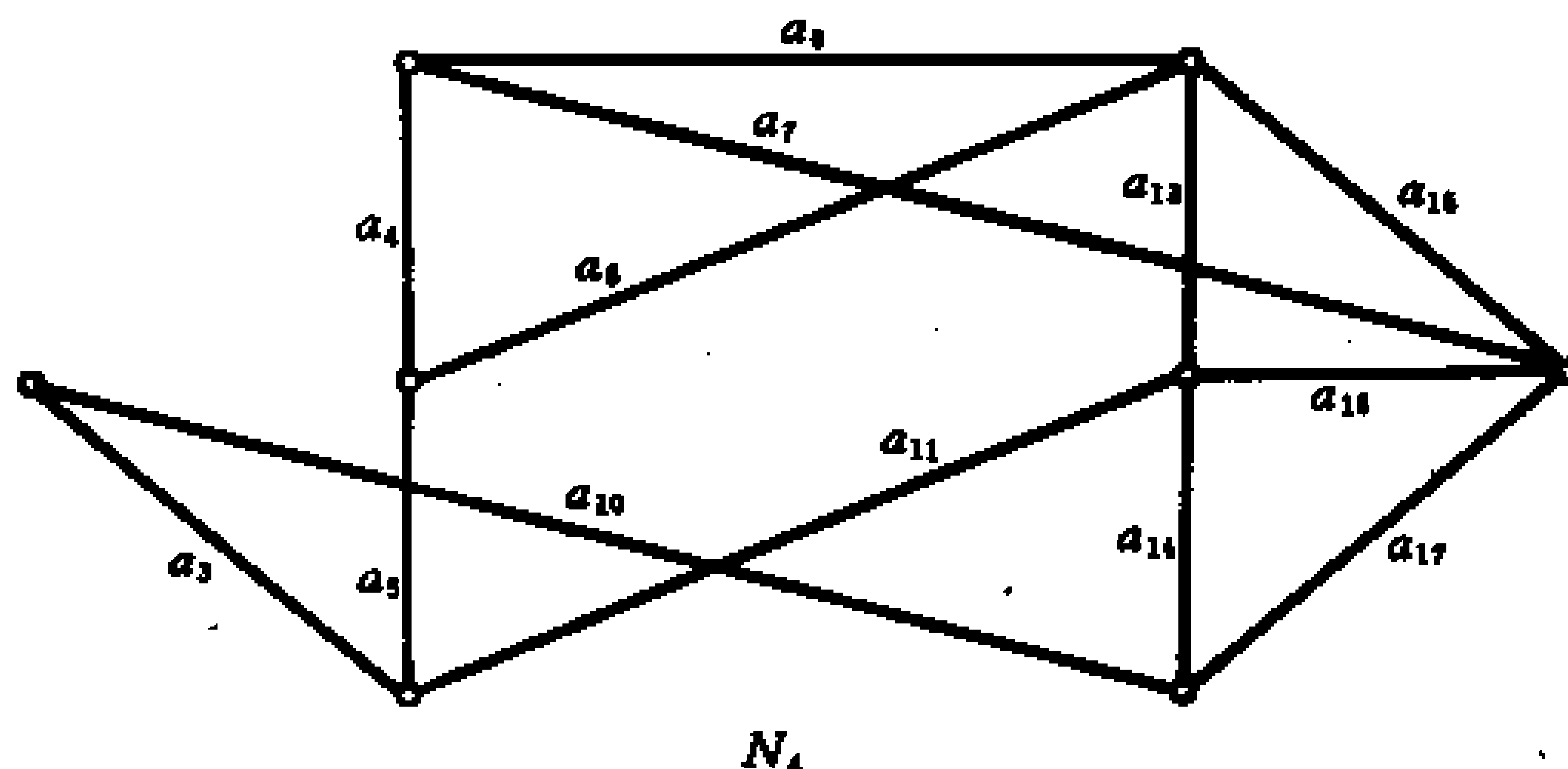
(3) 在 N_2中取一圈 $a_9a_{13}a_8$，去掉 a_9得一子图 N_3(图11.6-6)。



N_3

图11.6-6

(4) 在 N_3中取圈 $a_3a_{10}a_{12}$，去掉 a_{12}，得一子图 N_4(图11.6-7)



N_4

图11.6-7

(5) 在 N_4中取圈 $a_{14}a_{15}a_{17}$，去掉 a_{17}，得一子图 N_5(图11.6-8)

(6) 取圈 $a_5a_8a_{13}a_{11}$去掉 a_{13}；取圈 $a_4a_5a_{11}a_{16}a_{15}a_6$，去掉 a_{11}；取圈 a_6，a_7，a_{15}，去掉 a_7；取圈 a_4，a_6，a_8，去掉 a_6；最后去掉圈 $a_8a_5a_4a_6a_{16}a_{16}a_{14}a_{10}$中的边 a_{14}，得最小树(图 11.6-9)。

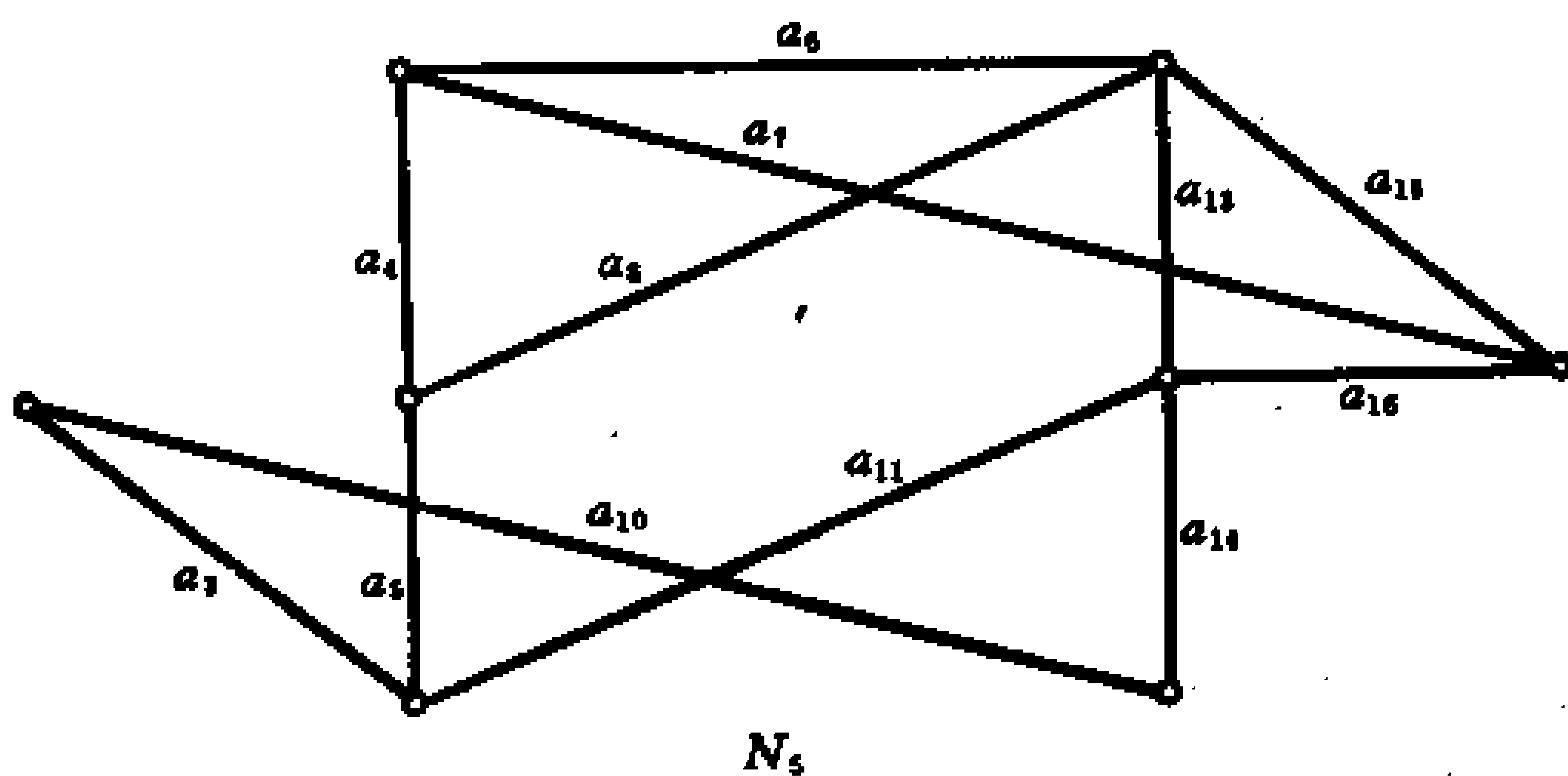


图11.6-8

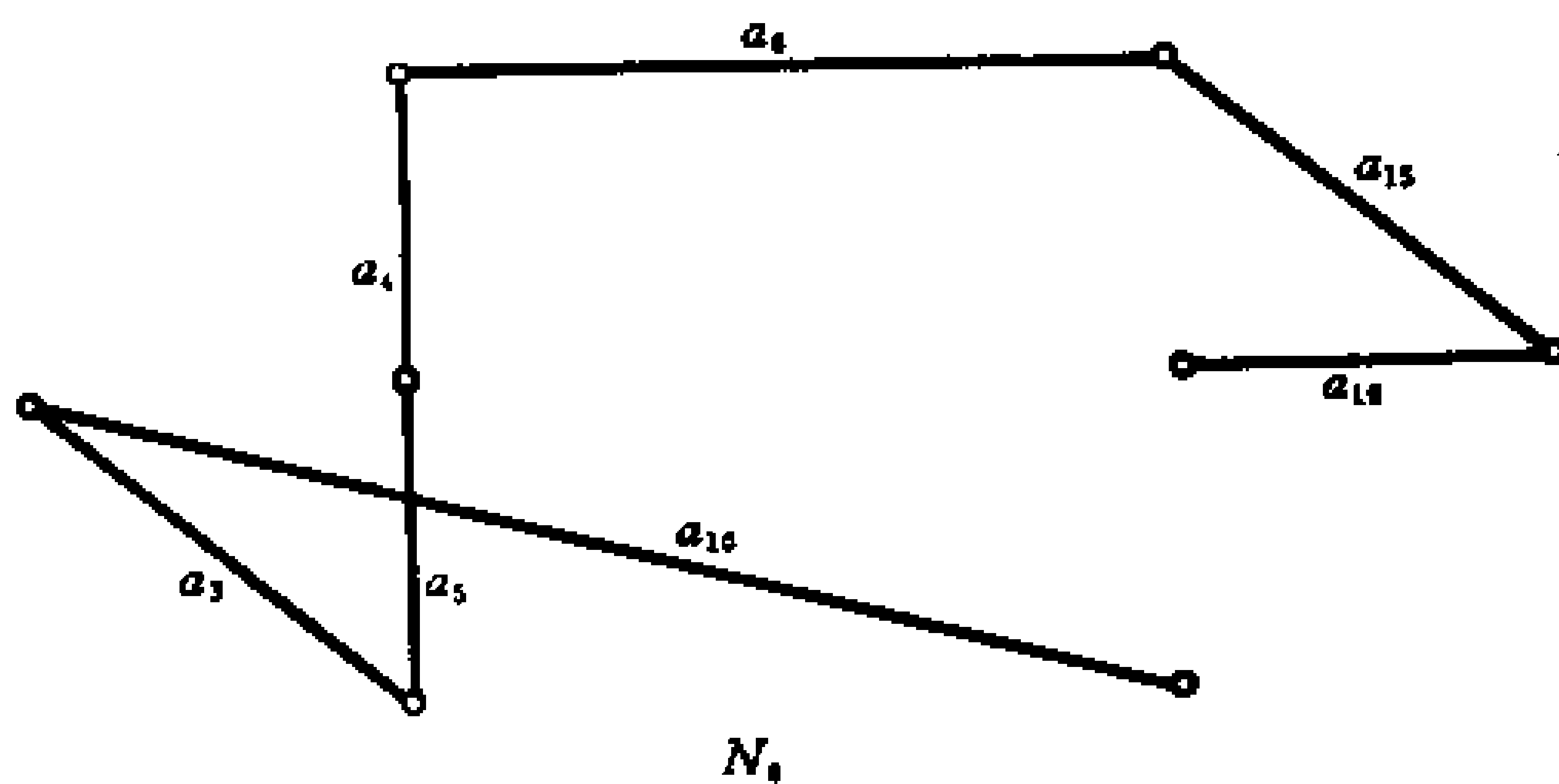


图11.6-9

习题十一

11-1　在图 G 中求 $\{P_{12}\}$，$\{P_{24}\}$。

11-2　求下图中顶点 u 和 v 之间的最短道路。

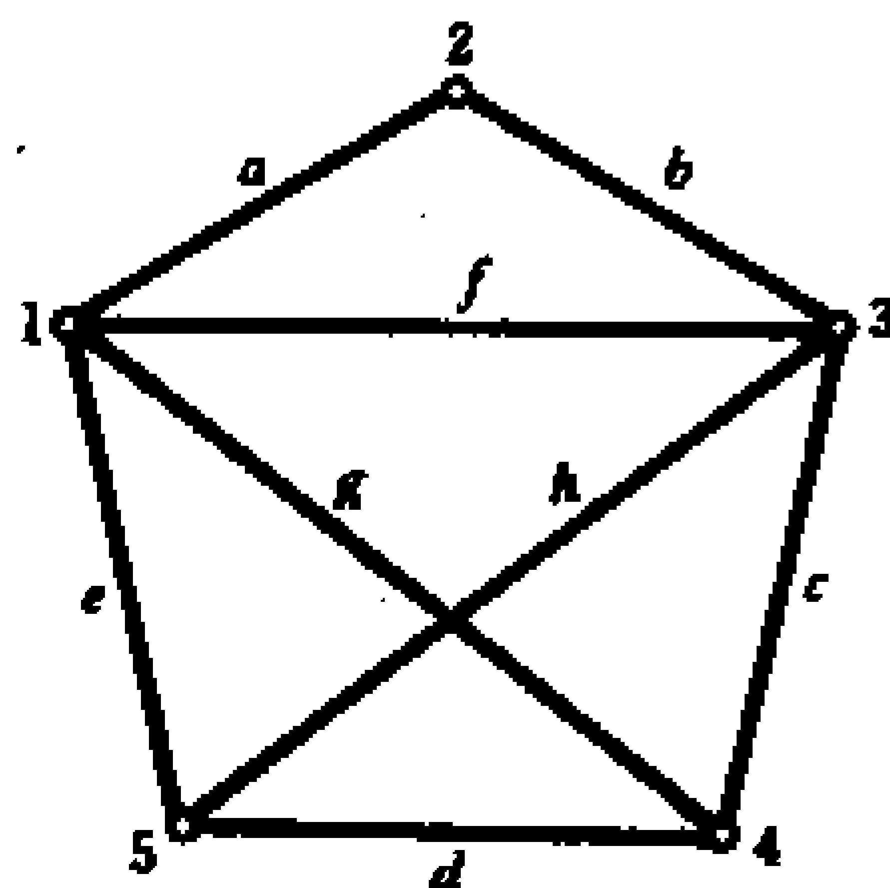
11-3　求下图中顶点 u 和顶点 v 间的最短道路长。

11-4　求下述网络的中国邮路问题。

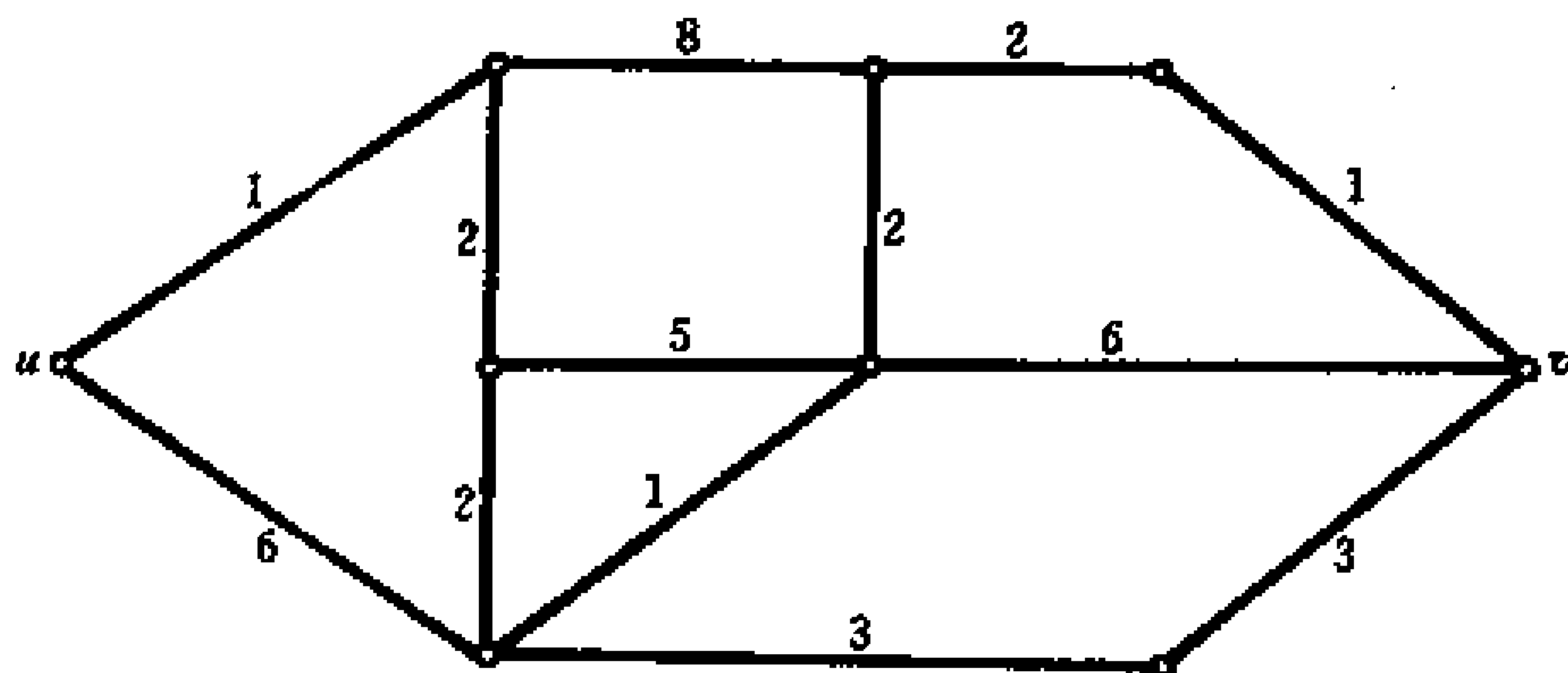
11-5　试用kruskal算法求下列各图的最小树。

11-6　用求最小树的算法三求上题两图的最小树。

11-7　已知世界六个城市：北京（Pe），纽约（N），巴黎（Pa），伦敦（L），东京（T）、西哥（M）、试在由下表确定的交通网络中确定最小树。

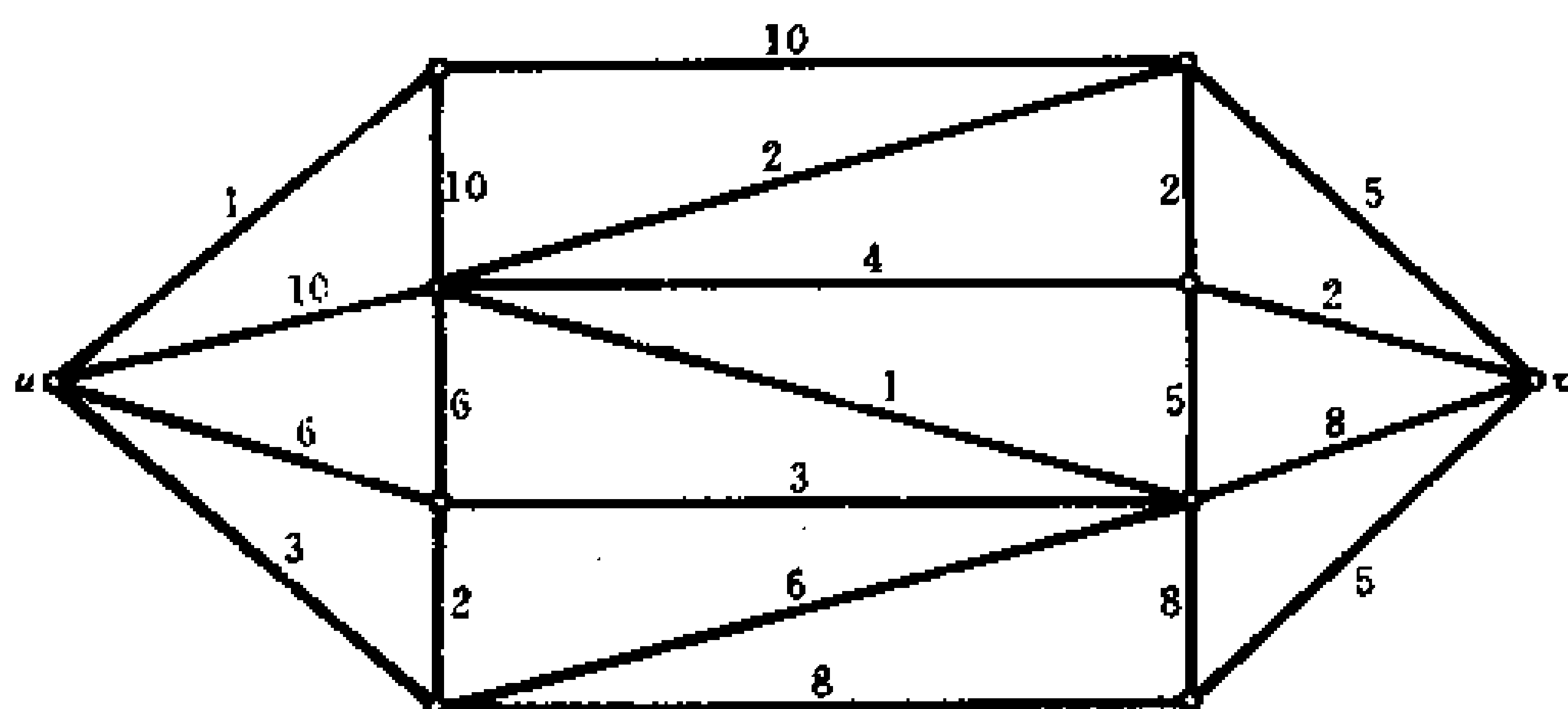


题11-1图

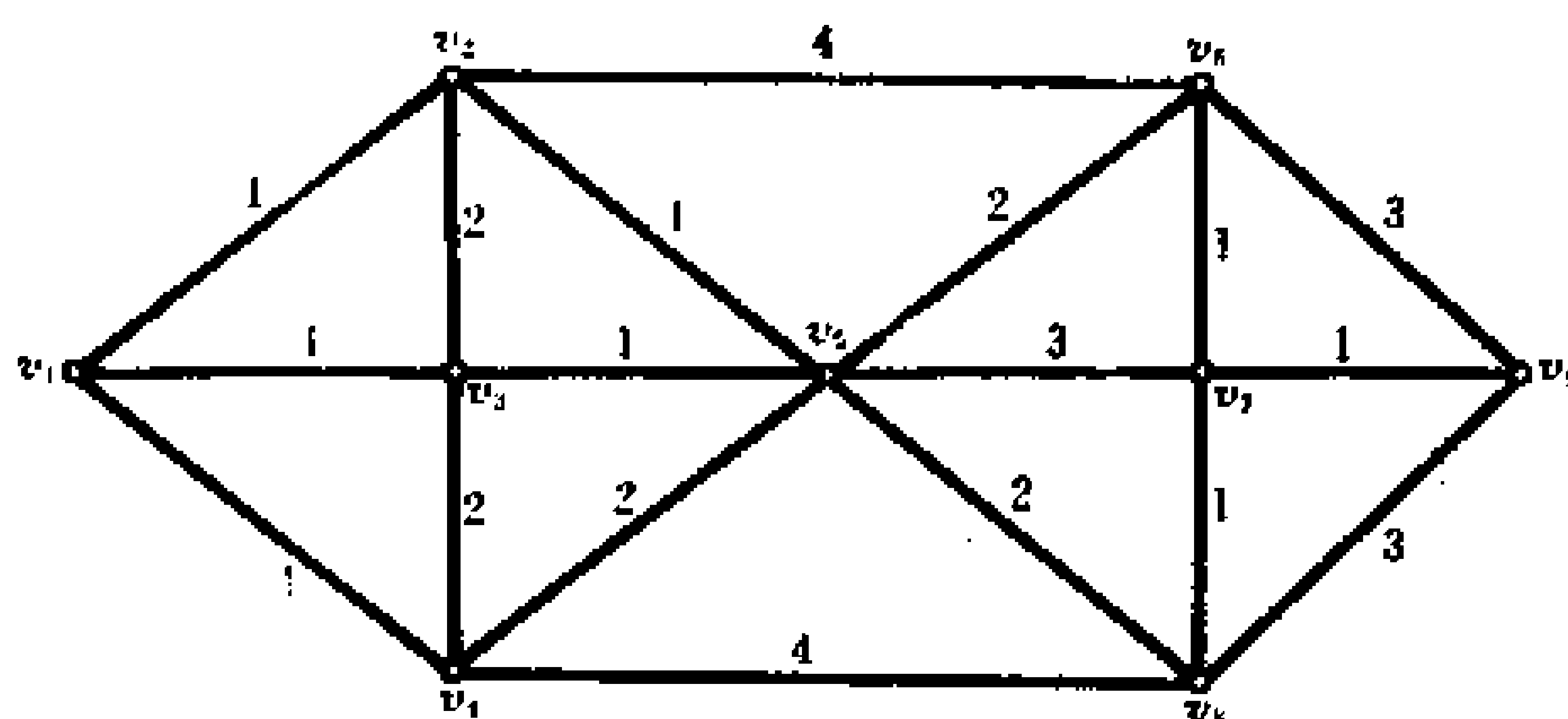


题11-2图

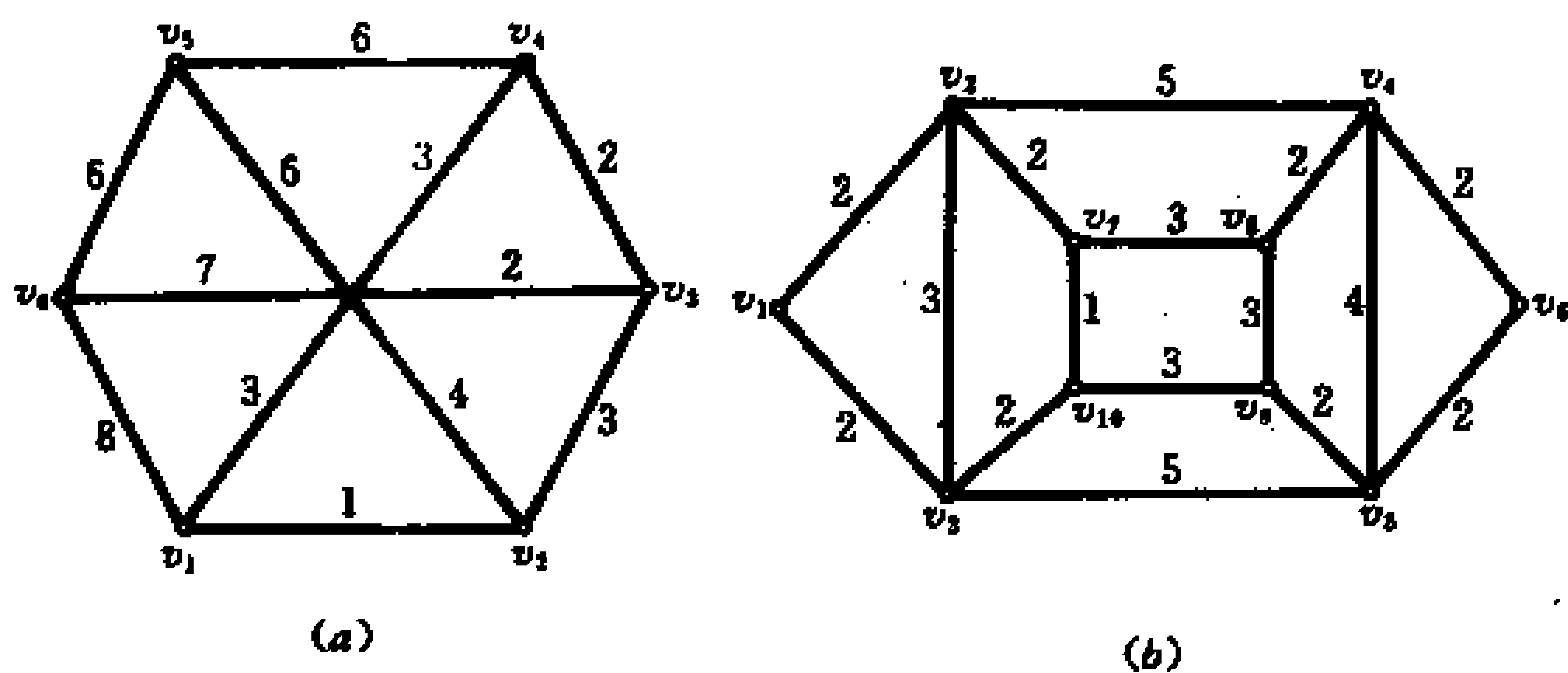
	Pe	T	Pa	M	N	L
Pe	—	13	51	77	68	50
T	13	—	60	70	67	59
Pa	51	60	—	57	36	2
M	77	70	57	—	20	55
N	68	67	36	20	—	34
L	50	59	2	55	34	—



题11-3图



题11-4图



题11-5图

第十二章　有　向　图

在图论的应用中，经常遇到的情况是，不仅需要画出描述问题的图的图形，而且需要指出图中每一条边的方向。这是因为，一方面，在有些问题中，一对顶点之间的关系不是对称的。例如，城市道路系统中的单行道，又如时序电路中，从一个状态到另一个状态的转换，往往都具有方向性。这种方向性表示所描述的物理系统的某种次序或单向性质。另一方面，为了描述某种参考系统而赋予边以一定的方向。例如，电路理论中，为确定由理想元件构成的电网络中电流和电压的正负，必须指定网络中支路电流、电压的参考方向。

本章讨论的内容是：有向图的概念，有向道路，有向圈，有向树和有序树。

12.1　有　向　图

定义 12.1.1　一个有向图(digraph)D定义为一个偶对$D=(V,U)$，其中

1. V是个非空集合，其元素称为**顶点**；

2. U是有序积$V\times V$的一个子集，其元素称为**弧**(arc)。

根据有向图的定义，与一条弧关联的两个端点具有一定的次序关系，即弧$a=(u,v)$是顶点u和v的有序对。我们称u为弧a的**起点**，v为**终点**。如果对有向图$D=(V,U)$的每一条弧(u,v)从起点u到终点v作一矢线，方向是从u指向v，那么

有向图的每一条弧都有确定的方向。因此，有向图就是每条边都有一定方向的图。这样，有向图也可用一个几何图形来表示。图 12.1-1 是某一个有向图的图形。

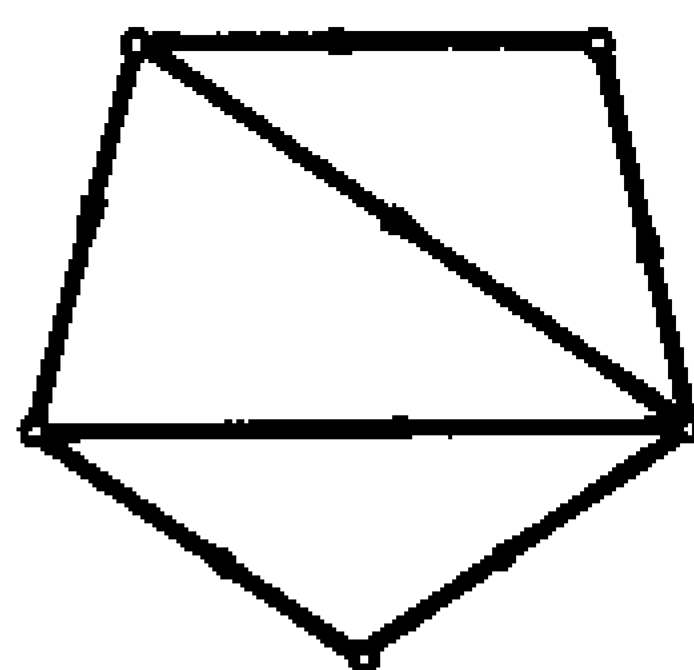


图 12.1-1

给定一个图 G，对于它的每条边，给它的两个端点指定一个次序（即给这条边指定一个方向）后，便得到一个有向图。这样的一个有向图，称为 G 的一个**定向**(direct)。

反之，对一个有向图 D，可以在相同顶点集合上作一个图 G，使得对应于 D 的各条弧，G 均有一条相同端点的边，这个无向图 G 称为 D 的基础图(underlying graph)。从直观上来说，把有向图 D 的每条弧上的箭头去掉所得到的一个无向图就是有向图的基础图。

显然，一个无向图的定向图是唯一的，但是对应一个基础图的有向图却不是唯一的。譬如，图 12.1-2(a)、(b)表示的是两个不同的有向图，但是它们的基础图是一个。

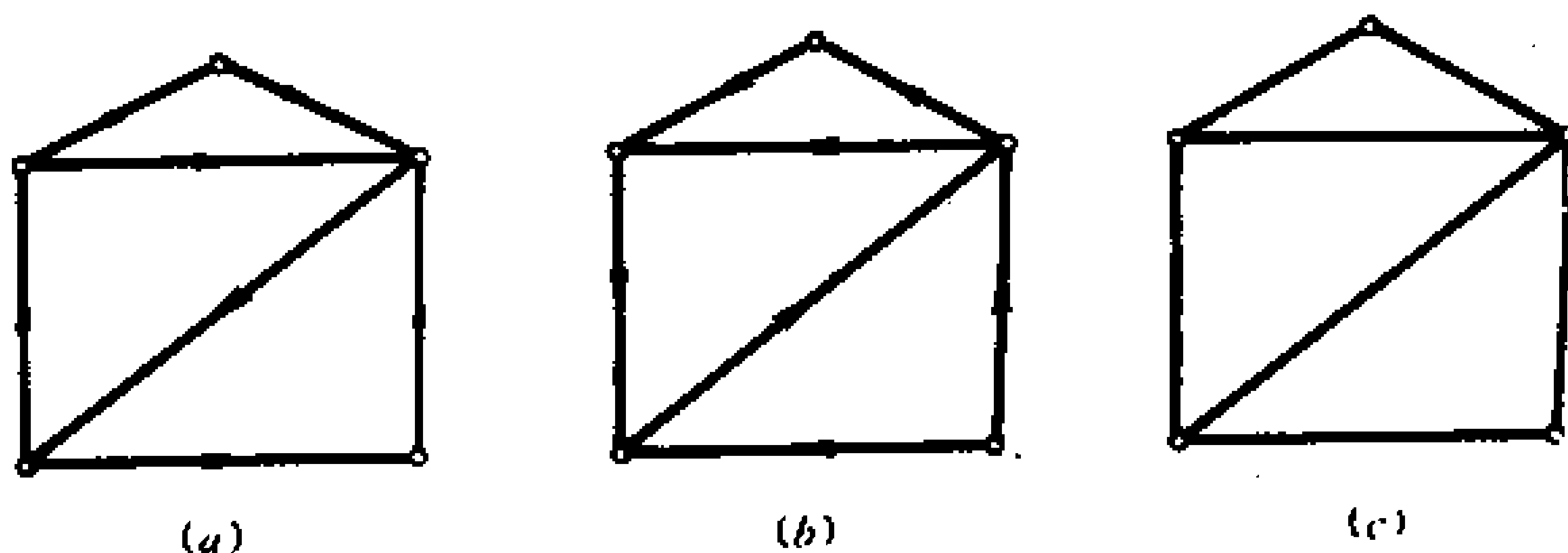


图 12.1-2

有向图的许多概念，通常是根据其基础图来定义。例如，若基础图是连通的，则称其有向图是连通的。又如，道路、圈、树、割集等概念均可以根据其基础图来定义。

12.2 有向道路和有向圈

定义 12.2.1 有向图 D 中，以顶点 v 为起点的弧的数目，叫做 v 的**出度**(outdegree)，记作 $\deg^+(v)$；以顶点 v 为终点的弧的数目，叫做 v 的**入度**(iudegree)，记作 $\deg^-(v)$。

显然，对有向 D 中的任一顶点 v，有

$$\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v) \qquad (12.2\text{-}1)$$

定义 12.2.2 有限非空序列 $M=v_0a_1v_1\cdots v_{k-1}a_kv_k$，它的项交替地是顶点和弧，弧 a_i 的起点是 v_{i-1}，终点是 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$，且同一条弧不用两次，则称 M 是一条**有向链**(directed chain)。v_0 和 v_k 分别称为这条有向链的起点和终点，k 称为链的长。

和无向图一样，有向链 $v_0a_1v_1\cdots v_{k-1}a_kv_k$ 通常简单的用它的顶点序列 $v_0v_1\cdots v_k$ 来表示。

本身是一条道路的有向链，称为**有向道路**(directed path)。

起点和终点重合的有向链，称为**有向闭链**。

本身是一个圈的有向闭链，称为**有向圈**。

顶点和弧的交替序列 $v_0a_1v_1\cdots v_{k-1}a_kv_k$，其中顶点均不相同，但每条弧 a_i 可能是 $v_{i-1}v_i$，也可能是 v_iv_{i-1}，这样的序列称为**半道路**(semi-path)

例如，在图 12.2-1 中，123425 是有向链，1254 是有向道路，1234251 是有向闭链，1251 是有向圈，12543 是半道路。

对于无向图，它只有连通和不连通两种情况。但是对有向图，则有不同的连通方式。下面我们给出有向图各种连通性的特征，为此先给出下面的定义。

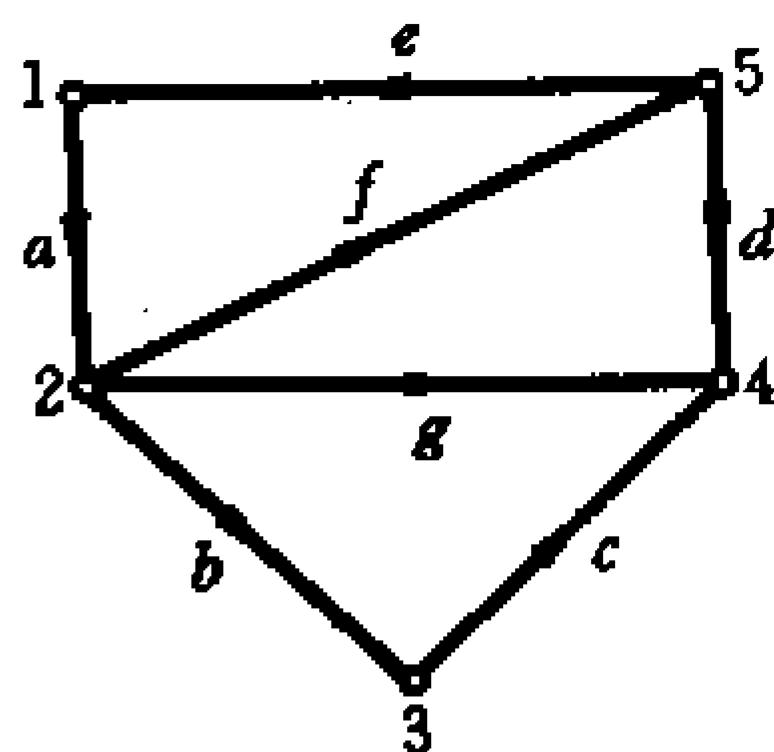


图 12.2-1

定义 12.2.3 如果在有向图 D 中，有一条 (u,v) 有向道路，则 v 称为是从 u **可达的**，或者说，从 u **可达** v。

(1) 如果有向图 D 的任何两顶点都互相可达，则称 D 是**强连通的**(strongly connected)。

(2) 如果有向图 D 的任何两顶点至少有一个顶点由另一顶点可达，则称 D 是**单向连通的**(unilateral connected)。

(3) 如果有向图 D 的任何两顶点由一条半道路联接，则称 D 是**弱连通的**(weahly connected)。

设 D 是强连通有向图，$a=(u,v)$ 是 D 中的任一弧。因为由 v 可达 u，即存在一条 (v,u) 有向道路 P，于是 $P\cup(u,v)$ 是一条有向圈。反之，若 D 中的每一条弧均在某一有向圈中，则 D 显然是强连通的。这样便得到下面的定理。

定理 12.2.1 有向图 D 是强连通的，当且仅当 D 的每一条弧都在某一有向圈中。

类似地，可以得到

定理 12.2.2 有向图 D 是单向连通的，当且仅当 D 的每一条弧都在某一有向道路中。

下面讨论有向图 D 中有有向道路和有向圈的条件。

定理 12.2.3 设 P 是有向图 D 的一个子图，如果

(1) $\deg^+(u)=1, \deg^-(u)=0$
$\deg^+(v)=0, \deg^-(v)=1$ $u, v \in V(P)$

(2) 对任意的 $w \in V(P)$，有

$$\deg^+(w) = \deg^-(w) = 1$$

那么 P 是一条 (u,v) 有向道路。

[证明] 由条件(1)，(2)知，P 是一条 (u,v) 道路，又由(2)知，P 中相邻两个顶点间只有一条弧。设 $a_1=(u_1,v_1)$，$a_2=(u_2,v_2)$ 是任意两条邻接的弧，且设 v_1 是它们的公共顶点(图 12.2-2)。

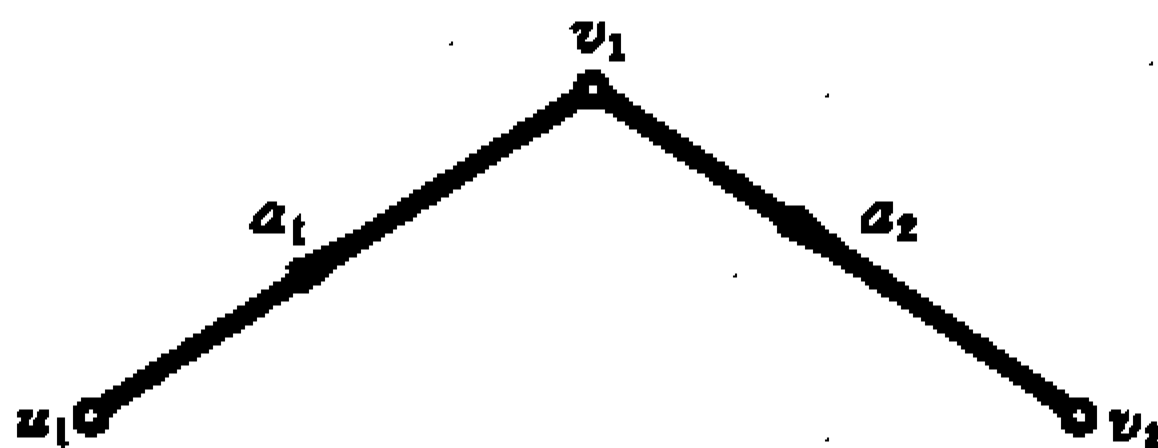


图 12.2-2

因为 v_1 的出度和入度均为 1，也就是说，以 v_1 为起点和终点的弧的数目都是 1，所以 v_1 即是弧 a_1 的终点又是弧 a_2 的起点，故 $v_1=u_2$。因此，P 是一条有向道路。再由条件(1)知，P 是一条 (u,v) 有向道路。▮

定理 12.2.4 设 C 是有向图 D 的一个子图，如果

(1) 对任意的 $v \in V(C)$，有

$$\deg^+(v) = \deg^-(v)$$

(2) 对任意的 $v \in V(C)$，$\deg(v)=2$，那么 C 是一条有向圈。

证明方法与定理 12.2.3 相似，在此省略。

定理 12.2.5 设 D 是有向连通图，对任意的 $v \in V(D)$，如果

$$\deg^+(v) = 1 (\text{或} \deg^-(v) = 1)$$

那么 D 恰有一条有向圈。

[证明] 先证 D 中至少有一条有向圈。从 D 的某一顶点出发，可以找到一条有向链。因为 D 中所有的顶点，均有 $\deg^+(v)=1$（或 $\deg^-(v)=1$），所以这条链仅终止于在链中已经过的一个顶点上，故 D 中含有一条有向圈。

假如 D 中含有两个有向圈 C_1 和 C_2，那么 C_1 和 C_2 的位置关系无非是下面三种情况（图 12.2-3）：

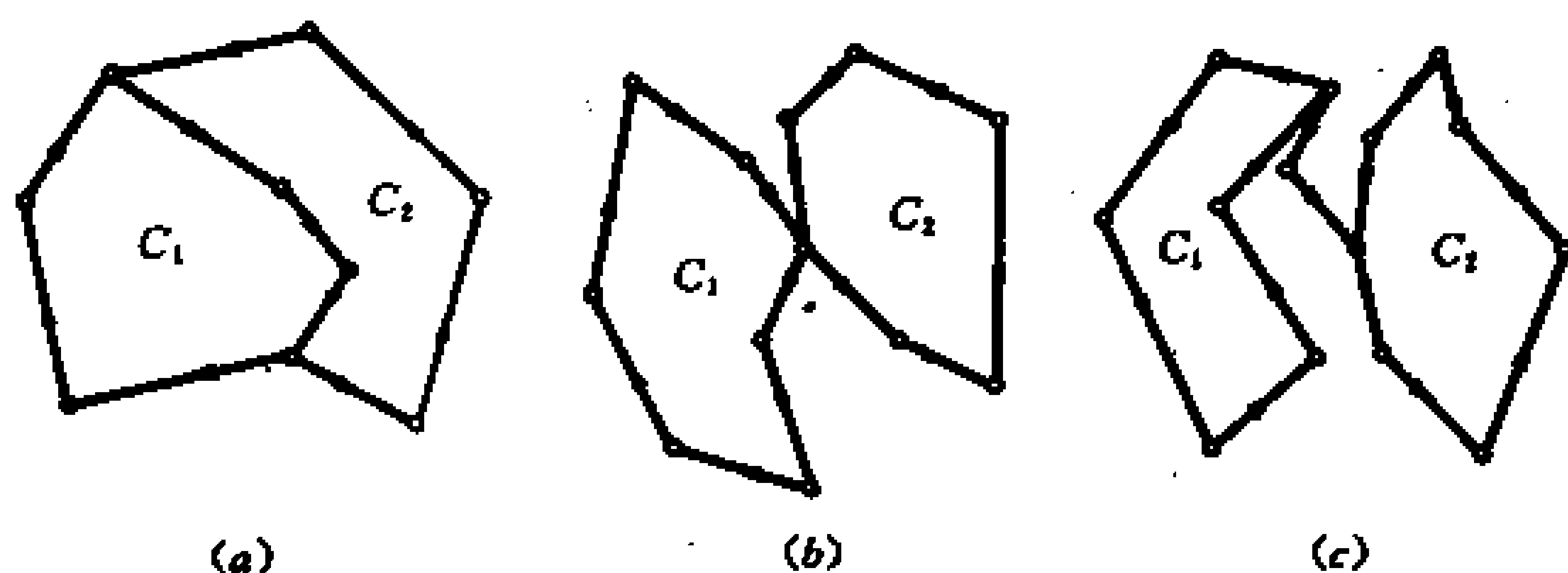


图 12.2-3

(1) C_1 和 C_2 有公共边；

(2) C_1 和 C_2 有一个公共顶点；

(3) C_1 和 C_2 既无公共边又无公共顶点。

情况(1)：它们的公共边必是一条有向链，它的两个端点在 $C_1\cup C_2$ 中的度均为 3。于是，C_1 或 C_2 中必有一个顶点的出度为 2（或入度为 2），这与假设矛盾。

情况(2)：设 u 是 C_1 与 C_2 的公共顶点。显然顶点 u 在 $C_1\cup C_2$ 中的度为 4，于是 $\deg^+(u)=\deg^-(u)=2$，与假设矛盾。

情况(3)：因为 D 是连通的，故可以找到一条链 M，其一个端点在 C_1 中，另一个端点在 C_2 中。这两个端点在 $C_1\cup C_2\cup M$ 中的度为 3，而其中必有一个端点的出度为 2（或入度为 2）与假设矛盾。▌

定理 12.2.6 有向图 D 有有向圈的充要条件是存在一个所有顶点均满足

$$\deg^+(v) > 0 \text{ 和 } \deg^-(v) > 0$$

的子图。

[证明] 必要性显然。现证充分性。

若在 D 中存在一个所有顶点均满足

$$\deg^+(v) > 0 \text{ 和 } \deg^-(v) > 0$$

的子图 D_1，那么从 D_1 的一顶点出发可得一有向链，因而也就存在一个有向圈。∎

设 v 是有向图 D 的一个顶点，如果

$$\deg^+(v) = 0 \text{ 或 } \deg^-(v) = 0$$

则去掉顶点 v 和 v 关联的弧，我们称这一过程为去掉 v 的 w 过程。

定理 12.2.7 有向图 D 没有有向圈的充要条件是能通过 w 过程去掉 D 的所有的弧。

[证明] 如果 D 没有有向圈，由定理 12.2.6 知，D 中至少有一个顶点 v，使 $\deg^+(v)=0$ 或 $\deg^-(v)=0$。用 w 过程去掉顶点 v，得一子图 D_1。D_1 中也没有有向圈，再由定理 12.2.6，D_1 中至少有一个顶点 v_1，使 $\deg^+(v_1)=0$ 或 $\deg^-(v_1)=0$。再用 w 过程去掉顶点 v_1 得一子图 D_2，D_2 也没有有向圈。如此继续下去，就可以用 w 过程去掉 D 的所有弧。

反之，如果 D 中有有向圈，那么在该有向圈中的顶点的出度和入度均不为零。因此不能用 w 过程去掉这些顶点，因而也就不能用 w 过程去掉 D 的所有的弧。∎

例 12.2-1 在图 12.2-4 所示的有向图 D 中，因为 $\deg^+(1)=0$ 和 $\deg^-(2)=0$，所以用 w 过程去掉顶点 1 和顶点 2，得一子图 D_1。在 D_1 中，$\deg^+(3)=0$，$\deg^-(4)=0$，去掉顶点 3 和 4，得一子图 D_2。在 D_2 中，

$\deg^-(5)=0$，$\deg^+(7)=0$，再去掉顶点 5 和顶点 7。这样就把 D 中的所有弧去掉了。因此 D 没有有向圈。

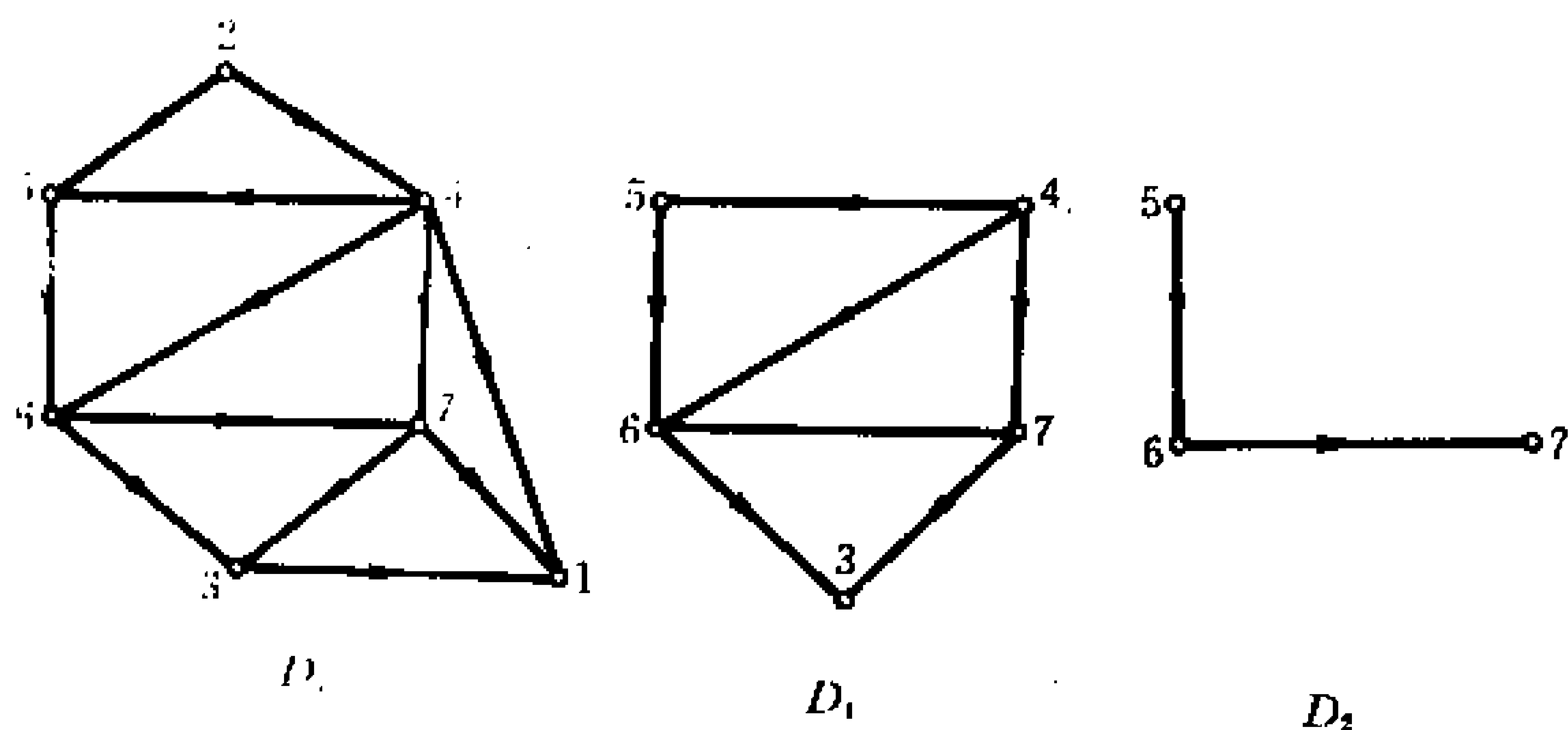


图 12.2-4

例 12.2-2 在图 12.2-5 的有向图 D 中，$\deg^-(1)=0$ 或 $\deg^+(2)=0$，用 w 过程去掉顶点 1 和 2，得到一子图 D_1。在 D_1 中 $\deg^+(3)=0$，用 w 过程去掉顶点 3，得一子图 D_2。因为 D_2 中不再有出度或入度等于零的顶点，所以不能用 w 过程去掉 D_2 中的顶点，这表明 D 中有有向圈。

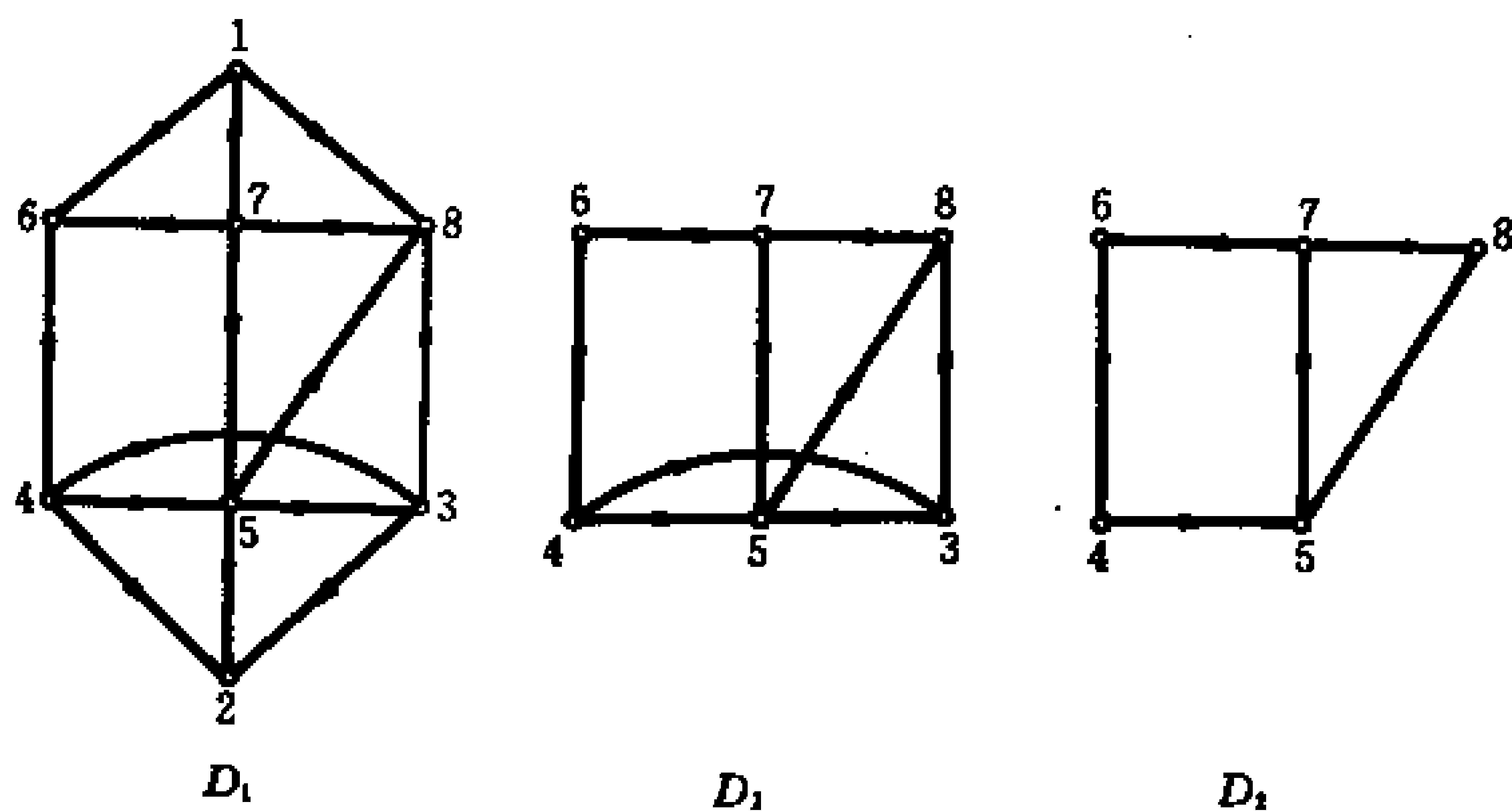


图 12.2-5

12.3 有向树和有序树

有向树和有序树是一个重要的图类。有向树在计算机算法，有序树在计算机程序中有重要的作用。此外，有向树常常用来描述带有"体系"性质的结构，如图书馆的书籍分类等。

定义 12.3.1 设 D 是一有向图，r 是 D 中的一个顶点，如果由 r 可到达 D 的任一顶点，则称 r 为 D 的**根**(root)。

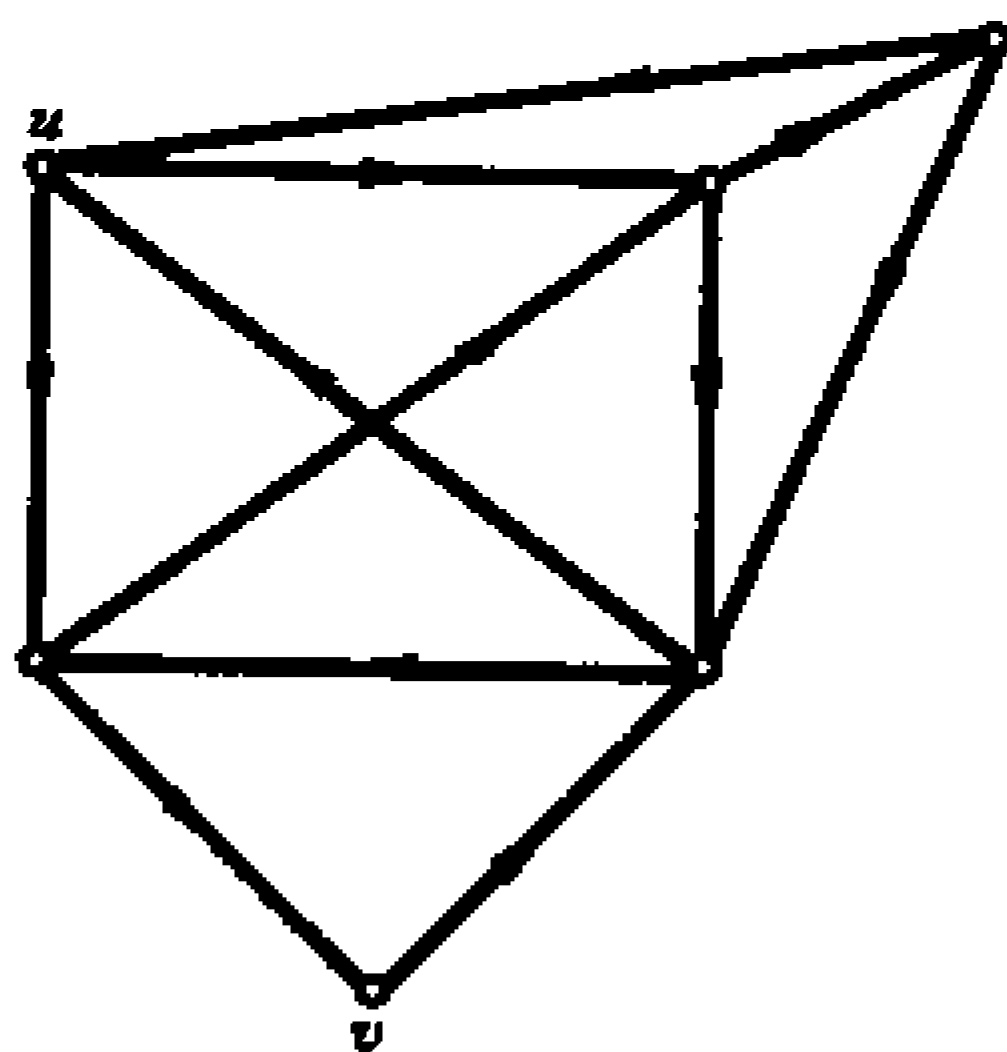


图 12.3-1

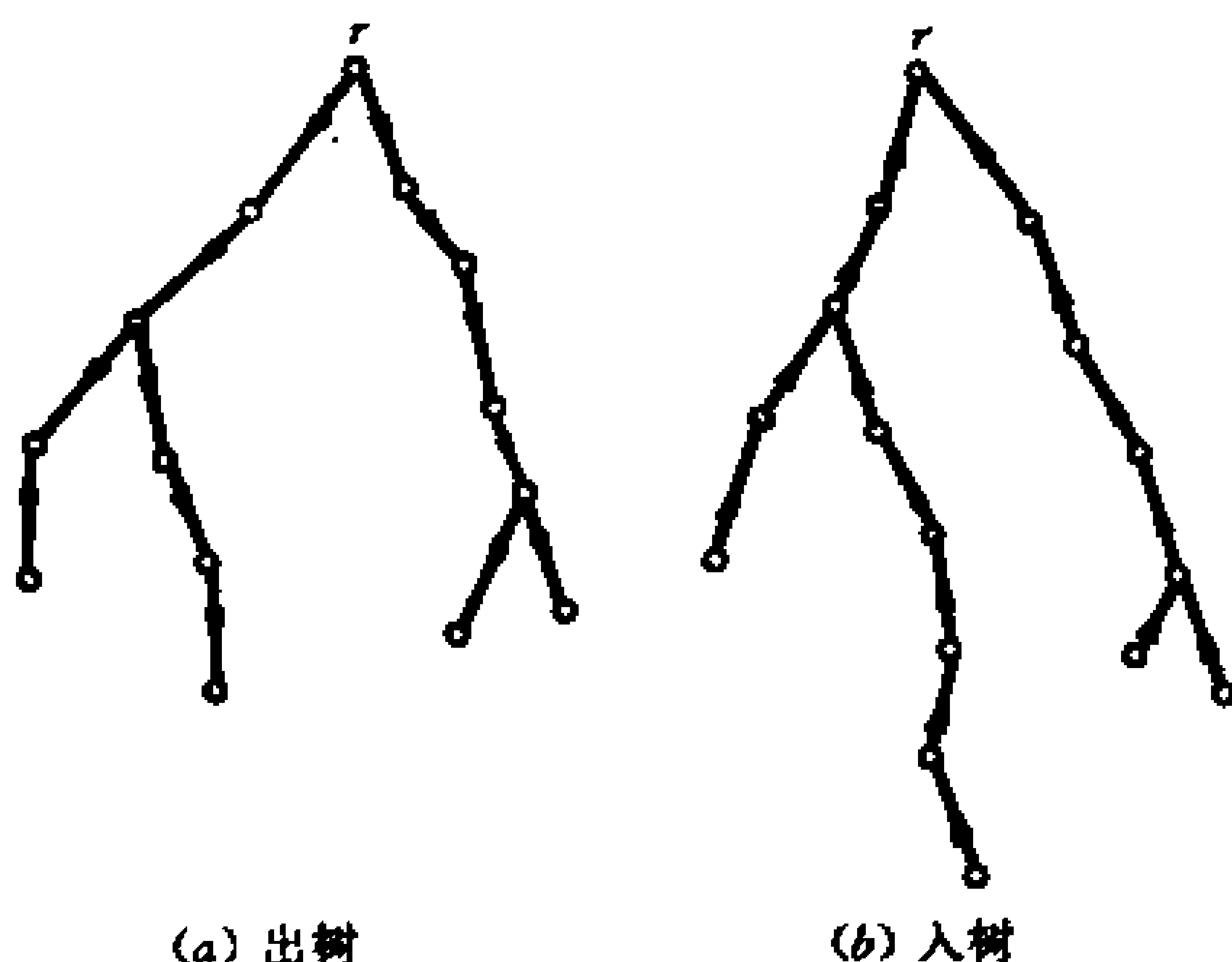
图 12.3-1 所示的有向图中，顶点 u，v 均为根。

定理 12.3.1 有向图 D 有根当且仅当对 D 的每一对顶点 u，v 都存在一个顶点 w，使 w 可达 u 和 v。

［证明］ 由根的定义，必要性是显然的。现证充分性。取顶点集 $V(D)$ 的子集 $V_2=\{v_1,v_2\}$，由假设，有顶点 u_2，由 u_2 可以到达 v_1 和 v_2。假设对子集 $V_k=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 存在一个顶点 u_k，由 u_k 可以到达 v_1，v_2，，$\cdots v_k$，那么对 u_k 和 v_{k+1}，存在一个顶点 u_{k+1}，由 u_{k+1} 可以到达 u_k 和 v_{k+1}。于是，由顶点 u_{k+1} 可以到达 $v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+1}$。由归纳法原理，$D$ 中存在一个顶点 r，由 r 可以到达 D 中任一顶点，故 D 有根。▌

定义 12.3.2 设 D 是一个有根的有向图，若 D 的基础图是一棵树，则称 D 为**有向树**(direcded tree)。

由有向树的定义知，有向树中的任一顶点 v，都有一条以根为起点，v 为终点的有向道路。因此，有向树也称为**出树**(out-tree)，如图 12.3-2(a)所示；如果把有向树的每一条弧均反向，这样得到的树称为**入树**(in-tree)，如图 12.3-2(b)所示。



(a) 出树　　　　(b) 入树

图 12.3-2

定义 12.3.3 如果有向图 D 的每一对顶点 u,v 都存在一顶点 w，使 w 可达 u 和 v，则称 D 是**拟强连通的**。

下面我们来证明关于有向树的几个等价命题。

定理 12.3.2 设 D 是顶点数 $p>1$ 的有向图。

(1) D 是没有圈的拟强连通图；

(2) D 是拟强连通的且有 $p-1$ 条弧；

(3) D 是一个有根的树；

(4) 存在一个顶点 r 使得对于其他每个顶点都有一条且仅有一条以 r 为起点的有向道路；

(5) D 是拟强连通的，但是从 D 中去掉任何一条弧都使

这个性质不成立：

(6) D 是拟强连通的，并有一个顶点 r，使得

$$\deg_D^-(r) = 0, \deg_D^+(v) = 1, \quad v \neq r$$

(7) D 没有圈，并有一个顶点 r，使得

$$\deg_D^-(r) = 0, \deg_D^+(v) = 1, \quad v \neq r$$

[证明] (1)⇒(2)。

D 连通且无圈，故 D 的基础图是一棵树，于是 D 有 $p-1$ 条弧。

(2)⇒(3)。

由(2)，D 是连通的且有 $p-1$ 条弧，故 D 的基础图是一棵树。再由(2)和定理 12.3.1 知，D 有根。

(3)⇒(4)。

由(3)，D 的根具有(4)所要求的性质。

(4)⇒(5)。

假设去掉弧 (u,v) 时，拟强连通性质不变，那么应存在两条有向道路

$$wu_1u_2\cdots u_nu \text{ 和 } wv_1v_2\cdots v_mv$$

即在 D 中有两条由 w 到 v 的有向道路，这样就有两条由 r 到 v 的有向道路，与(4)矛盾。

(5)⇒(6)。

由定理 12.3.1，有向图 D 是拟强连通的，所以它有一个根 r，于是

$$\deg_D^-(v) \geq 1, \; v \neq r$$

如果顶点 v 满足 $\deg_D^-(v) > 1$，则有两条不同的以 v 为终点的弧 a 和 b，于是由 r 到 v 有两条不同的有向道路，去掉弧 a，D 仍以 r 为根，因而保持拟强连通性，与(5)矛盾。故必有

$$\deg_D^-(v) = 1, \; v \neq r$$

另外，不可能有一条以 r 为终点的弧。因为在 D 中把这条弧去掉后得到的图，仍以 r 为根。故仍为拟强连通，此与(5)矛盾。

(6)⇒(7)。

D 中的弧数等于

$$\sum_{i=1}^{p} \deg_D^-(u_i) = p - 1$$

因为 D 是连通的并有 $p-1$ 条弧，所以是一棵树，因而没有圈。

(7)⇒(1)。

从顶点 $u \neq r$ 出发，在图上沿弧的反方向行走，因为 D 没有圈，故没有顶点被经过两次。当经过顶点 $v \neq r$ 时，因为 $\deg_D^-(v)=1$，故可继续行走。最后只能在顶点 r 停止，所以 r 是根，D 则是拟强连通的。▌

推论 12.3.1 当且仅当 D 是拟强连通时，D 才有有向生成树。

［证明］ 如果 D 不是拟强连通的，那么 D 没有生成子图是一棵有向树。

反之，如果 D 是拟强连通的，我们可以逐次删去所有的不破坏拟强连通性的弧，当不存在这种弧时，由定理 12.3.2 的(5)，所得到的子图就是所要求的有向生成树。▌

定义 12.3.4 在有向树中，出度为零的顶点称为叶(leafage)，其他顶点称为**分枝顶点**(branch vertex)。由根到某一顶点 v 的道路的长，称为顶点 v 的**层数**(level)。

图 12.3-3 表示一个有七个顶点的有向树。v_0 是它的根，顶点 v_1，v_2 的层数为 1，顶点 v_3，v_4，v_5 的层数为 2，顶点 v_6 的层数为 3，顶点 v_1，v_3，v_4 和 v_6 是叶，v_2，v_5 是分枝顶点。

一棵有向树的画法是多种多样的。图 12.3-4 中的(a)和(b)是图 12.3-3 所示的有向树的另外两种画法，图 12.3-3 是按自然生长情况画的，但是在实际应用中，绝大多数有向树是以根在上面，叶在下面的方式画出的(如图 12.3-4(a)，(b)所画的那样)。

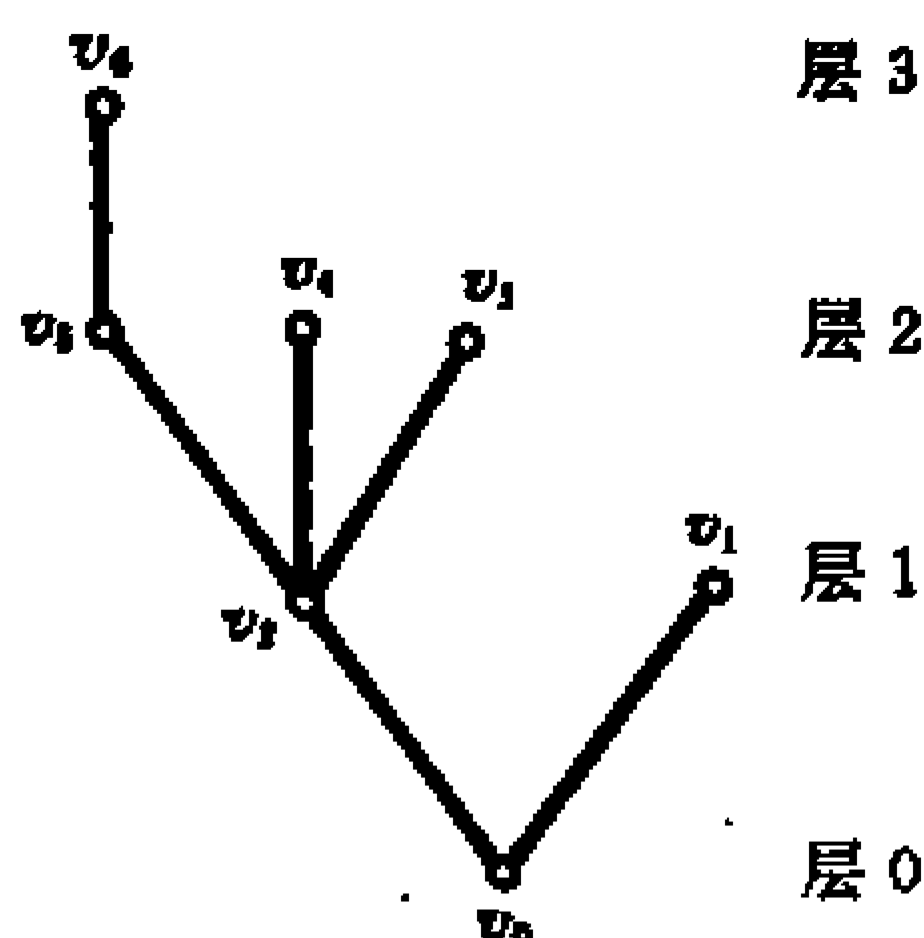


图 12.3-3

在上面我们讨论的有向树中，没有考虑同一层数上的顶点次序。例如图 12.3-4 中，(a)，(b)所表示的有向树是相同的，但是在有些具体问题中(譬如编码理论和计算机程序)常常要考虑同一层上的顶点的次序。

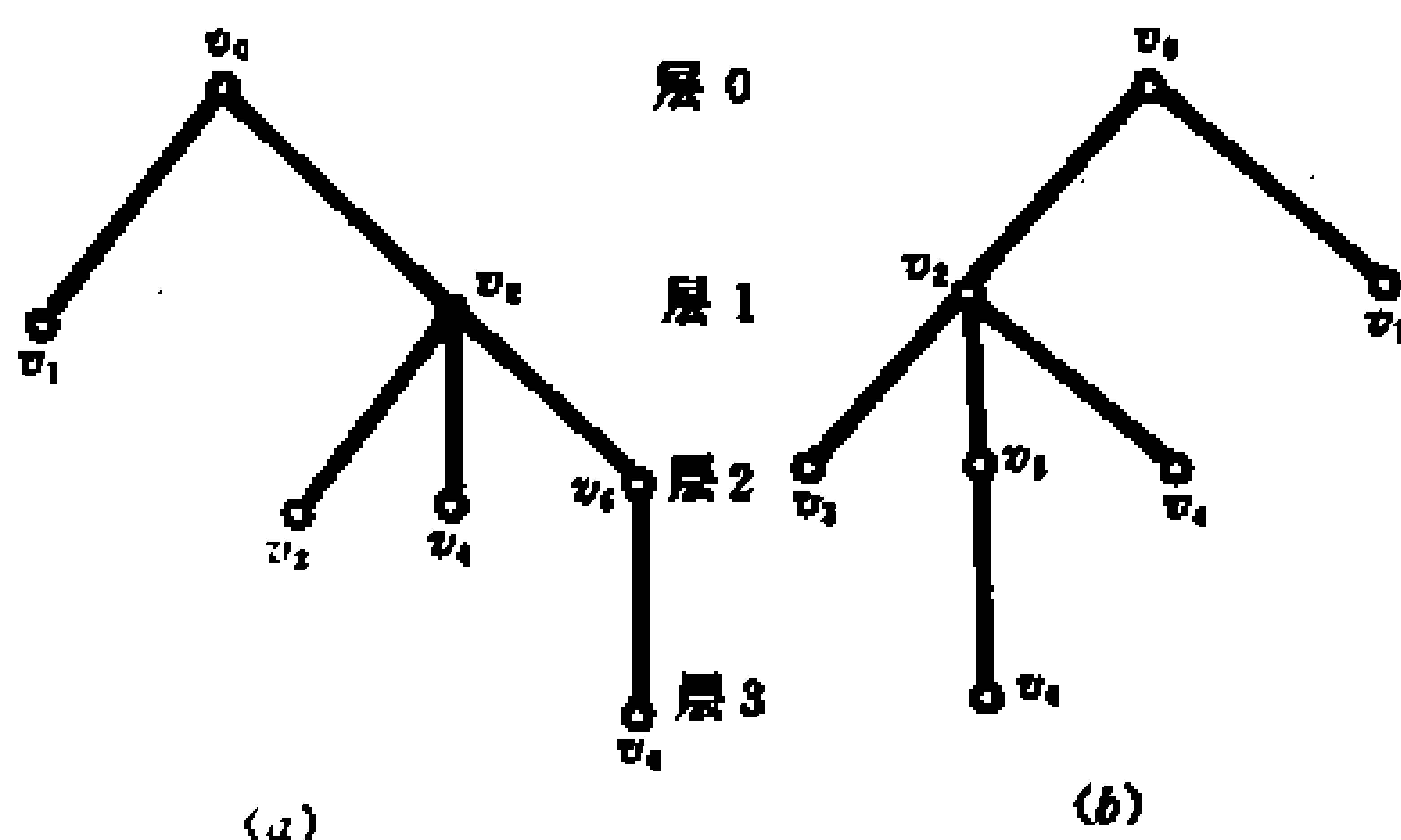


图 12.3-4

定义 12.3.5 如果在有向树中规定了每一层上的顶点的次序，这样的有向树，称为**有序树**(ordered tree)。

一般地，在画出的有序树中，规定同一层数的顶点的次序

为从左到右。我们也可以规定用边的次序来代替顶点的次序。图 12.3-4(*a*),(*b*)是两棵不同的有序树。

下面我们给出用有序树表示一个加括号的代数式的例子。

例如代数式

$$v_1v_2+v_3(v_4+\frac{v_5}{v_6})$$

可以用有序树(图 12.3-5)表示。

树中的叶表示参加运算的元素,分枝顶点表示相应的运算。运算的次序是先左后右,自下而上。在分枝顶点上的运算指示,只有在其左右子树均已变成数或式子时才能进行。用有序树表示算术表达式的方法,在书写机器指令的编译程序时是很有用的。

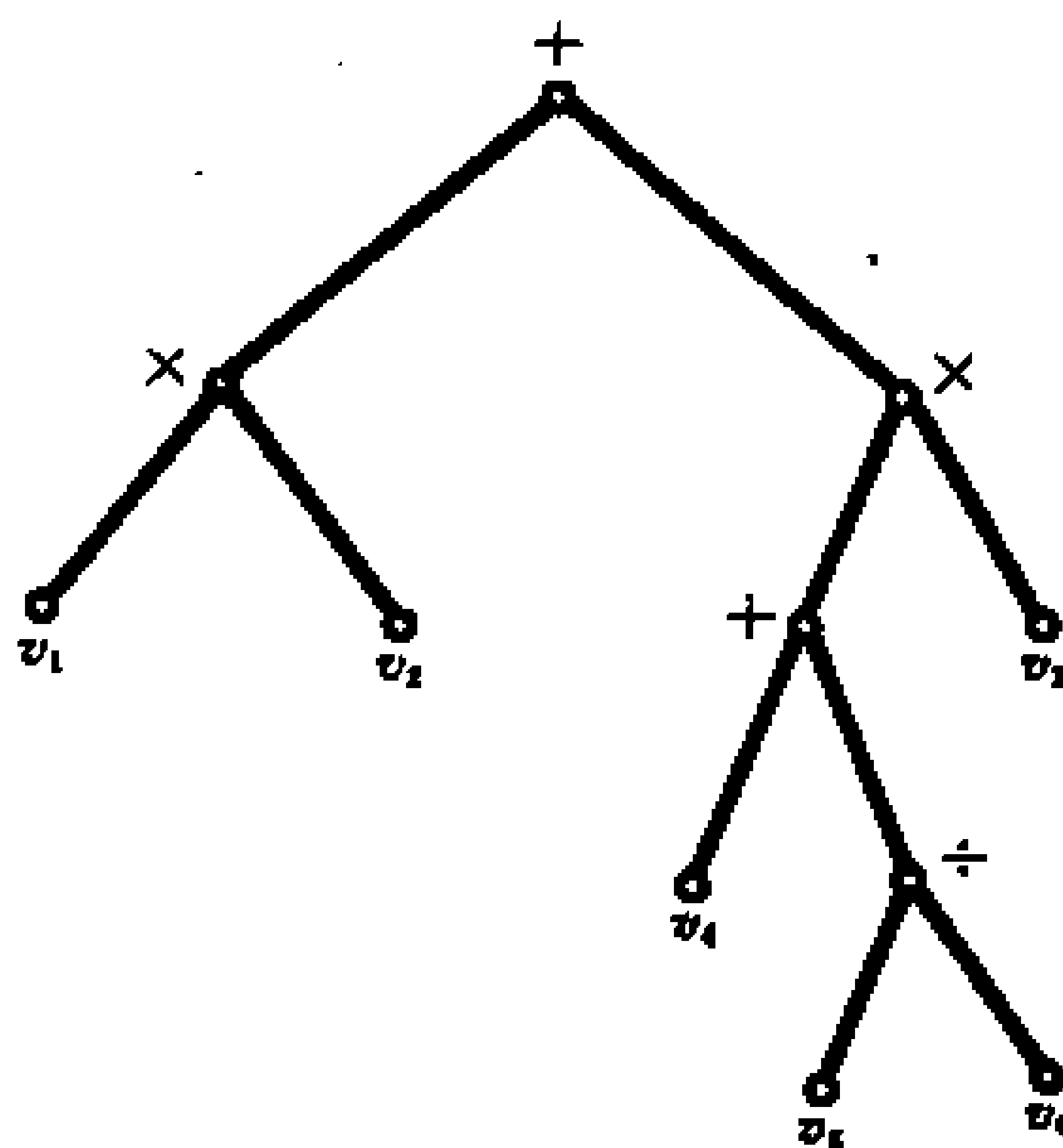


图 12.3-5

定义 12.3.6 如果在有向树(或有序树)中,每个顶点 v,有 $\deg^+(v)\leqslant m$ 则称这个有向树(或有序数)为 m 元有向树(或 m 元有序树);如果对每个顶点 v,有

$$\deg^+(v)=m \text{ 或 } \deg^+(v)=0$$

则称这个有向树(或有序树)为完全 m 元有向树(或完全 m 元有序树)。

例如图 12.3-6(*a*)所示的是三元有序树,图 12.3-6(*b*)所

示的是完全二元有序树。完全二元有序树又称为**二叉树**(binarg tree)。

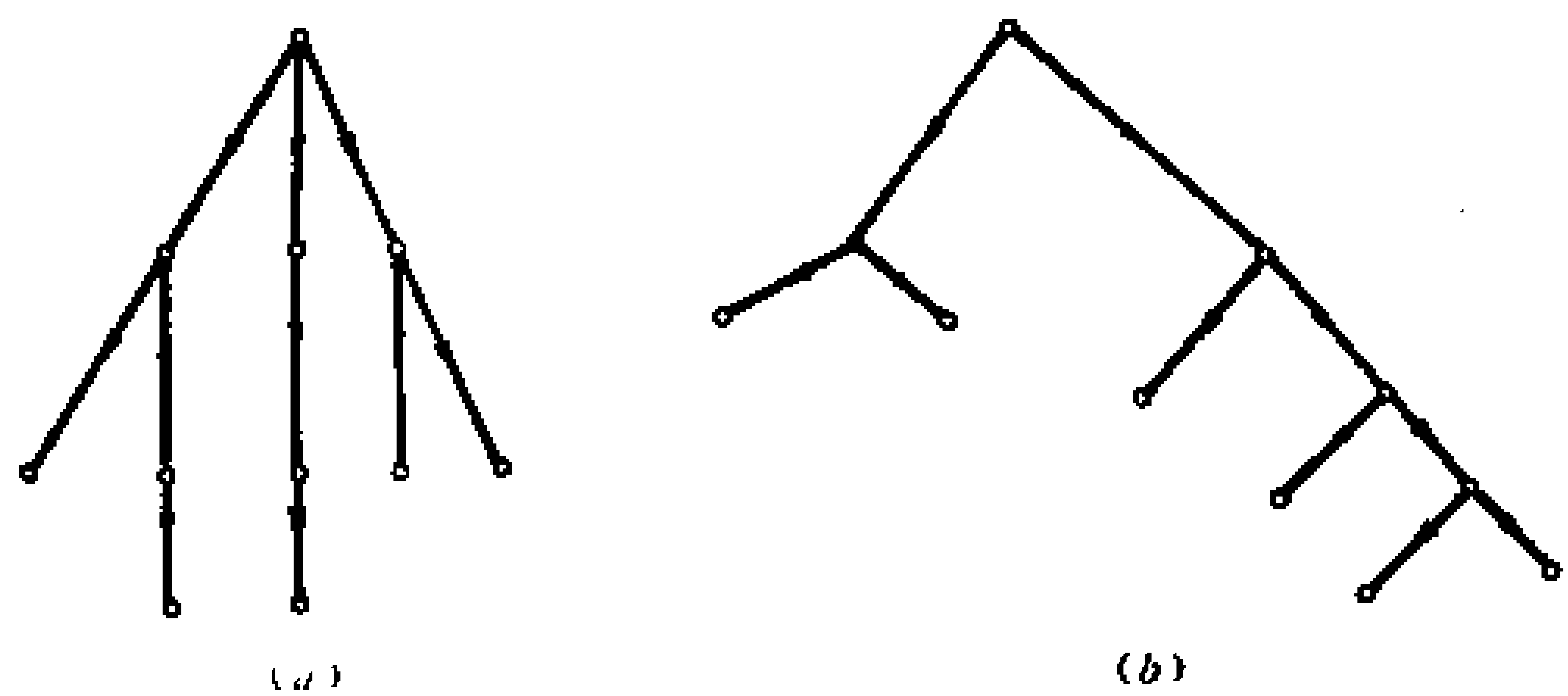


图 12.3-6

在定位二元有序树中，每个顶点可由数字 0,1 编码表示，根不编号。层一上的顶点用 1 位数字编号，左为 0 右为 1；层二上的顶点用 2 位数字编号，由左到右为 00，01，10，11；层三上的顶点用 3 位数字编号，由左到右为 000,001,010,011,100,110,111，如此等等。对应于树的叶的编码集组成一个前缀编码。例如图 12.3-7 的树，它的前缀编码为{000,001,01,10,110,111}。不同的定位二元有序树对应不同的前缀编码。这种表示方法是便于电子计算机的存储方式。

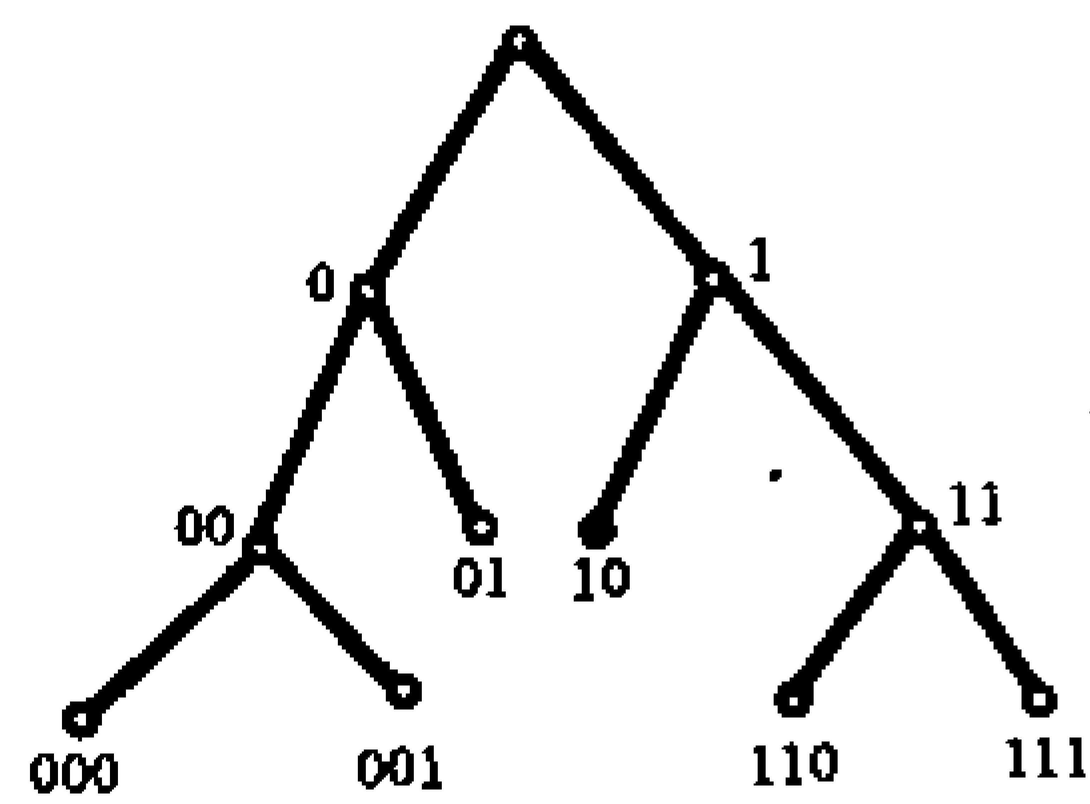


图 12.3-7

习题十二

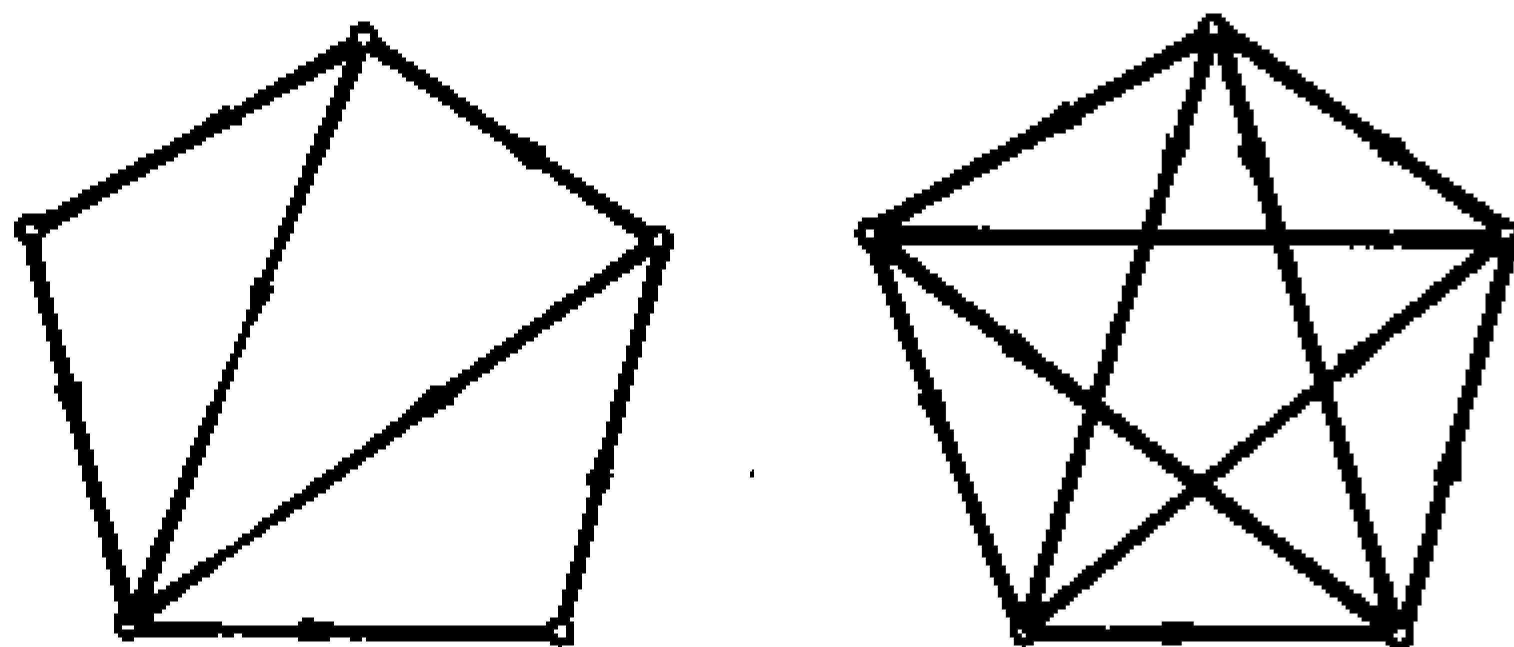
12-1　证明定理 12.2.4。

12-2　设 D 为一有向连通图，对任意的 $v \in V(D)$，均有 $\deg^{+}(v) = \deg^{-}(v)$，则 D 有一有向道路。

12-3　如果在有向图 D 中，存在一条通过 D 的所有弧的有向闭链，则称该有向闭链为**有向欧拉链**。存在有向欧拉链的有向图，称为**有向欧拉图**。证明：有向图 D 为有向欧拉图当且仅当 D 中任一顶点的出度和入度相等。

12-4　证明：有向欧拉图的基础图必为无向欧拉图，但反之则不一定。

12-5　下列各图是否是有向欧拉图？若是，作出它们的有向欧拉链。

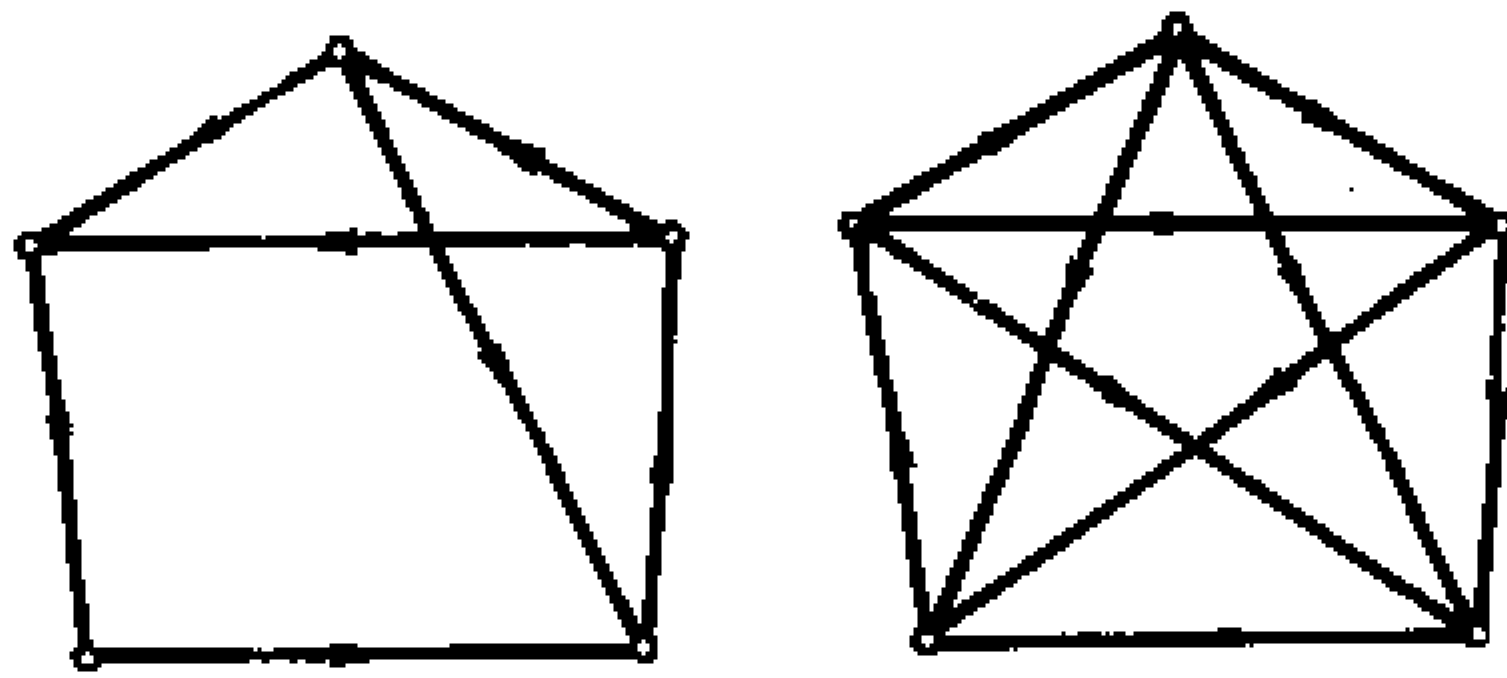


题 12-5 图

12-6　判断下列各图有无有向圈。

12-7　设 D 是不含有有向圈的有向图，证明：D 的顶点的最小入度为零。

12-8　有向图 D 中，若不含环，且有相同端点的两条弧没有一对是同向的，称 D 严格的有向图。证明：若 D 是严格的有向图，则 D 含有长度不小于 $\max\{\delta^{-}, \delta^{+}\}$ 的有向道路（其中 δ^{-}, δ^{+} 分别表示 D 的最小入度和最小出度）。



题 12-6 图

12-9 若 D 是严格有向图，且 $\max\{\delta^-,\delta^+\}=k>0$，证明：$D$ 中含有长度不小于 $k+1$ 的有向圈。

12-10 证明 G 有一个定向 D，它的每一条有向道路的长均不大于 Δ（Δ：最大度）。

12-11 如果 $V(D)$ 中每一个非空真子集 S，均有 $|(S,\bar{S})|\geq k$，则称非平凡有向图 D 是 k 弧连通的。证明：非平凡有向图 D 是双向连通的充要条件是它是 1 弧连通的。

12-12 画出一个连通无根的有向树。

12-13 画出表示公式 $y=3\ln(x+1)-a/x^2$ 的树。

第十三章　有向图的矩阵表示

第六章我们讨论了无向图的矩阵表示，这一章讨论有向图的矩阵表示。有向图的矩阵表示与无向图的矩阵表示有许多类似之处。因此，在这一章中，有些内容的讨论要简略些，而着重指出有向图矩阵表示与无向图矩阵表示的不同之处。

本章考虑的图是连通的简单图。

13.1　关联矩阵

定义 13.1.1　设 D 是有 p 个顶点，q 条弧的有向图。令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若弧 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联，且 } i \text{ 是弧 } j \text{ 的起点；}\\ -1, & \text{若弧 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联，且 } i \text{ 是弧 } j \text{ 的终点；}\\ 0, & \text{若弧 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 不关联，}\end{cases}$$

则称由元素 $m_{ij}(i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,q)$ 构成的 $p\times q$ 矩阵为有向图 D 的**完全关联矩阵**，记作 M_e。

从 M_e 中去掉一行，且秩为 $p-1$ 的矩阵，称为 D 的**关联矩阵**，记作 M。

例 13.1.1　求如图 13.1-1 所示的有向图 D 的完全关联矩阵。

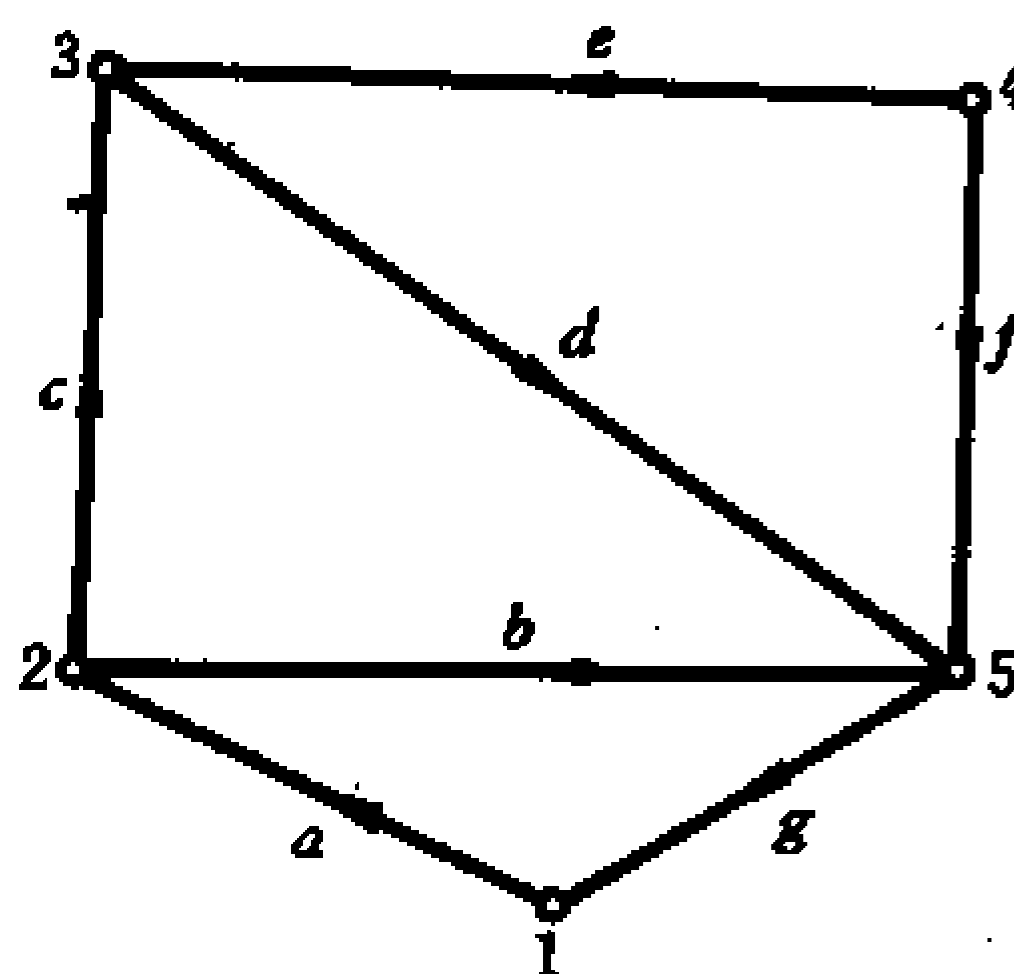


图 13.1-1

D 的完全关联矩阵是

$$M_e = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

D 的关联矩阵是

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

顶点 5 为参考点。

定理 13.1.1 设有向图 D 有 p 个顶点，那么 D 的完全关联矩阵 M_e 的秩是 $p-1$。

这个定理可以仿照定理 6.1.3 来证明。只是在这里，我们把矩阵的元素看成是在实数域中，即向量对应元素的加法是普通实数的加法。

和定理 6.1.4 类似，我们有下面的定理。

定理 13.1.2 p 阶有向连通图 D 的关联矩阵 M 的一个大子阵是非奇异的充要条件为此大子阵的列对应 D 的一棵生成树的树枝。

有向图的关联矩阵的非奇异大子阵还具有下面的性质：

定理 13.1.3 设 M_1 是有向图 D 的关联矩阵的一个非奇异大子阵，那么 M_1 的行列式的值为 1 或 -1。

［证明］ 由假设 M_1 中至少有一列仅有一个非零元素。

假如不然，M_1 的每一列均有两个非零元素，则一个为 1，另一个为 -1。把 M_1 的前 $p-2$ 行都加到最后一行，那么最后一行的元素均为零. 这与 M_1 是非奇异的假设矛盾。设 M_1 中第 k 列的元素除 $m_{ik}=\pm 1$ 外，其余的元素均为零。把 $|M_1|$ 按第 k 列展开，有

$$|M_1| = \pm (-1)^{i+k}|M_{ik}| \tag{13.1-1}$$

其中 $|M_{ik}|$ 是 $|M_1|$ 中 m_{ik} 的余子式。子阵 M_{ik} 至少有一列仅有一个非零元素. 否则可以推出 $|M_{ik}|=0$，从而由(13.1-1)，有 $|M_1|=0$，这与假设矛盾。

设 M_{ik} 中第 s 列除第 r 行的元素为 1 或 -1，其余元素均为零，则有

$$|M_1| = \pm (-1)^{i+k}(\pm 1)(-1)^{r+s}|M_{ik,rs}|$$

其中 $|M_{ik,rs}|$ 是 $|M_{ik}|$ 中元素 m_{rs} 的余子式。依此类推，可知 $|M_1|=\pm 1$。▌

在第六章中，我们曾经讨论过利用无向图的关联矩阵求一个图的生成树。下面我们来求出一个图的全部互异生成树的数目公式。

毕内-柯西定理 设 P,Q 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵 $m<n$，则乘积 PQ 的行列式是 P 和 Q 的所有对应的大行列式乘积的和，即

$$\det(PQ) = \sum(P\text{ 和 }Q\text{ 对应大行列式的乘积})$$

这里所谓的 P 和 Q 对应大行列式分别是由 P 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列和 Q 的 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行组成，即若取 P 的大行列式为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列，则 Q 的对应大行列式为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行。

毕内-柯西定理证明从略。下面举一个例子。

设

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

P 和 Q 对应的大行列式分别是

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix}1 & -1\\2 & -3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix}2 & -3\\0 & 1\end{vmatrix}$$

由毕内-柯西定理，有

$$\det(PQ) = \begin{vmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & -3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & -3\\0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1) + 4 \times 1 + 11 \times 2 = 27$$

定理 13.1.4 连通图 D 的全部生成树的数目是

$$\det(MM^T)$$

其中 M 为 D 的关联矩阵。

［证明］ 显然，关联矩阵 M 满足毕内-柯西定理的条件，故由毕内-柯西定理有

$$\det(MM^T) = \sum(M \text{ 和 } M^T \text{ 的对应大行列式乘积}) \tag{13.1-2}$$

因为当且仅当 M 的大子阵的列对应 D 的一棵生成树时，此大子阵才是非奇异的。再由定理 13.1.3 知，M 的非奇异大子阵的行列式的值为 1 或 -1，于是由(13.1-2)式，有

$$\det(MM^T) = \sum_{\text{全部生成树}}(1)$$

$$= \text{生成树的数目。}$$ ∎

例 13.1-2 求图 13.1-2 所示的有向图的生成树的数目。

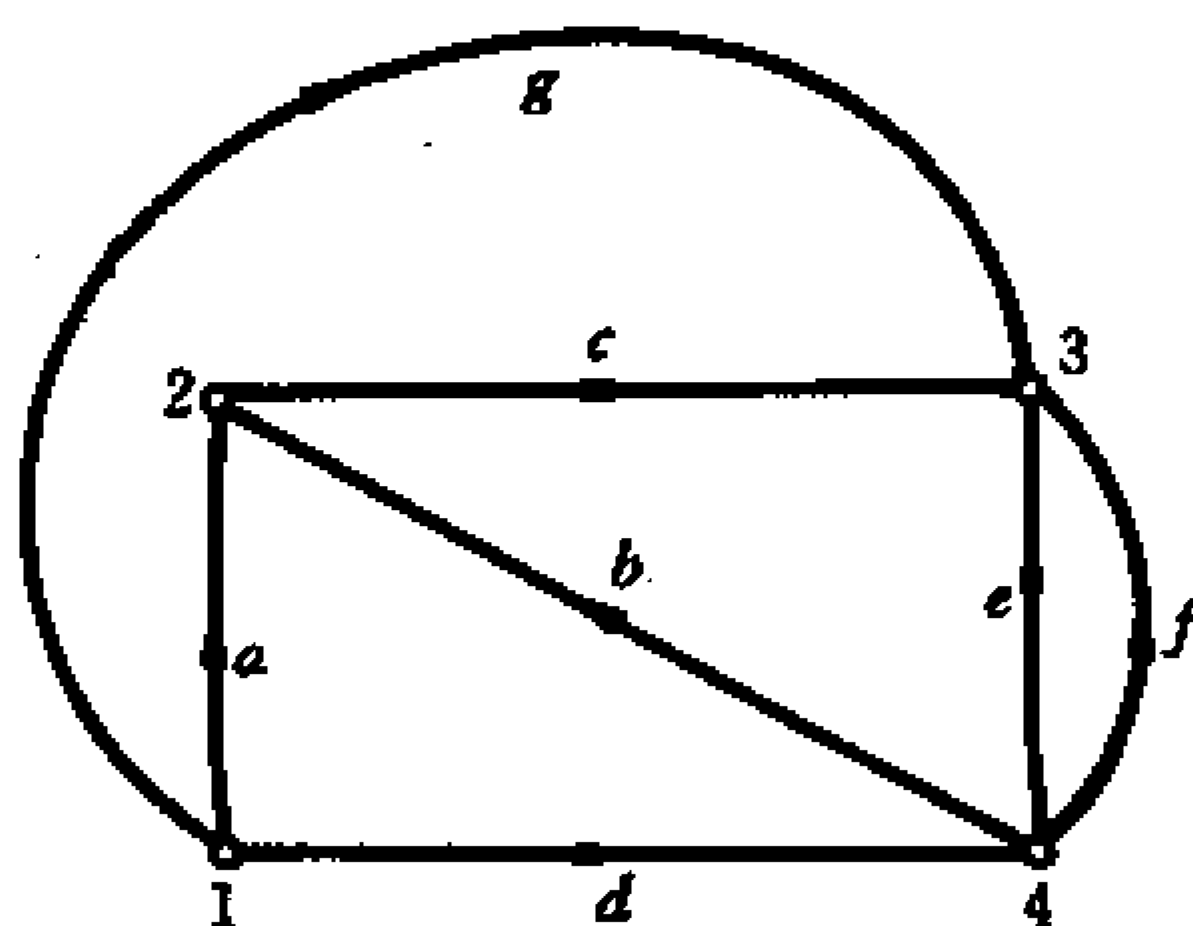


图 13.1-2

D 的关联矩阵是

$$M=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]\end{array}$$

而

$$MM^T=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

于是

$$\det(MM^T)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=24$$

顺便指出，图 13.1-2 所示的基础图的生成树的数目也是 24。因此，对无向图 G 来说，只要对 G 任意定向，再利用定理 13.1.4。使可求出 G 的生成树的数目。

13.2 圈 矩 阵

有向图的环路是指和它对应的基础图的环路再加上一个方向，直观上，有向图的环路可以用一个箭头来表示。有向图环路的方向可以根据需要任意选择。

定义 13.2.1 设 D 是一个有 p 个顶点，q 条弧的有向图。令

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{若弧 } j \text{ 在第 } i \text{ 个环路中，且弧的方向与环路的方向一致；} \\ -1, & \text{若弧 } j \text{ 在第 } i \text{ 个环路中，且弧的方向与环路的方向相反；} \\ 0, & \text{若弧 } j \text{ 不在环路 } i \text{ 中，} \end{cases}$$

则称由元素 $b_{ij}(i=1,2,\cdots,2^{q-p+1}-1;j=1,2,\cdots,q)$ 构成的

$(2^{q-p+1}-1)\times q$ 矩阵为有向图 D 的**完全圈矩阵**，记作 B_e。完全圈矩阵 B_e 的一个秩为 $q-p+1$ 的 $(q-p+1)\times q$ 矩阵称为 D 的**圈矩阵**，记作 B。

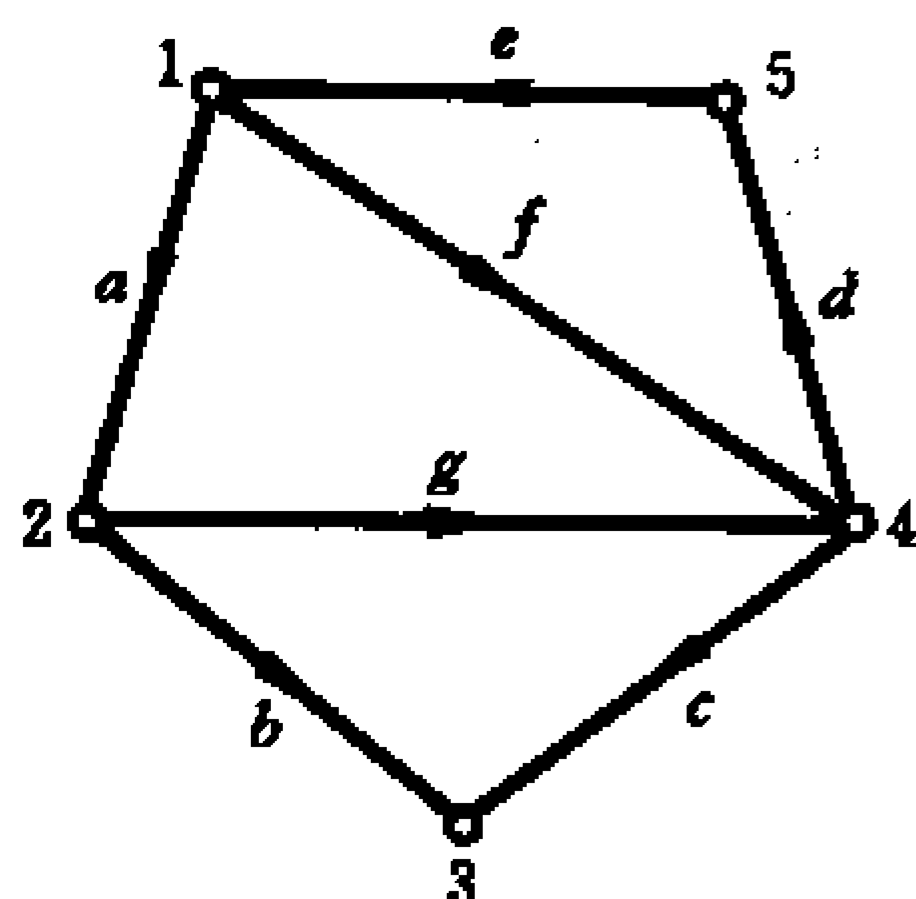
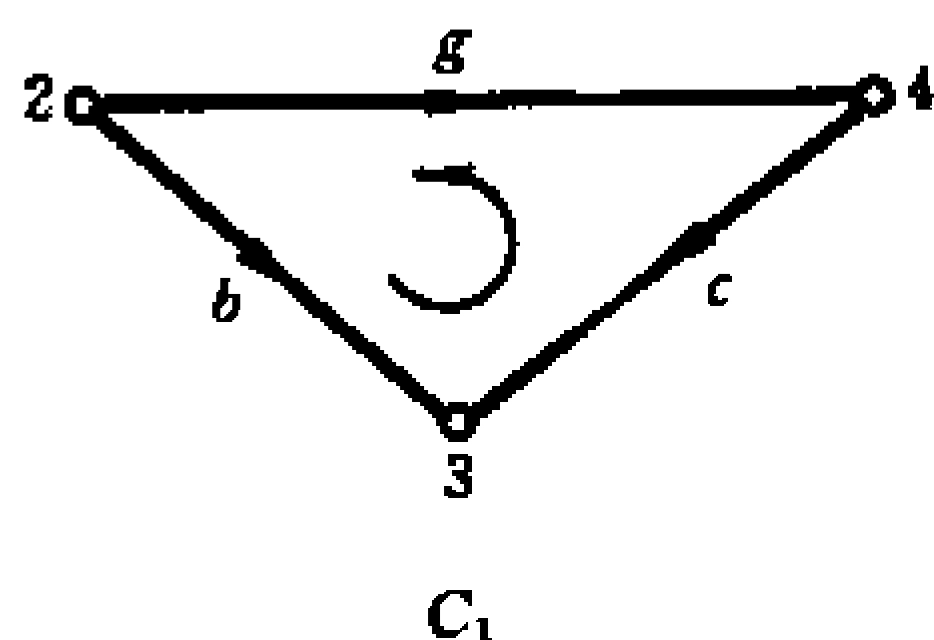
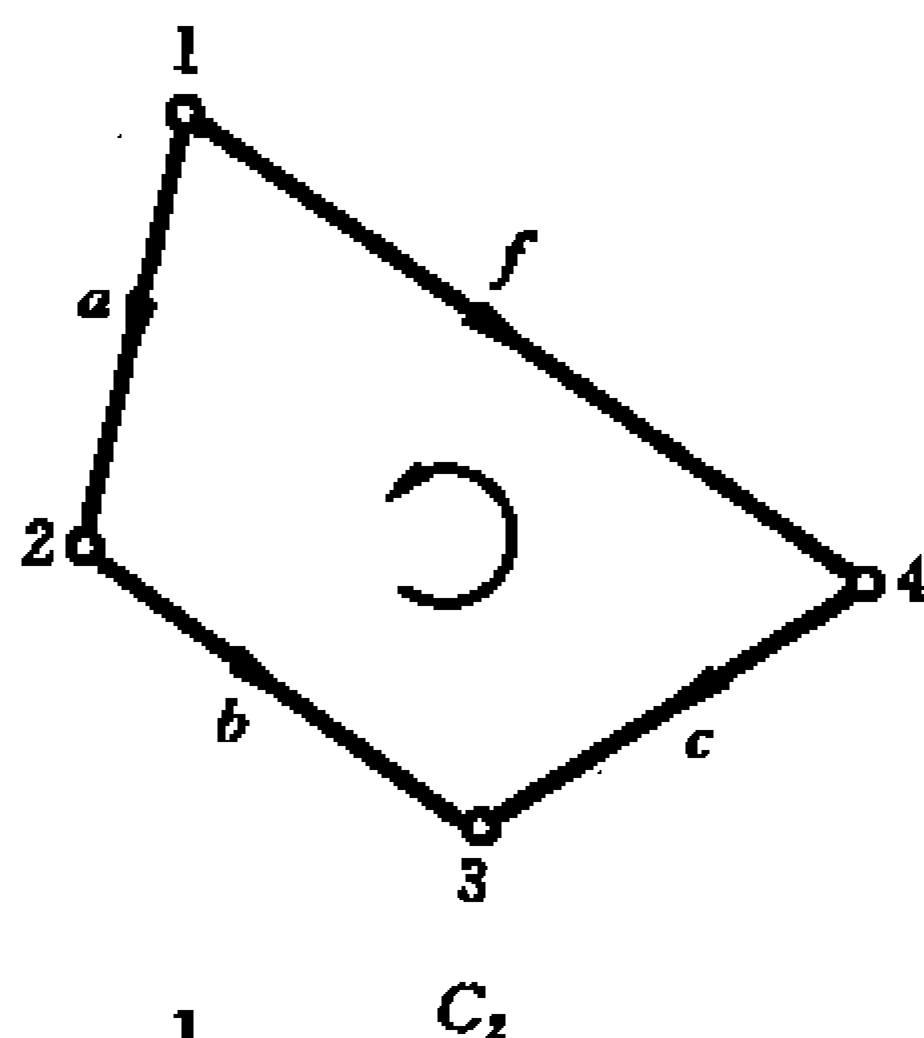


图 13.2-1

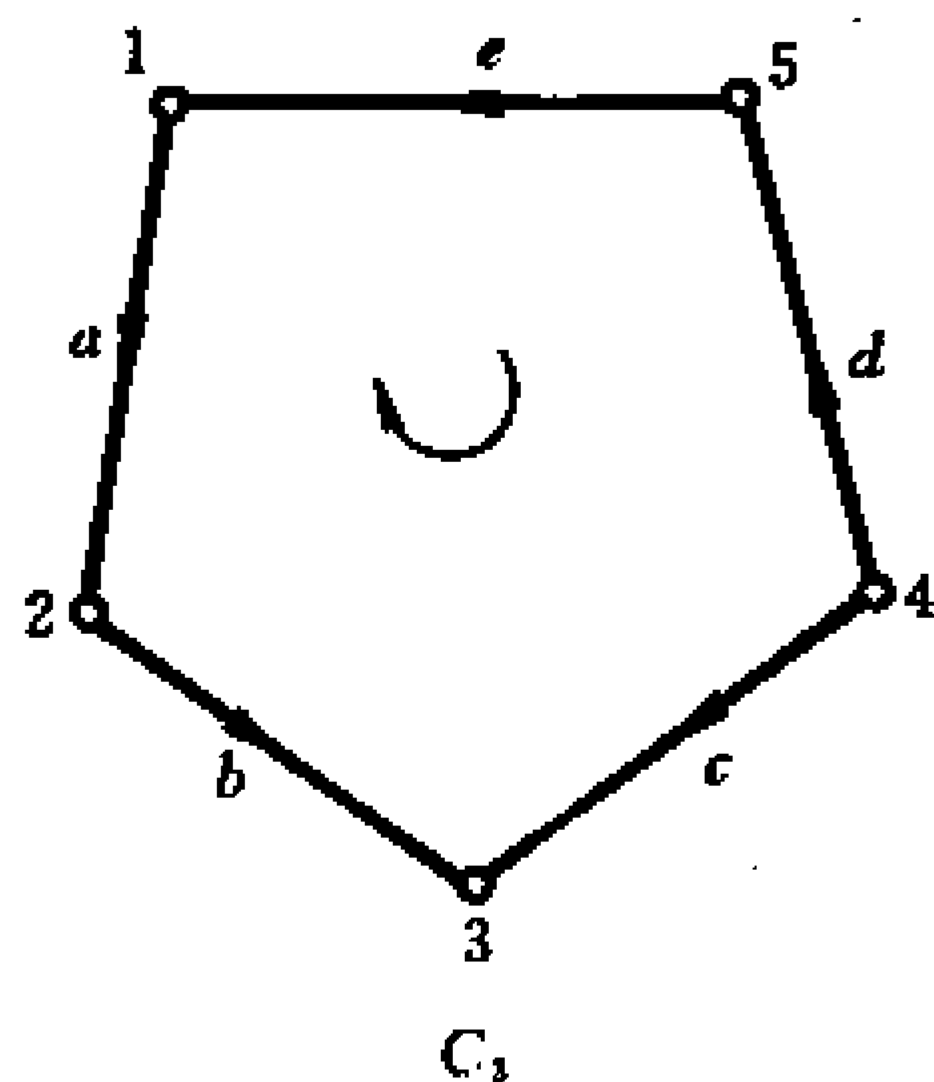
例 13.2.1 图 13.2-1 所示的有向图 D，D 的所有圈和环路如图 13.2-2 所示。



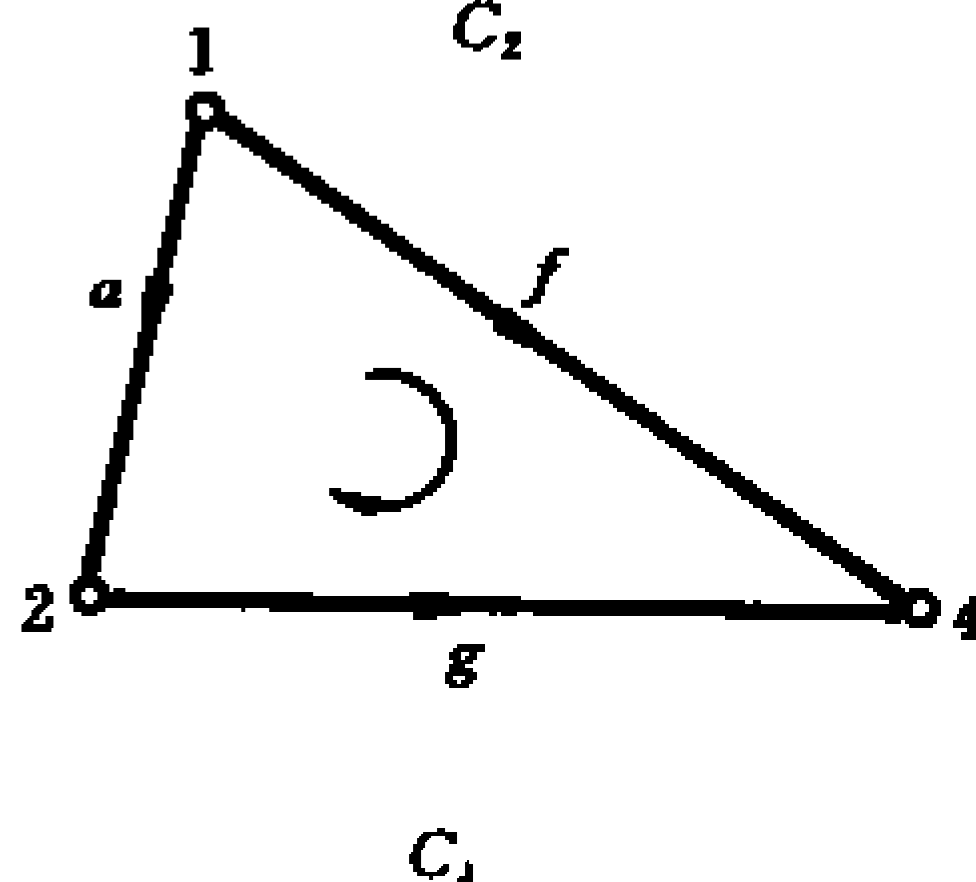
C_1



C_2



C_3



C_4

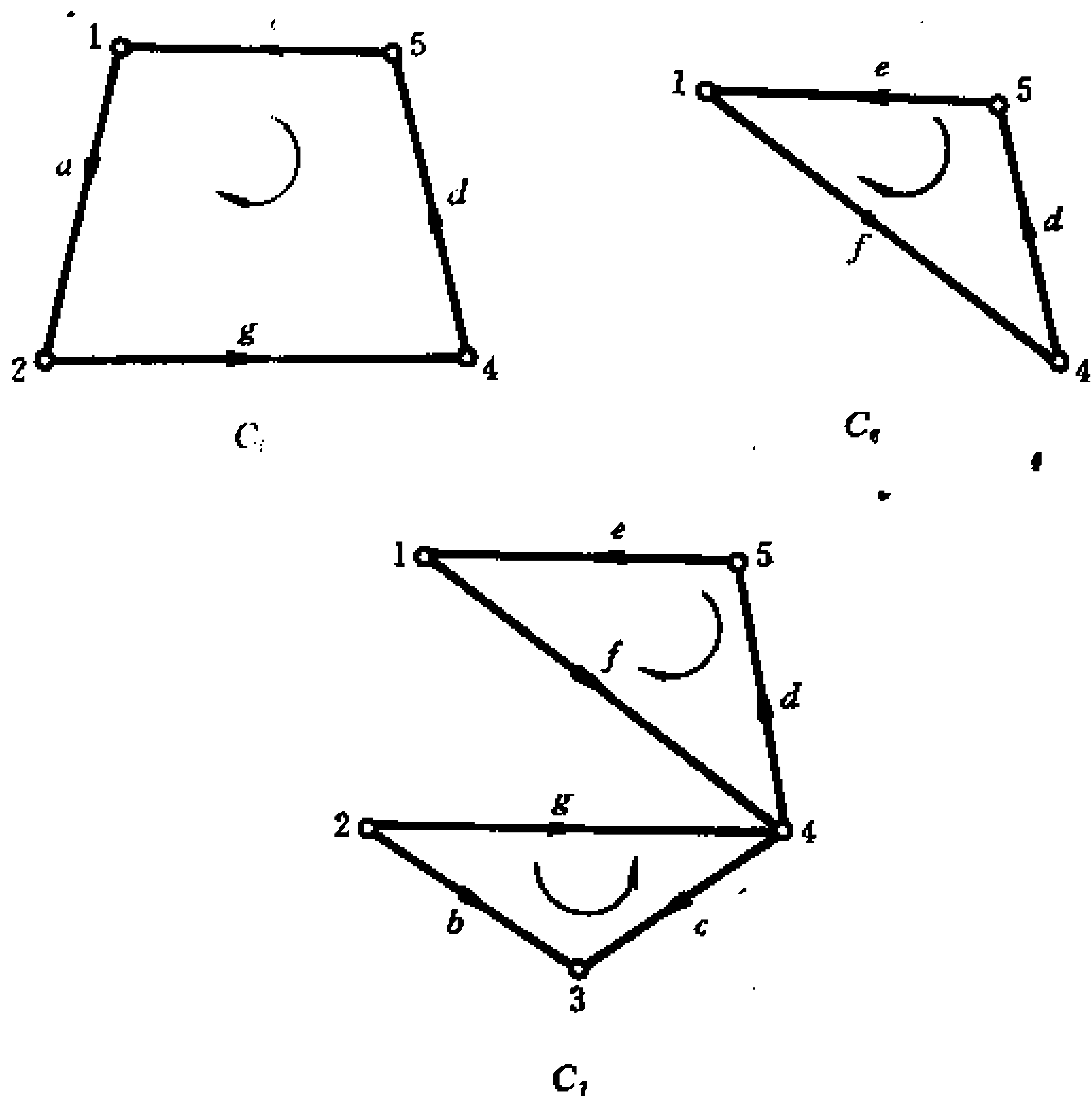


图 13. 2-2

D 的完全圈矩阵是

	a	b	c	d	e	f	g
C_1	0	1	-1	0	0	0	-1
C_2	1	1	-1	0	0	-1	0
C_3	-1	-1	1	-1	-1	0	0
C_4	-1	0	0	0	0	1	-1
C_5	-1	0	0	-1	-1	0	-1
C_6	0	0	0	-1	-1	-1	0
C_7	0	1	-1	-1	-1	-1	-1

定义 13.2.2 设 D 是有 p 个顶点，q 条弧的有向连通图，T 是 D 的一棵生成树。D 的基础图关于生成树 T 的基本圈再加上该圈的方向，叫做 D 的**基本圈**。由 D 的 $q-p+1$ 个基本圈为行，q 条弧为列构成的 $(q-p+1)\times q$ 矩阵，称为 D 的关于生成树 T 的**基本圈矩阵**，记为 B_f。

如果我们规定基本圈的方向与该基本圈所包含的连枝的方向一致，那么有向图 D 的基本圈矩阵也可以写成如下分块矩阵的形式：

$$B_f = [I \quad B_{f12}]$$

例如图 13.2-1 所示的有向图，关于生成树 $T=\{a,b,c,d\}$ 的基本圈的方向如图 13.2-3 所示。

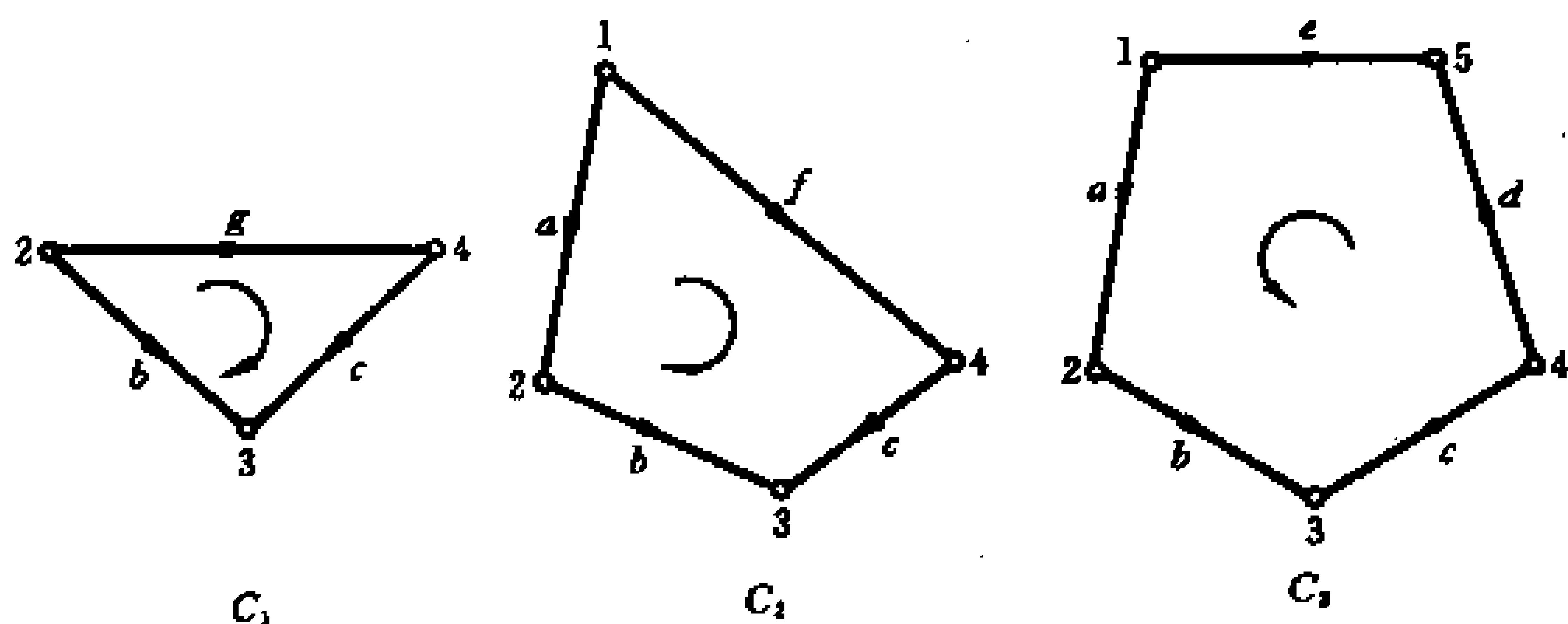


图 13.2-3

于是有向图 D 关于生成树 $T=\{a,b,c,d\}$ 的基本圈矩阵是

$$\begin{array}{c} \\ C_3 \\ C_2 \\ C_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e & f & g & a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

定理13.2.1 设 M_e 和 B_e 分别是有向图 D 的完全关联矩阵和完全圈矩阵，如果它们的列按相同的弧的次序排列，那么

$$M_e B_e^T = 0, \quad B_e M_e^T = 0 \tag{13.2-1}$$

[证明] 和定理 6.4.2 的证明一样，把 M_e 和 B_e 按行分块，再由分块矩阵的乘法知 $M_e B_e^T$ 中第 i 行和第 j 列的元素是

$$M_i B_j^T = \sum_{k=1}^{q} m_{ik} b_{jk} \tag{13.2-2}$$

当弧 k 与顶点 i 关联且在环路 j 中(因而顶点 i 在环路 j 中)时，$m_{ik} b_{jk} \neq 0$. 顶点 i 在环路 j 中的度为偶数。如果有两条弧 r,s 与顶点 i 关联，那么在 M_e 的第 i 行中含有两个非零元素 m_{ir} 和 m_{is}，而在 B_e 中第 j 行的对应元素是 b_{jr} 和 b_{js}，式(13.2-2)中其余的项为零。于是

$$M_i B_j^T = m_{ir} b_{jr} + m_{is} b_{js} \tag{13.2-3}$$

利用穷举法不难证明式(13.2-3)为零。因为环路 j 中的两条弧 r,s 与顶点 i 关联情况有下列八种(图 13.2-4)：

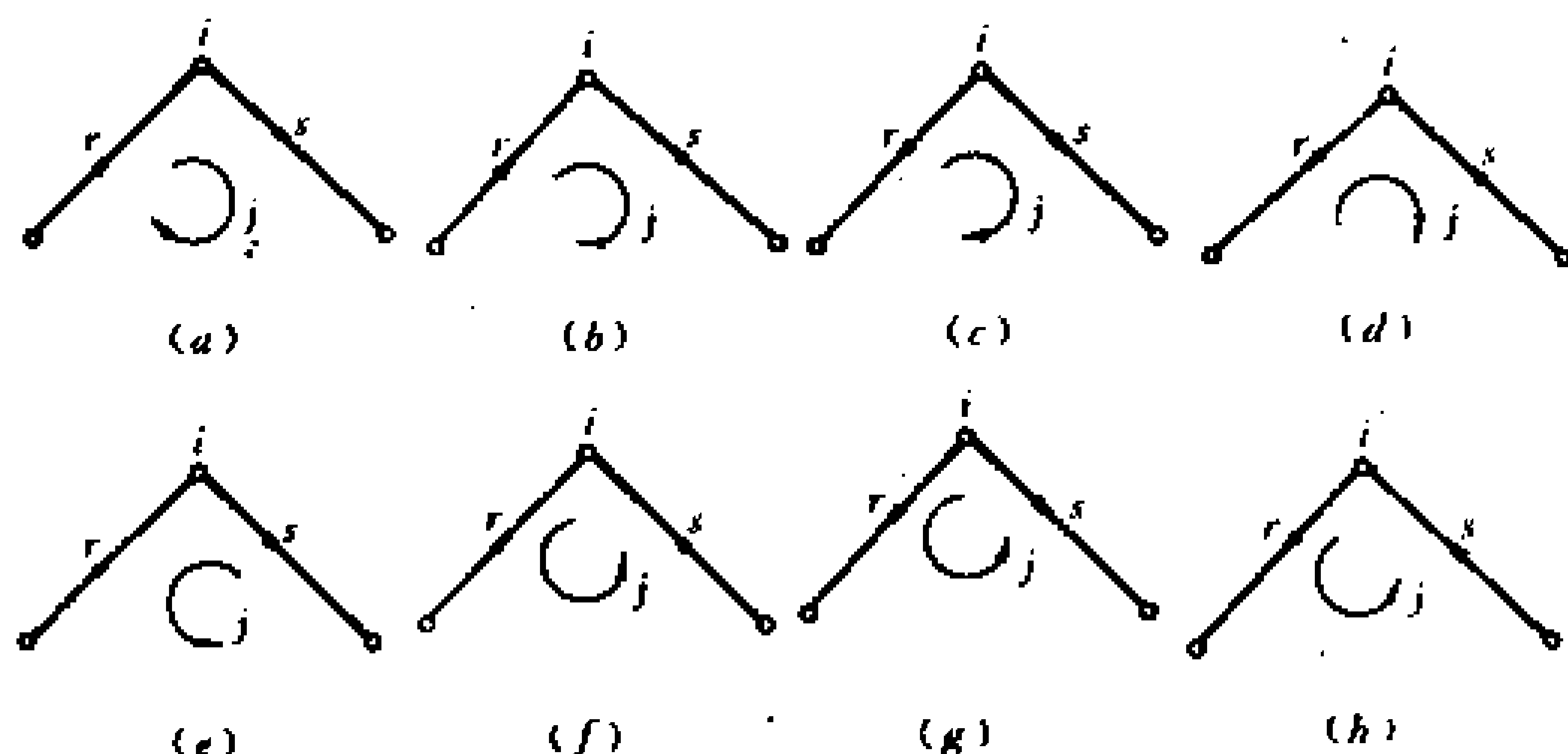


图 13.2-4

对图13.2-4(a)所示的情况：$m_{ir}=-1$，$m_{is}=1$，$b_{jr}=1$，$b_{js}=1$，故有

$$M_iB_j^T=0$$

同样可以证明其余七种情况。如果和顶点关联的有$2l$条弧，则有

$$M_iB_j^T=m_{ir_1}b_{jr_1}+m_{ir_2}b_{jr_2}+\cdots+m_{ir_{2l-1}}b_{jr_{2l-1}}+m_{ir_{2l}}b_{jr_{2l}}$$

$$=(m_{ir_1}b_{jr_1}+m_{ir_2}b_{jr_2})+\cdots+(m_{ir_{2l-1}}b_{jr_{2l-1}}+m_{ir_{2l}}b_{jr_{2l}})$$

由上面的证明可知，上式右端每个括号内的和均为零，所以

$$M_iB_j^T=0$$

于是矩阵$M_eB_e^T$的元素均为零，即

$$M_eB_e^T=0$$

又

$$M_eB_e^T=(M_eB_e^T)^T=0 \qquad ■$$

定理13.2.2 有p个顶点，q条弧的有向连通图D的完全圈矩阵的秩是$q-p+1$。

［证明］ 根据线性代数中的席勒维斯特(Sylvester)定理：设$P=P_{n\times s}$，$Q=Q_{s\times m}$；如果$PQ=0$，则有

$$P\text{的秩}+Q\text{的秩}\leqslant s$$

不难得出定理13.2.2的结论。

因为M_e是$p\times q$矩阵，B_e^T是$q\times(2^{q-p+1}-1)$矩阵，且有$M_eB_e^T=0$。由席勒维斯特定理，有

$$M_e\text{的秩}+B_e^T\text{秩}\leqslant q$$

而M_e的秩是$p-1$，故

$$B_e^T\text{的秩}\leqslant q-p+1$$

即B_e的秩$\leqslant q-p+1$。

又基本圈矩阵是完全圈矩阵的子矩阵，而基本圈矩阵的

秩是 $q-p+1$，所以

$$B_e \text{ 的秩} \geqslant q-p+1$$

于是

$$B_e \text{ 的秩} = q-p+1 \qquad \blacksquare$$

定理 13.2.3 有向连通图 D 的圈矩阵 B 的一个大子阵是非奇异的充要条件为该大子阵的列对应某生成树的连枝。

这个定理的证明和定理 6.2.4 完全类似，只是对有向图，非奇异矩阵 C 的元素是 1，-1 和零。对矩阵中元素的运算是实数运算。

定理 13.2.4 设有向图 D 的关联矩阵和基本圈矩阵分别是

$$M = [M_{11} \quad M_{12}], \quad B_f = [I \quad B_{f12}]$$

其中 M_{11} 的列对应某生成树的连枝集，那么

$$B_f = [I \quad -M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1}] \tag{13.2-4}$$

［证明］ 因为

$$B_f M^T = [I \quad B_{f12}]\begin{bmatrix} M_{11}^T \\ M_{12}^T \end{bmatrix} = M_{11}^T + B_{f12}M_{12}^T = 0$$

故有

$$M_{11}^T = -B_{f12}M_{12}^T$$

因为 M_{12} 是非奇异的，所以

$$B_{f12} = -M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1}$$

于是

$$B_f = [I \quad -M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1}] \qquad \blacksquare$$

例 13.2.2 在图 13.2-5 所示的有向图 D 中，D 的关联矩阵（取顶点 4 为参考点）是

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} d & e & f & a & b & c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

取 $T=\{a,b,c\}$ 为生成树。

这里

$$M_{11}^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{12}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

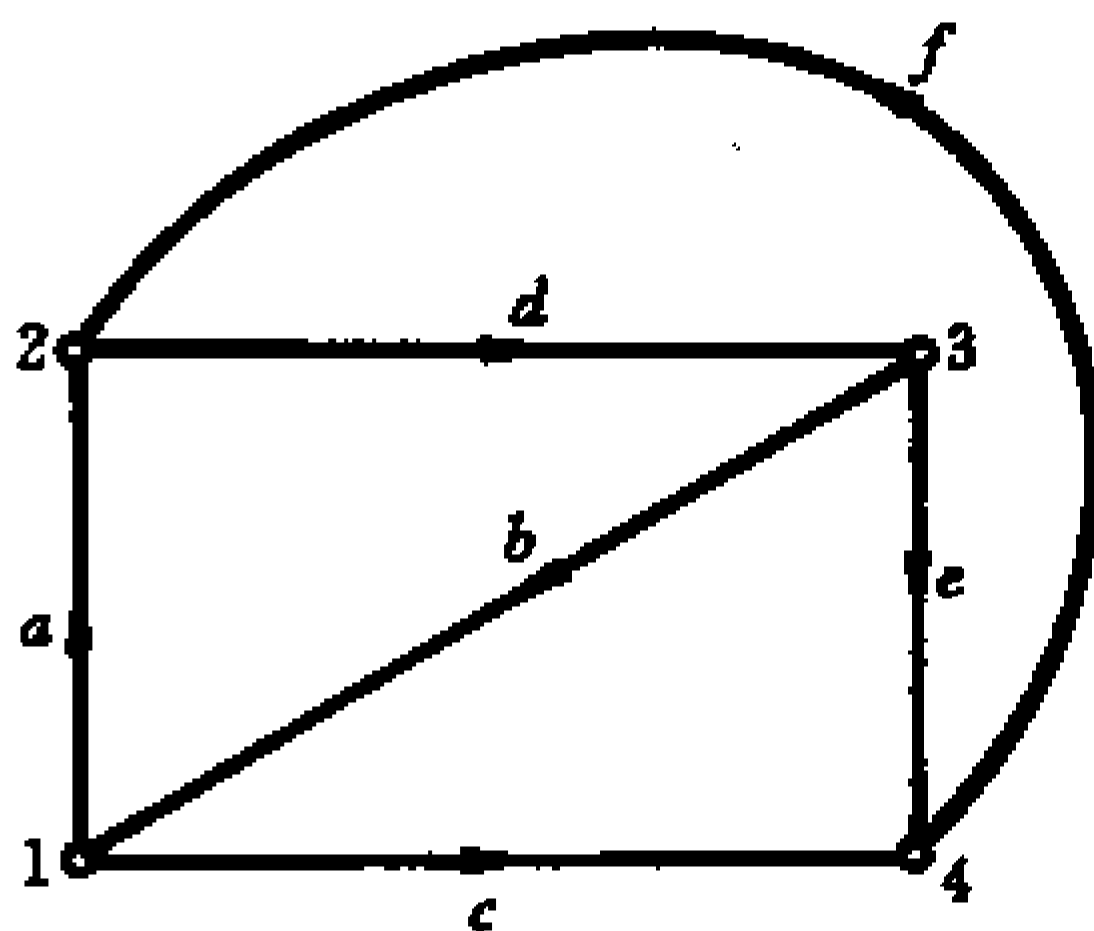


图 13.2-5

矩阵 M_{12}^{T} 的逆矩阵是

$$(M_{12}^{T})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵 M_{11}^{T} 和 $(M_{12}^{T})^{-1}$ 的乘积是

$$M_{11}^{T}(M_{12}^{T})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

于是

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} d & e & f & a & b & c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

13.3 割集矩阵

在这一节我们来讨论有向图的割集矩阵，先给出有向图

断集的定义。

定义 13.3.1 有向图 D 的断集 S 是相应的基础图的断集再加上一个方向：如果 D 的顶点集合 V 被分成 V_1 和 $\overline{V}_1$，则 S 的方向规定为从 V_1 到 $\overline{V}_1$ 或是从 $\overline{V}_1$ 到 V_1。如果一个断集 S 按从 V_1 到 $\overline{V}_1$ 来定向，那么 S 的一条弧 (u,v)，当其端点 u 在 V_1 中，v 在 $\overline{V}_1$ 中，则称该条弧的方向与 S 的方向一致，否则相反。

直观上，断集 S 的方向可以用一个箭头来表示，如图 13.3-1 所示。

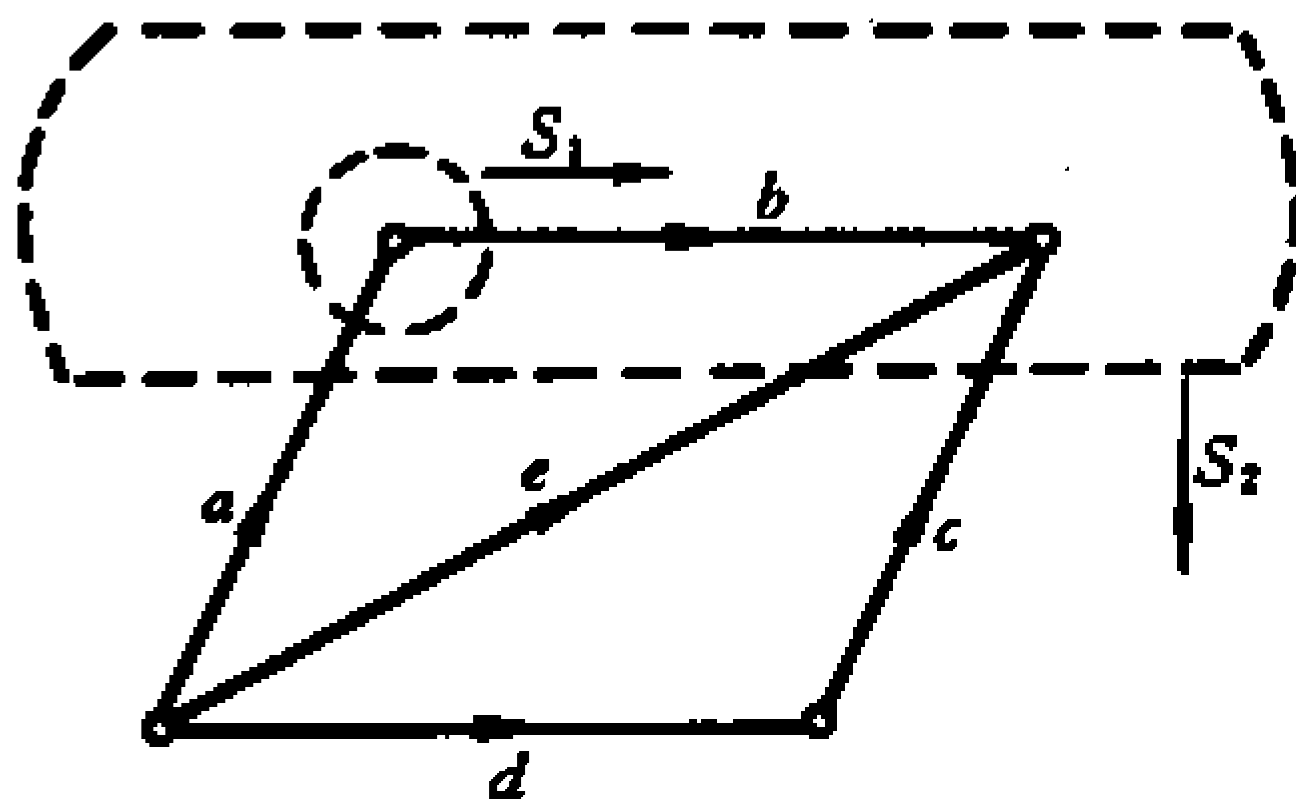


图 13.3-1

在有些情况下，需要重新画出 D 的基础图，才能用箭头表示出断集的方向。这是因为，用虚线表示断集的方法，不是在所有情况下都是可能的。下面我们就割集(即断集的特殊情况)举例说明。

例如弧集 $\{a,c,d,f\}$ 是图 13.3-2(a)所示的有向图 D 的一个割集。因为相应的无向图的割集无法用闭合曲线切割的方法来表示，但是如果把 D 改画成如图 13.3-2(b)所示的图形，那么割集 $\{a,c,d,f\}$ 就可以表示出来了。

也可以用其他方法来确定断集的方向。例如选定两个顶点 u,v，$u\in V_1$，$v\in \overline{V}_1$，我们就说断集的方向是从顶点 u 到顶点 v。

在无向图中，有

$$E(V_a\times V_b)=E(V_b\times V_a)$$

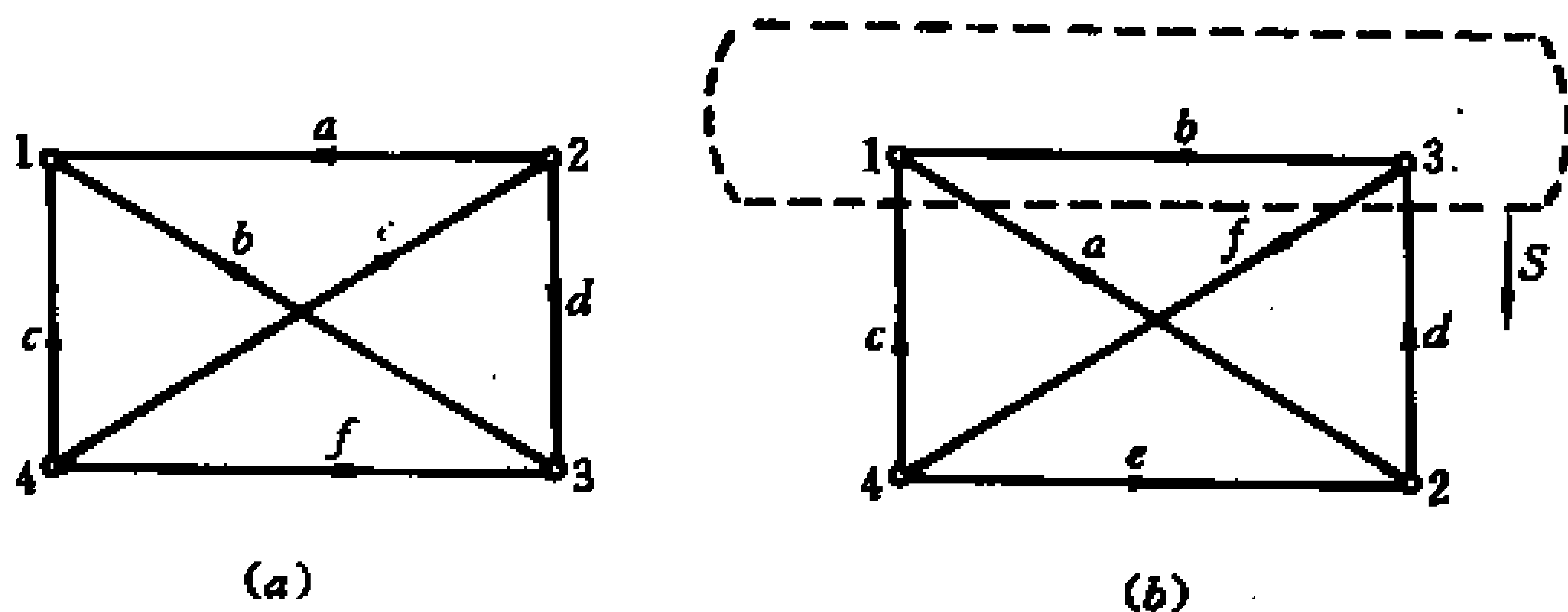


图 13.3-2

所以无向图的断集可以表示成 $E(V_1\times\bar{V}_1)$的形式。但是在有向图中上面的等式不成立。有向图的断集表示成

$$S = E(V_1 \times \bar{V}_1) \cup E(\bar{V}_1 \times V_1)$$

如果 $E(V_1\times\bar{V}_1)$和 $E(\bar{V}_1\times V_1)$恰有一个是空集时，这样的断集称为**有向断集**(directed seg)。如果这个断集是割集，则称为**有向割集**(directed cutset)。

例 13.3.1 有向图 D 如图 13.3-3 所示。

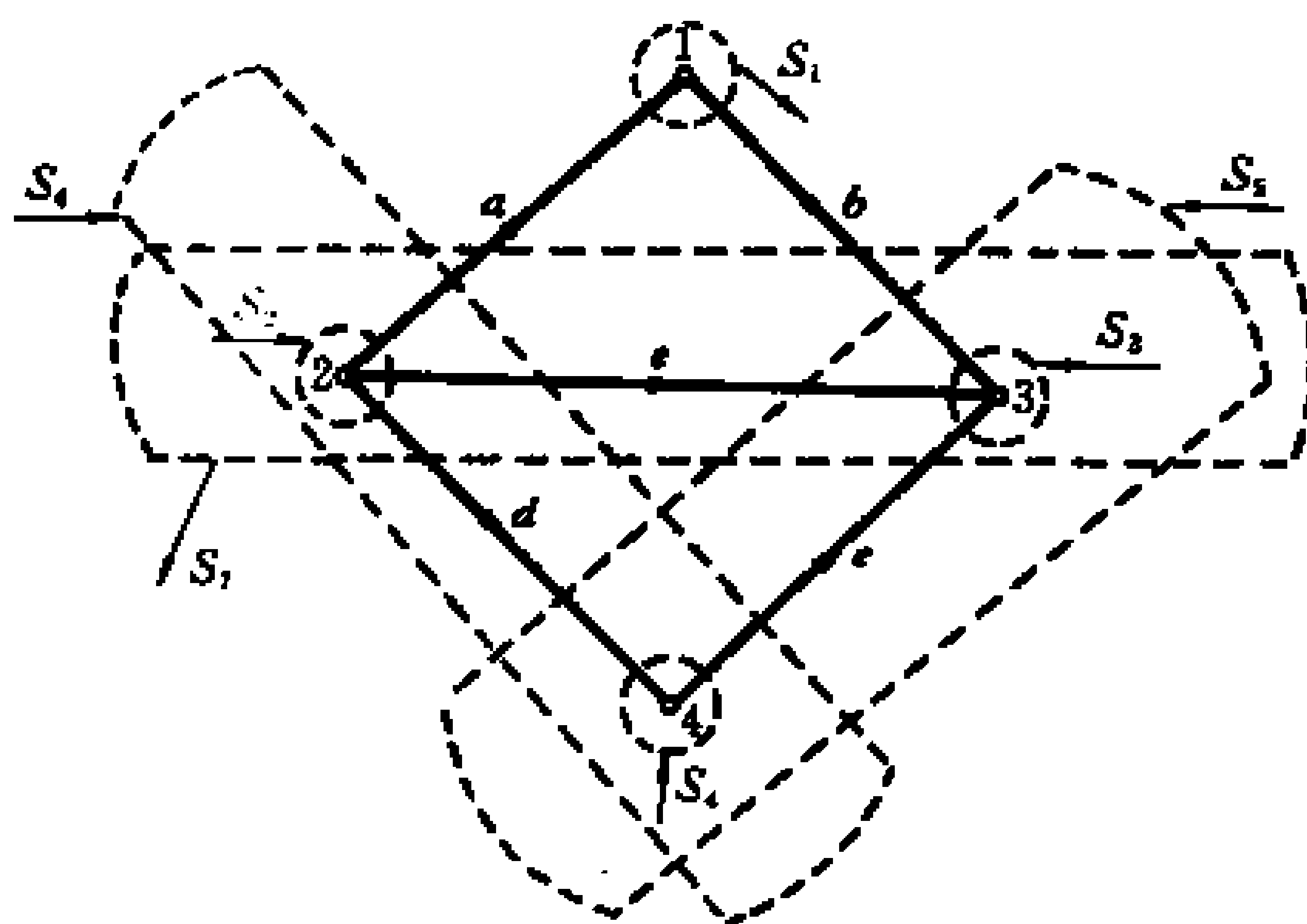


图 13.3-3

D 的断集和割集分别是：

$S_1 = E(\{1\} \times \{\overline{1}\}) \cup E(\{\overline{1}\} \times \{1\}) = \{a,b\}$

$S_2 = E(\{2\} \times \{\overline{2}\}) \cup E(\{\overline{2}\} \times \{2\}) = \{a,d,e\}$

$S_3 = E(\{3\} \times \{\overline{3}\}) \cup E(\{\overline{3}\} \times \{3\}) = \{b,c,e\}$

$S_4 = E(\{4\} \times \{\overline{4}\}) \cup E(\{\overline{4}\} \times \{4\}) = \{c,d\}$

$S_5 = E(\{1,2\} \times \{\overline{1,2}\}) \cup E(\{\overline{1,2}\} \times \{1,2\}) = \{b,d,e\}$

$S_6 = E(\{1,3\} \times \{\overline{1,3}\}) \cup E(\{\overline{1,3}\} \times \{1,3\}) = \{a,c,e\}$

$S_7 = E(\{1,4\} \times \{\overline{1,4}\}) \cup E(\{\overline{1,4}\} \times \{1,4\}) = \{a,b,c,d\}$

其中 S_2,S_3,S_5,S_6 是有向割集，S_7 是断集，S_7 的方向是从 $V_1=\{1,4\}$ 到 $\overline{V}_1=\{2,3\}$。我们也可以说，S_7 的方向是从顶点 1 到顶点 2。

定义 13.3.2 设 D 是有 p 个顶点，q 条弧的有向连通图，令

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若弧 } j \text{ 在断集 } i \text{ 中，且弧 } j \text{ 的方向与断集 } i \text{ 的方向一致} \\ -1, & \text{若弧 } j \text{ 在断集 } i \text{ 中，且弧 } j \text{ 的方向与断集 } i \text{ 的方向相反} \\ 0, & \text{若弧 } j \text{ 不包含在断集之 } i \text{ 中} \end{cases}$$

则称由元素 $q_{ij}(i=1,2,\cdots,2^{p-1}-1,j=1,2,\cdots,q)$ 构成的 $(2^{p-1}-1)\times q$ 矩阵为 D 的**完全割集矩阵**，记作 Q_e。在完全割集矩阵中秩为 $p-1$ 的 $(p-1)\times q$ 矩阵称为 D 的**割集矩阵**，记作 Q。

定义 13.3.3 设 D 是有 p 个顶点，q 条弧的有向连通图，T 是 D 的一棵生成树。D 的基础图关于生成树 T 的基本割集再加上它的方向，叫做 D 的**基本割集**。由 D 的 $p-1$ 个基本割集为行，q 条弧为列构成的 $(p-1)\times q$ 矩阵，称为 D 的关于生成树 T 的**基本割集矩阵**，记作 Q_f。

基本割集的方向通常取基本割集中生成树的树枝的方

向。用这种方法确定的基本割集矩阵可以写成

$$Q_f = [Q_{f_{11}} \quad I]$$

其中单位矩阵 I 的列对应于生成树的树枝。

例如，图 13.3-3 所示的有向图的完全割集矩阵是

$$Q_e = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ S_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ S_3 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ S_5 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ S_6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ S_7 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}$$

例如，在图 13.3-1 所示的有向图 D 中取生成树 $T=\{a,d,e\}$，那么 D 关于 T 的基本割集组是

$$S_1 = E(\{2,3,4\} \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \{2,3,4\}) = \{a,b\}$$
$$S_2 = E(\{1,2,3\} \times \{4\}) \cup (\{4\} \times \{1,2,3\}) = \{c,d\}$$
$$S_3 = E(\{1,2,4\} \times \{3\}) \cup (\{3\} \times \{1,2,4\}) = \{b,c,e\}$$

其中 S_1 的方向是从 $\{2,3,4\}$ 到 $\{1\}$，即树枝 a 的方向，S_2 的方向是从 $\{1,2,3\}$ 到 $\{4\}$，即树枝 d 的方向，S_3 的方向是从 $\{1,2,4\}$ 到 $\{3\}$，即树枝 e 的方向。于是 D 关于生成树 $T=\{a,b,c\}$ 的基本割集矩阵是

$$Q_f = \begin{matrix} & b & c & a & d & e \\ S_1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ S_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

下面我们来证明关于完全割集矩阵 Q_e 的秩的一个定理，

证明的主要思想是，把 Q_e 的行向量表示成 M_e 的行向量的线性组合。这样，由 M_e 的秩便可得出 Q_e 的秩。

定理 13.3.1 设 D 是 p 阶有向连通图，那么 D 的完全割集矩阵的秩是 $p-1$。

［证明］ 为方便起见，我们用 $R(S)$表示矩阵 Q_e 中断集 S 所在的那个行向量。

设某一个断集为

$$S_i = E(V_1 \times \overline{V}_1) \cup E(\overline{V}_1 \times V_1)$$

其中 $V_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，根据定理 5.3.3，有

$$S_i = S_{i_1} \oplus S_{i_2} \oplus \cdots \oplus S_{i_m}$$

这里

$$S_{i_k} = E(\{v_k\} \times \{\overline{v}_k\}) \cup E(\{\overline{v}_k\} \times \{v_k\}), k = 1,2,\cdots,m$$

是关联集。

我们来证明

$$R(S_i) = \sum_{k=1}^{m} R(S_{i_k}) \qquad (13.3\text{-}1)$$

其中 S_i 的方向是从 V_1 到 $\overline{V}_1$，S_{i_k}的方向是从$\{v_k\}$到$\{\overline{v}_k\}$。设 e 是断集 S_i 中的一条弧，v_r 和 v_s 是弧 e 的两个端点，e 的方向是从 v_r 到 v_s，由 $v_r \in V_1$ 还是 $v_r \in \overline{V}_1$ 确定 $R(S_i)$在 e 这一列中是 1 还是 -1，假定 $v_r \in V_1$，那么 $R(S_i)$在 e 这一列中是 1。因为在 $S_{i_1},S_{i_2},\cdots,S_{i_m}$中，只有 S_{i_r} 包含 e，且在 $R(S_{i_r})$中在 e 这一列中也是 1，故等式(13.3-1)成立。

同样可证明，当 $v_s \in V_1$ 时，等式(13.3-1)也成立。

设 e 不是断集 S_i 中的一条弧，假如 e 也不在 $S_{i1},S_{i2},\cdots,S_{im}$ 中，等式(13.3-1)显然成立。假如弧 e 至少在这些关联集之一中，设 e 的两个端点为 v_r 和 v_s，且 e 的方向是从 v_r 到 v_s。因为 e 不在 S_i 中，所以 v_r 和 v_s 同在 V_1 或同在 $\overline{V}_1$ 中，不失一

般性，设 $1\leqslant r\leqslant s\leqslant m$，则在 $S_{i_1},S_{i_2},\cdots,S_{i_m}$ 中恰有 S_{i_r} 和 S_{i_s} 包含弧 e。因此，$R(S_{i_r})$ 的 e 这一列是 1，而 $R(S_{i_s})$ 的 e 这一列是 -1，故在这种情况下，等式(13.3-1)也成立。

上面的讨论是假定关联集 S_{i_k} 的方向是从 $\{v_i\}$ 到 $\{\bar{v}_i\}$。如果不作这样的假定，等式(13.3-1)可以写成

$$R(S_i)=\sum_{k=1}^{m}h_k k(S_{i_k}) \qquad (13.3\text{-}2)$$

其中

$$h_k=\begin{cases}1, & \text{如果 } S_{i_k} \text{ 的方向是从}\{v_k\}\text{到}\{\bar{v}_k\}\\ -1, & \text{如果 } S_{i_k} \text{ 的方向是从}\{\bar{v}_k\}\text{到}\{v_k\}\end{cases}$$

这是因为，根据有向图完全割集矩阵的定义，$R(S_{i_k})$ 乘上 -1 相当于改变 S_{i_k} 的方向。等式(13.3-2)表明，矩阵 Q_e 的行向量可由 A_e 的行向量线性表示，A_e 的秩是 $p-1$，Q_e 的秩也是 $p-1$。▮

定理 13.3.2 设 Q 和 B 分别是有向图 D 的割集矩阵和圈矩阵，则有

$$QB^T=0,\quad BQ^T=0$$

定理的证明与定理 6.4.5 完全相似，这里就不再重复了。

和定理 6.4.6 类似，对有向图来说，有下面的等式：

$$Q_f=[-B_{f_{12}}^T \quad I] \qquad (13.3\text{-}3)$$

$$B_f=[I \quad -Q_{f_{11}}^T] \qquad (13.3\text{-}4)$$

举一个例子。对图 13.3-1 所示的有向图 D，D 关于生成树 $T=\{a,d,e\}$ 的基本割集矩阵是

$$Q_f=\begin{array}{c}\begin{matrix} b & c & a & d & e\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

于是

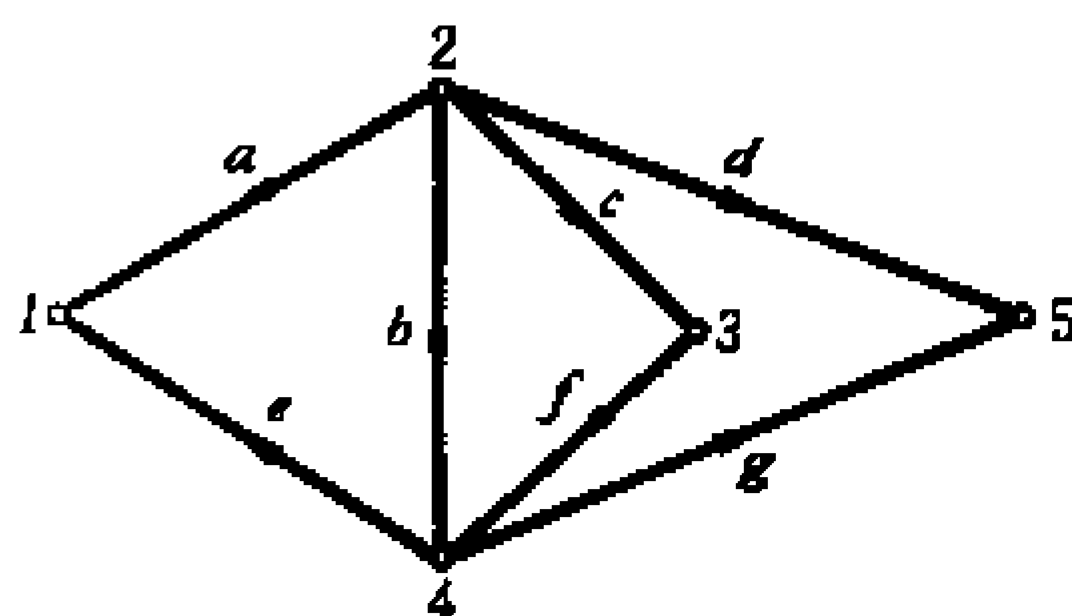
$$Q_{f_{11}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} b & c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

由式(13.3-4)得 D 关于生成树 $T=\{a,d,e\}$ 的基本圈矩阵是

$$B_f = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} b & c & a & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

习题十三

13-1　写出有向图 D 的关联矩阵和关于生成树 $T=\{a,b,c,d\}$ 的基本圈矩阵和基本割集矩阵。



题 13-1 图

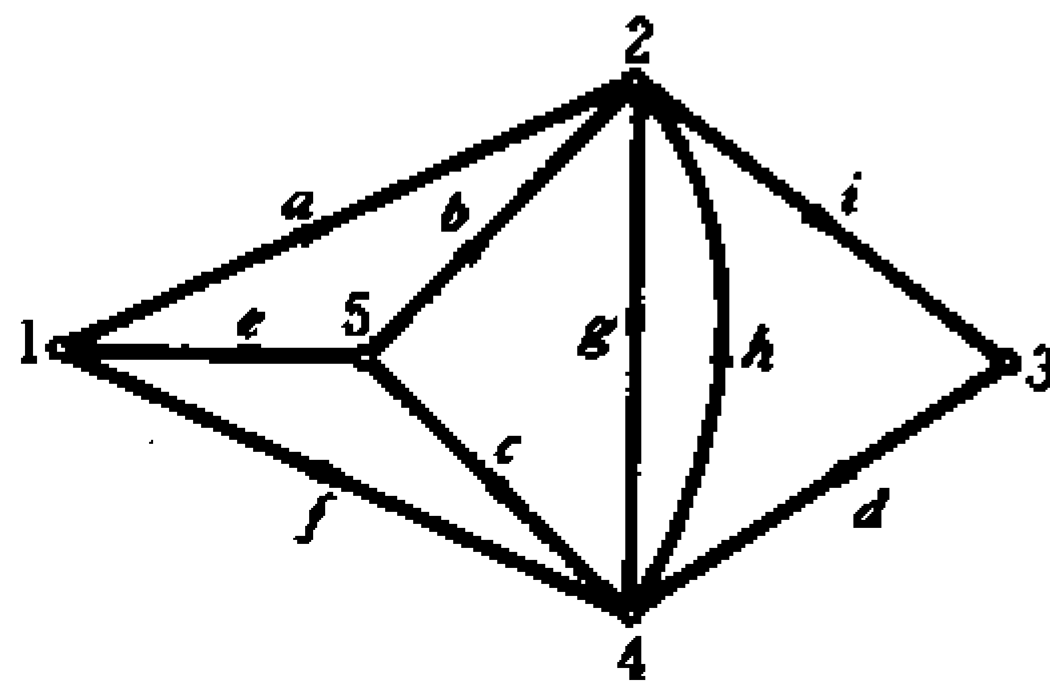
13-2　求 13-1 题中有向图 D 的完全圈矩阵和完全割集矩阵。

13-3　写出有向图的关联矩阵和关于生成树 $T=\{a,b,c,d\}$ 的基本圈矩阵与基本割集矩阵。

13-4　证明定理 13.1.1。

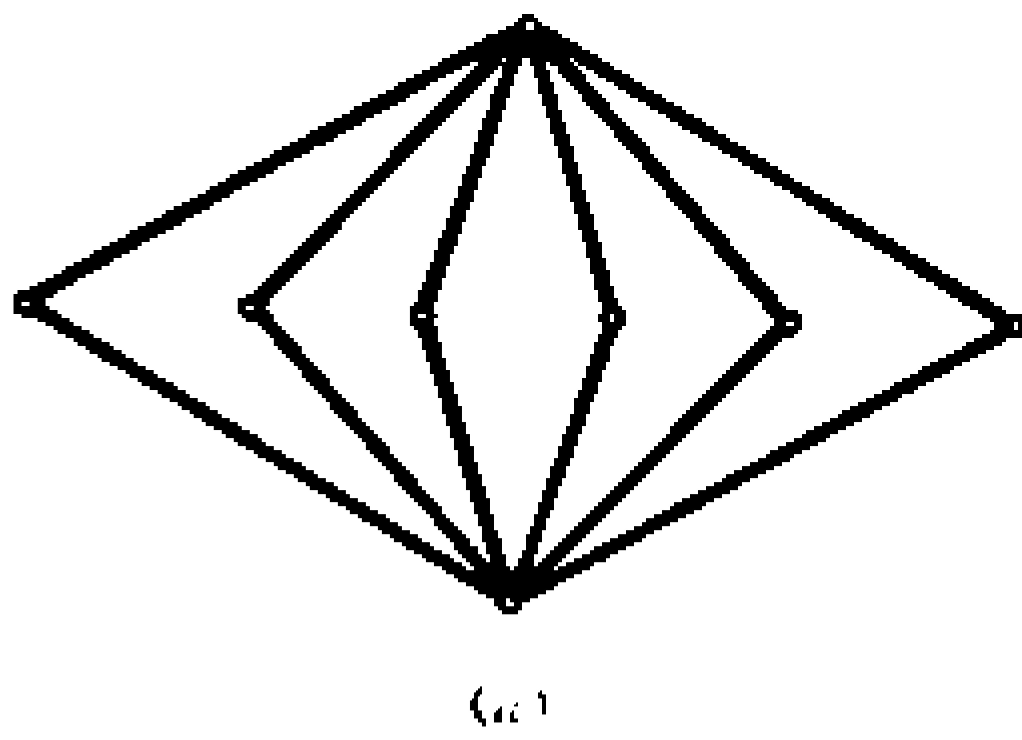
13-5　证明定理 13.1.2。

13-6　证明定理 13.2.3。

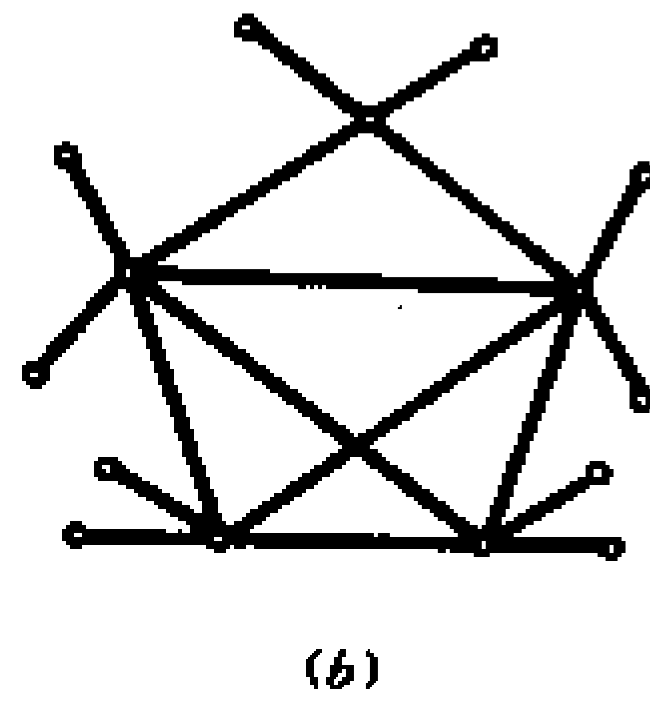


题 13-3 图

13-7 求下列两图的生成树的数目(由读者自行标定)。



(a)



(b)

题 13-7 图

第十四章　运输网络

这一章我们以运输网络为例，介绍网络的流及其有关的问题。网络流的理论在广泛的领域里具有重要的应用。

本章的内容是：流和割的概念，最大流最小割定理以及确定最大流的标记法。

14.1　网络的流

定义 14.1.1　设 $N=(V,U)$ 为一有向图，满足

(1) V 中有两个非空不相交子集 X,Y。X 中任一顶点的入度为零，Y 中任一顶点的出度为零；

(2) 弧集 U 上定义一个取非负整数值的函数 c，则称 N 为一个**网络**(network)。

X 中的顶点称为**源**(source)，Y 中的顶点称为**汇**(sink)。既非源又非汇的顶点称为**中间顶点**。函数 c 称为 N 的**容量函数**(capacity function)。容量函数 c 在弧 a 上的值称为 a 的**容量**。弧 $a=(i,j)$ 的容量记为 $c(a)$ 或 $c(i,j)$。一般说来，$c(i,j)\neq c(j,i)$。一条弧的容量可以看作某种物质沿着这条弧所能输送的最大速率或看作输送的最大量。

这一章主要讨论具有一个源和一个汇的网络。

图 14.1-1 表示的是有一个源 x 和一个汇 y 及 6 个中间顶点 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 的一个网络。

下面我们来引进流的概念。

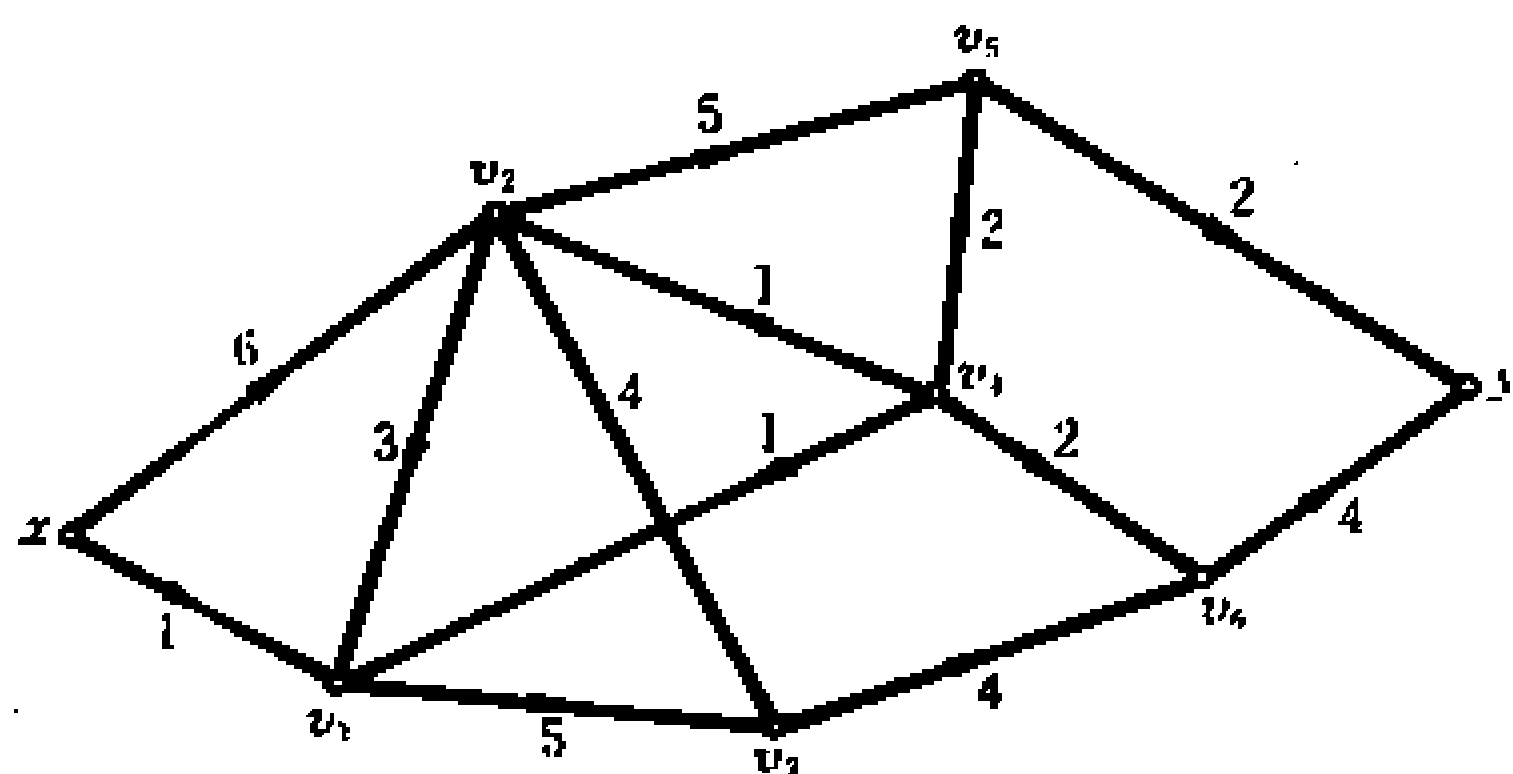


图 14.1-1

网络 N 中每一条弧 (i,j) 都有一个容量 $c(i,j)$，除此之外，对每一条弧 (i,j) 还有一个通过该弧的流。

如果我们把网络中的弧看作是水管，那么容量就是通过水管的水的最大限度，流则是通过水管的水的流量。

设 N 是有一个源 x 和一个汇 y 的网络，f 是定义在弧集 $U(N)$ 上的一个实数值函数，V_1 和 V_2 是顶点集 $V(N)$ 的子集，用 (V_1,V_2) 表示起点在 V_1，终点在 V_2 中的弧的集合，记

$$f(V_1,V_2)=\sum_{a\in(V_1,V_2)}f(a)$$

定义 14.1.2 设 f 是定义在 $U(N)$ 上的一个实数值函数，若满足

(1)

$$0\leqslant f(i,j)\leqslant c(i,j)\text{，对所有 } a\in U(N) \quad (14.1\text{-}1)$$

(2)

$$f(i,V)=f(V,i)\text{，对所有的中间顶点 } i \quad (14.1\text{-}2)$$

则称 f 是网络 N 的一个**流**(flow)，$f(x,V)$ 称为流的值，记作 $f_{x,y}$。

条件(1)称为**容量约束**，条件(2)称为**守恒条件**，$f(i,\overline{V})$ 表示从顶点 i 流出的流的和，$f(V,i)$ 表示流向顶点 i 的流的

和。

如果我们用 $-f_{x,y}$ 表示从汇流出的流(即流入汇的流)，于是条件(2)就是

$$f(i,V)-f(V,i)=\begin{cases}f_{x,y}, 当\ i=x\\ 0, 当\ i\neq x\neq y, 对所有的\ i\in V\\ -f_{x,y}, 当\ i=y\end{cases}$$

网络 N 的每一条弧上的流的集合 $\{f(i,j),(i,j)\in U\}$，称为**网络 N 的流**，记作 F，即

$$F=\{f(i,j),(i,j)\in U\}$$

如果网络 N 满足定义 14.1.2 中的条件(1)和(2)，则称 F 是网络 N 上的**可行流**。

下面我们来举一个例子。

例 14.1.1 图 14.1-2 所示的网络 N 中，每条弧旁的第一个数是弧的容量，第二个数是弧的流，例如 $c(x,1)=8, f(x,1)=4, c(1,2)=5, f(1,2)=1$ 等等。

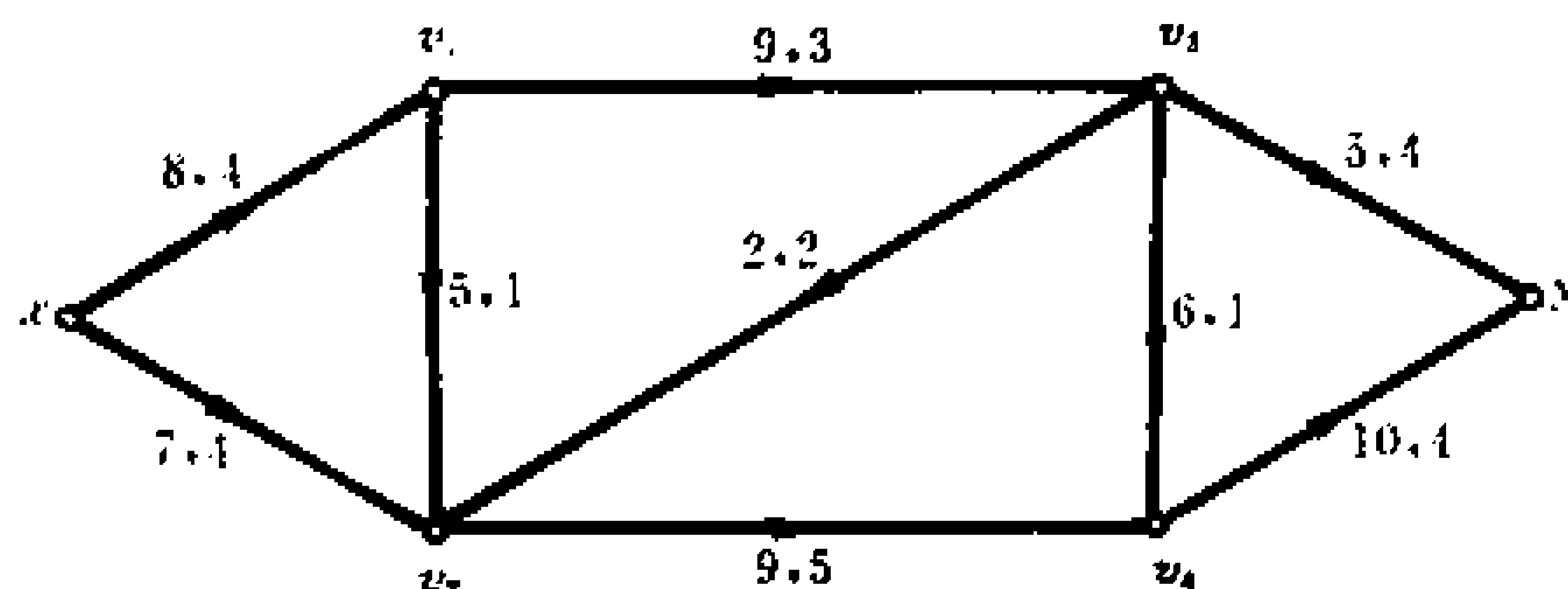


图 14.1-2

不难验证，网络 N 满足条件(14.1-1)和(14.1-2)，网络 N 的流 f 的值 $f_{xy}=8$。

定义 14.1.3 设 f 是网络 N 的一个流，$a\in U(N)$，如果 $f(a)=0$，则称弧 a 是 ***f*-零的**；如果 $f(a)>0$，则称弧 a 是 ***f*-正的**；如果 $f(a)<c(a)$，则称弧 a 是 ***f*-不饱和的**；如果 $f(a)=$

$c(a)$，则称弧 a 是 **f-饱和的**。

需要指出的是，每一个网络 N，至少有一个可行流。因为对于所有的弧(i,j)，由 $f(i,j)=0$ 所定义的函数显然满足条件(14.1-1)和(14.1-2)，这样的流称为**零流**。

上面我们讨论的网络常常称为**运输网络**(transport network)。运输网络可用来表示的物理模型是多种多样的。网格的弧可以用来表示城市之间的公路，电讯局之间的通讯线路，网络的流则可以表示输送的物质量，速率，公路上通过的汽车数量或信息量等等。

定义 14.1.4 设 f 是网络 N 的一个流，如果不存在 N 的流 f'，使 $f'_{x,y}>f_{x,y}$，则称 f 为**最大流**，记作 f_{max}。

运输网络的一个主要问题是要找出它的一个最大流 f_{max}。条件(14.1-1)是一个不等式，所以这个问题是一个典型的线性规划问题.不过对这个具体问题来说，用图论的方法较为简洁有效。

我们来看一个求运输网络最大流的例子。

有若干港口 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 和 $v_1,v_2,\cdots,v_s$，我们用顶点表示这些港口。准备把在港口 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 的某种物资运往港口 $v_1,v_2,\cdots,v_s$。用 m_i 表示在港口 u_i 准备启运的物资量，而用 d_j 表示港口 v_j 所需要的物质量。两个港口 u_i、v_j 间的航道用弧(i,j)来表示。船只运送物资量的能力用弧的容量 $c(i,j)$来表示。问题是：这样的设置能否满足需要？如何组织运输？为了解决这个问题，我们考虑一个源 x 和一个汇 y 的网络 N：自 x 到任一顶点 u_i，用一条容量为 $c(x,u_i)=m_i$ 的弧连接。自任一顶点 v_j 到 y 用一条容量为 $c(v_j,y)=d_j$ 的弧连接(如图 14.1-3)所示。

这样，问题就归结为求出此网络 N 的一个最大流，这个

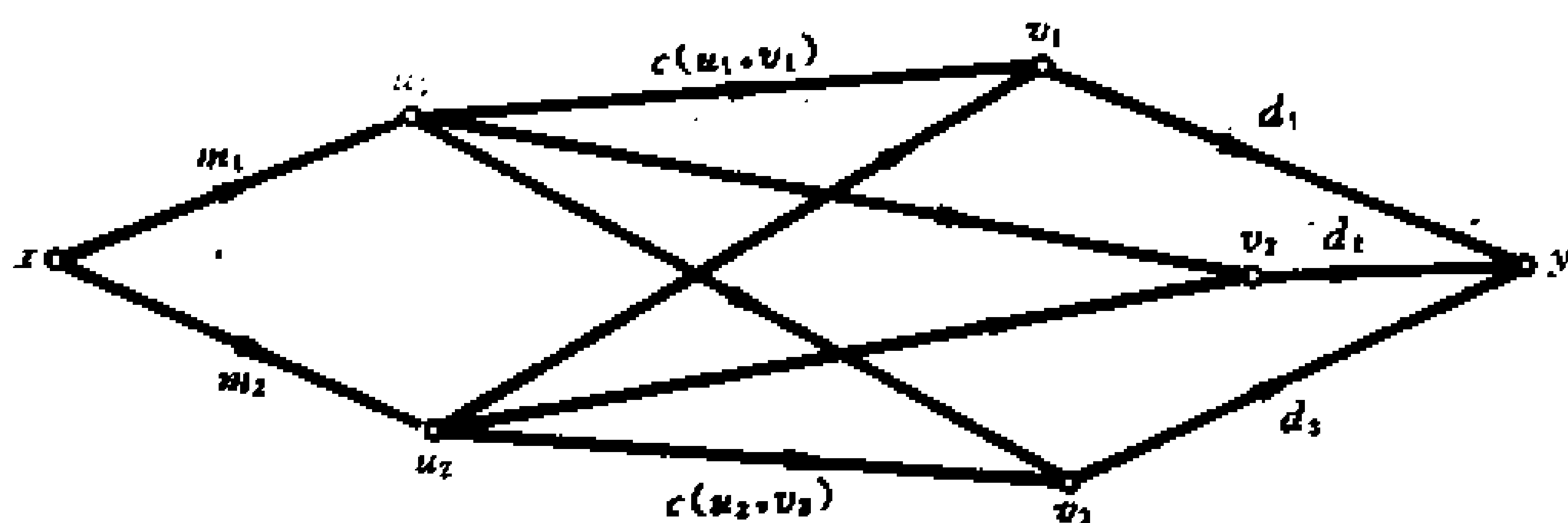


图 14.1-3

最大流将表示在尽量满足需要的情况下，沿着每条航道通过船只运送的物资量。

14.2 割

为了解决求运输网络的最大流问题，这一节我们先来讨论割的概念。

定义 14.2.1 设 $N=(V,U)$ 是只有一个源 x 和一个汇 y 的网络，V_1 是 $V(N)$ 的一个子集，$x\in V_1$，$y\in\overline{V}_1$。N 中弧 $(V_1,\overline{V}_1)$ 的集合称为 N 的一个割(cut)，记作 K。

例 14.2.1 在图 14.2-1 所示的网络 N 中，取 $V_1=\{x,v_1,v_2\}$，$\overline{V}_1=\{v_3,v_4,y\}$，于是

$$K=(V_1,\overline{V}_1)=\{(v_1,v_3),(v_2,v_4)\}$$

由割的定义知，网络 N 的一个割是分离源和汇的弧的集合。割 K 的容量是它的各条弧的容量的和。我们用 $c(V_1,\overline{V}_1)$ 或用 $c(K)$ 表示 K 的容量，于是

$$c(K)=\sum_{a\in K}c(a)$$

例如，例 14.2.1 中的割 $K=\{(v_1,v_3),(v_2,v_4)\}$ 的容量是

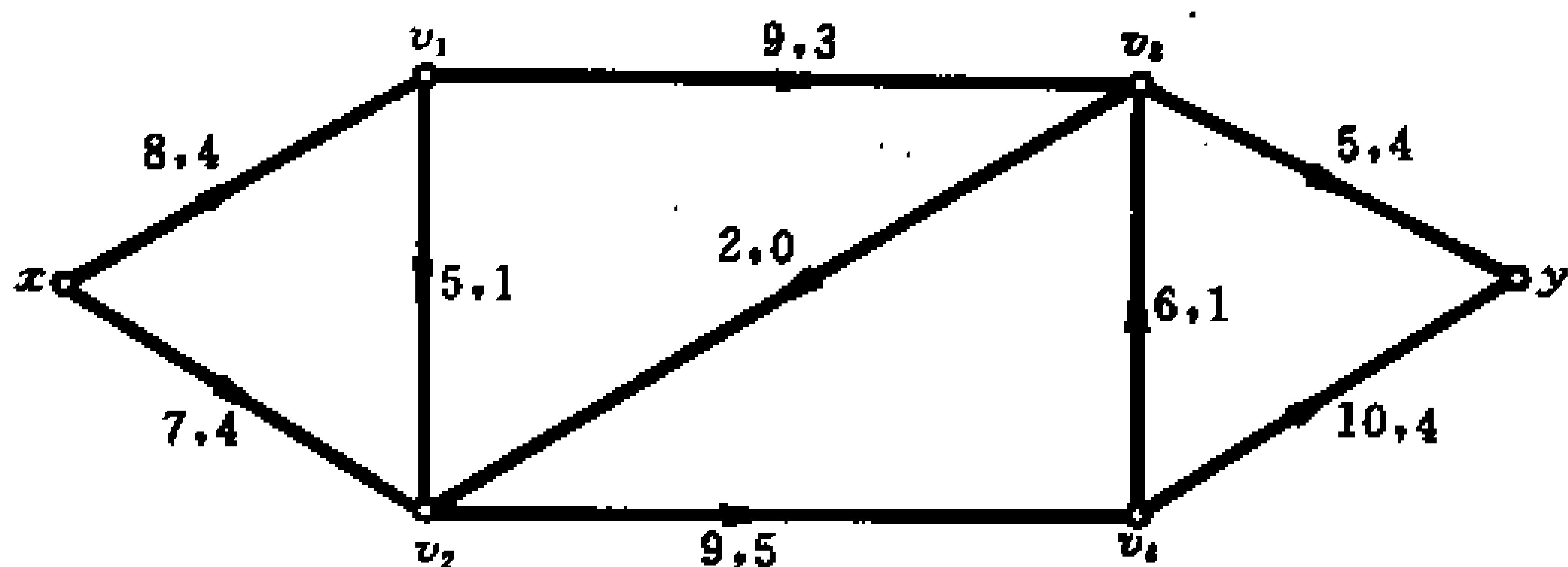


图 14.2-1

18。

割与割集的概念是不同的。割 K 是按有向图来定义，而割集则是按无向图来定义，例如图 14.2-1 中割 $(V_1,\overline{V}_1)=\{(v_1,v_3),(v_2,v_4)\}$，而由顶点子集 V_1 和 $\overline{V}_1$ 确定的割集是 $\{(v_1,v_3),(v_3,v_2),(v_2,v_4)\}$。因为割不是割集，所以，一般说来，假如把 N 的割删去，N 不一定分离成两部分。但是，由于自 x 到 y 的任一有向链必含有割 $(V_1,\overline{V}_1)$ 的一条弧。因此，把 N 的割移去后，一定把 N 的全部自 x 到 y 的有向链断开。这样，若把割 $(V_1,\overline{V}_1)$ 的全部弧删去，自 x 到 y 将不存在任何有向链。

定理 14.2.1 设网络 N 的流值为 $f_{x,y}$，$(V_1,\overline{V}_1)$ 为 N 的一个割，那么

$$f_{x,y}=f(V_1,\overline{V}_1)-f(\overline{V}_1,V_1) \qquad (14.2\text{-}1)$$

[证明] 因为

$$f(x,V)=f_{x,y}$$

$$f(v,V)-f(V,v)=0, v\neq x,y$$

$$f(V,y)=-f_{x,y}$$

所以对任意的 $X\subseteq V$，$x\in X$，$y\in\overline{X}$，有

$$\sum_{v\in X}[f(v,V)-f(V,v)]=f_{x,y}$$

或

$$f(X,V)-f(V,X)=f_{x,y} \qquad (14.2\text{-}2)$$

把 $V=X\cup\overline{X}$ 代入式(14.3-2),并注意到 $X\cap\overline{X}=\varnothing$,有

$$f(X,V)-f(V,X)=f(X,X\cup\overline{X})-f(X\cup\overline{X},X)$$

但

$$f(X,X\cup\overline{X})=f(X,X)+f(X,\overline{X})-f(X,X\cap\overline{X})$$
$$=f(X,X)+f(X,\overline{X})$$
$$f(X\cup\overline{X},X)=f(X,X)+f(\overline{X},X)-f(X\cap\overline{X},X)$$
$$=f(X,X)+f(\overline{X},X)$$

于是

$$f(X,X)+f(X,\overline{X})-f(X,X)-f(\overline{X},X)=f_{x,y}$$

即

$$f(X,\overline{X})-f(\overline{X},X)=f_{x,y} \qquad (14.2\text{-}3)$$

上式对任何 $X\subseteq V$ 均成立,因此等式(14.2-1)成立。∎

式(14.2-1)表明,运输网络的一个自源 x 到汇 y 的流值,等于任何分离 x 和 y 的割中流的净值,即割的自 V_1 到 $\overline{V}_1$ 的弧中的流减去自 $\overline{V}_1$ 到 V_1 的弧中的流的总体。

推论 14.2.1 设$(V_1,\overline{V}_1)$是网络 N 的任一割,则有

$$f_{x,y}\leqslant c(V_1,\overline{V}_1) \qquad (14.2\text{-}4)$$

[证明] 对任意集合 X,有

$$f(X,\overline{X})\geqslant 0$$

由式(14.2-3),有

$$f_{x,y}\leqslant f(X,\overline{X})=\sum_{i\in X,j\in\overline{X}}f(i,j)$$

由于 $0\leqslant f(i,j)\leqslant c(i,j)$,故

$$f(X,\overline{X}) \leqslant \sum_{i\in X, j\in \overline{X}} c(i,j) = c(X,\overline{X})$$

上式对任意的 X 均成立，推论得证。∎

定义 14.2.2 设 N 是一个网络，K 是 N 的一个割，如果不存在 N 的割 K' 使

$$c(K') < c(K)$$

则称 K 是 N 的**最小割**，最小割的容量记作 $c_{\min}(K)$。

推论 14.2.2 对任何网络 N，有

$$f_{\max} \leqslant c_{\min}(K) \tag{14.2-5}$$

14.3 最大流最小割定理

前面曾经指出，运输网络中的一个主要问题就是寻求网络的最大流。这一节我们来证明一个定理，它是由福特(Ford)和付克逊(Fulkerson)在 1956 年提出的，称为最大流最小割定理。这个定理是图论的重要核心。关于图的许多结果，在适当的选择网络之后，应用这个定理往往能够容易地获得解决。福特和付克逊给出的证明是构造性的，可以从它引出求网络最大流的一个算法。

定义 14.3.1 设 N 为一网络，N 中相异顶点序列 v_{i_1}，v_{i_2}，…，v_{i_n} 具有下列性质：对任意的 $r(r=1,2,\cdots,n-1)$，或者 $(v_{i_r},v_{i_{r+1}})$ 是一条弧或者 $(v_{i_{r+1}},v_{i_r})$ 是一条弧，两者不能同时出现，由这样一些弧组成的序列称为 N 中由 v_{i_1} 到 v_{i_n} 的**路**(route)。

上面定义的路与有向道路的差别在于，从 v_{i_1} 走向 v_{i_n} 时，允许有和走向相反方向的弧。显然，如果不考虑弧的方向，即把弧看成边，则这种路的定义与无向图的道路的定义是一致

的。

定义 14.3.2 设顶点序列 $v_{i_1},v_{i_2}\cdots,v_{i_r},v_{i_s},\cdots,v_{i_j}$ 构成网络 N 的一条路，当 $(v_{i_r},v_{i_s})\in U(N)$ 时，称 (v_{i_r},v_{i_s}) 为**前向弧**，当 $(v_{i_s},v_{i_r})\in U(N)$ 时，称 (v_{i_s},v_{i_r}) 为**反向弧**。

例如，图 14.2-1 中，顶点序列 $xv_1v_3v_4y$ 是一条路，其中 (x,v_1)，(v_1,v_3)，(v_4,y) 是前向弧，(v_4,v_3) 是反向弧。

定义 14.3.3 设 P 是网络 N 的一条路，如果 P 的每条前向弧是 f-不饱和的（见定义 14.1.3），而 P 的每一条反向弧是 f-正的，则称 P 是 **f-不饱和路**，否则称为 **f-饱和路**；一条从源 x 到汇 y 的不饱和路，称为 **f-可增广路**，从源到汇的 f-饱和路，称为 **f-不可增广路**。

例如，图 14.2-1 所示的网络，$xv_1v_3v_4y$ 是一条 f-可增广路，$xv_1v_2v_3y$ 是一条 f-不可增广路。

寻求运输网络的最大流问题的通常方法是：先任意假设网络的一个流，然后由此出发，设法逐渐增大流值。这里我们假定弧的容量为正整数（若弧的容量是有理数，则可化为整数后再进行）。如果自 x 到 y 的路中存在一条路，其所有的前向弧未被饱和，其所有的反向弧具有正值的流。在这种情况下，总有可能使这条路的前向弧增加一个正整数 ϵ，所有反向弧的流减去 ϵ，而同时保持全部弧的流为正值且不超过弧的容量。这样做，不会破坏流的条件，同时也不会影响不属于此路的其他弧的流。但是 N 的流值 $f_{x,y}$ 则增加了 ϵ。所以总有可能逐次的增加 $f_{x,y}$，当自 x 到 y 找不到可增广路时 $f_{x,y}$ 就不能再增大，即 $f_{x,y}$ 达到最大值。

定理 14.3.1 在任何网络 N 中，最大流的值等于最小割的容量，即

$$f_{max}=c_{min}(K)$$

［证明］ 假设流 f 的值达到最大，根据这个流定义一个割$(V_1,\overline{V}_1)$，由式(14.2-5)，要证明这个定理只需要证明这个流值等于割$(V_1,\overline{V}_1)$的容量。

为了证明这一点，我们作一个集合 V_1，它的递归定义是：

(1) $x\in V_1$

(2) 若 $i\in V_1$ 和 $f(i,j)<c(i,j)$，则 $j\in V_1$，

若 $i\in V_1$ 和 $f(j,i)>0$，则 $j\in V_1$

根据 V_1 的定义，可以证明 $y\in\overline{V}_1$。假如不然，按 V_1 的定义将有一条自 x 到 y 的路 $x=v_1,v_2,\cdots,v_{n-1},v_n=y$，此路的全部前向弧$(v_i,v_{i+1})$满足

$$f(v_i,v_{i+1})<c(v_i,v_{i+1})$$

而其全部反向弧(v_{i+1},v_i)满足

$$f(v_{i+1},v_i)>0$$

这样，这条路将是可增广的，此与 f 是最大的假设矛盾。因此必有 $y\in\overline{V}_1$。

由此可见，$(V_1,\overline{V}_1)$为分离 x 和 y 的一个割。同时按 V_1 的定义，若$(v,\bar{v})\in(V_1,\overline{V}_1)$，则 $f(v,\bar{v})=c(v,\bar{v}_1)$；若$(\bar{v},v)\in(\overline{V}_1,V_1)$，则 $f(\bar{v},v)=0$，否则 $\bar{v}$ 将在 V_1 中，所以，有

$$f(V_1,\overline{V}_1)=c(V_1,\overline{V}_1),f(\overline{V}_1,V_1)=0$$

这样，在式(14.2-4)中，将有等式成立，即

$$f_{x,y}=c(V_1,\overline{V}_1)$$

而此割的容量必为最小，$f_{x,y}$则为最大，否则将与式(14.2-5)矛盾。▮

从定理 14.3.1 的证明中可以看到，利用逐渐增大流值的方法可以达到寻求最大流的目的，但是这种方法实际做起来是有困难的，因为没有解决如何寻找可增广路的方法。下一节

介绍的标记法，将解决寻找增广路的方法。

14.4 标　记　法

确定最大流的**标记法**(labelling method)分为两个过程：一是标记过程，二是增广过程。标记过程用来寻求可增广路，同时可以确定定理 14.3.1 证明中所定义的集合 V_1。这个过程只需要对每个顶点检查一次，就能找到一条可增广路；增广过程则使沿可增广路的流增加。

在标记过程中，每一个顶点给三种不同的记号。对一个顶点标记时，第一个记号是下标 i，即对所要检查的顶点 $i \in V_1$ 的下标；第二个记号用"＋"或"－"来标记，若 $c(i,j)-f(i,j)>0$，则记为"＋"号，若 $f(j,i)>0$，则记为"－"号；第三个记号用来说明有关弧上所能增大的流值。

A：标记过程

A_1：源 x 标记为$(x,+,\infty)$。这时 x 称为被标记未检查，其余顶点则称为未标记，未检查。

A_2：任选一个已标记未检查的顶点 i，若顶点 j 与 i 邻接且尚未标记，则当

(a) $(i,j)\in U$，$c(i,j)>f(i,j)$时，将 j 标上$(i,+,\varepsilon(j))$，其中 $\varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i),c(i,j)-f(i,j)\}$，之后称 j 已标记，未检查。

(b) $(j,i)\in U$，$f(j,i)>0$ 时，将 j 标上$(i,-,\varepsilon(j))$，其中 $\varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i),f(j,i)\}$，之后称 j 已标记，未检查。

(c) 与顶点 i 邻接的顶点都被标记后，将 i 的第二个记号"＋"或"－"用一个小圆圈圈起来，称 i 已被标记且被检查。

A_3：重复 A_2，直到汇 y 被标记，或者直至不再有顶点可

以被标记。在后者情况下，整个算法结束，在前者情况下，转向增广过程。

B：增广过程

B_1：令 $z=y$，转向 B_2。

B_2：如果 z 的标记为$(q,+,\varepsilon)$，把 $f(q,z)$增加 $\varepsilon(y)$。如果 z 标记为$(q,-,\varepsilon)$，则把 $f(z,q)$减小 $\varepsilon(y)$。

B_3：如果 $q=x$，把全部标记去掉，回到 A_1，否则，令 $z=q$，回到 B_2。

下面我们来举一个例子。

例 14.4.1 求图 14.2-1 所示网络的最大流。

A. 标记过程

(1) 源 x 标记成$(x,+,\infty)$(图 14.4-1)。

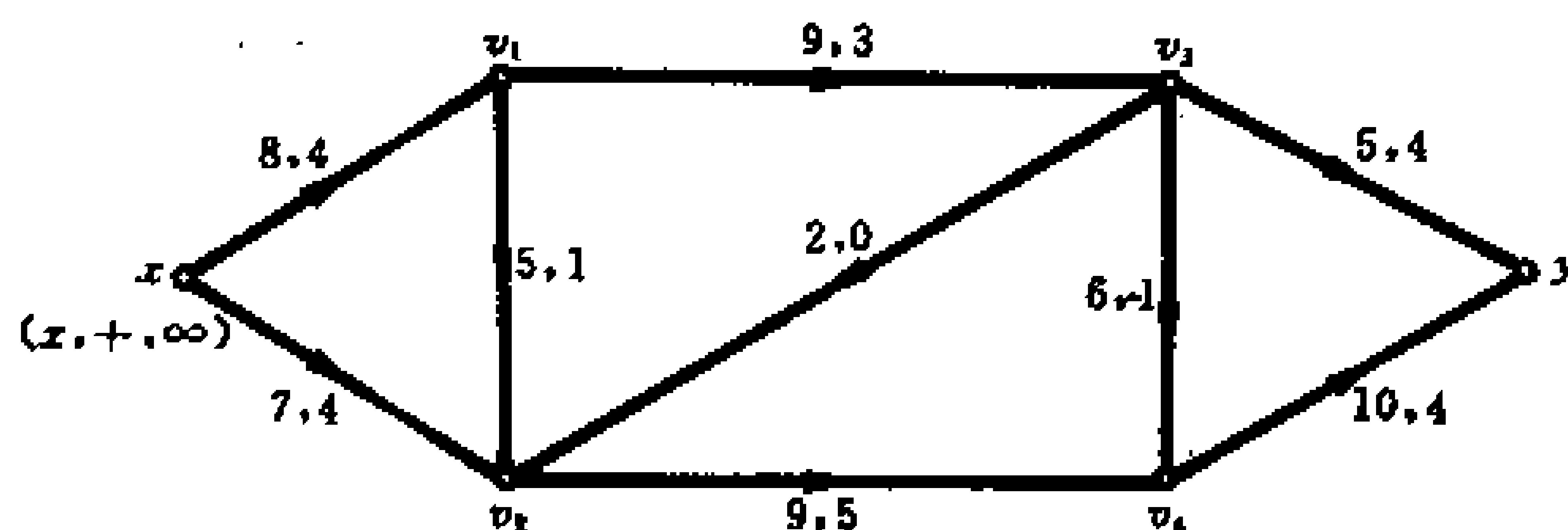


图 14.4-1

(2) 考察与 x 邻接的顶点 v_1 和 v_2(为了简单起见，下面我们用顶点的下标表示该顶点)。

对顶点 1，$(x,1)\in U$，且 $c(x,1)=8$，$f(x,1)=4$，所以

$$\varepsilon(1)=\min\{\infty,8-4\}=4$$

于是顶点 1 记成$(x,+,4)$；

对顶点 2，$(x,2)\in U$ 且 $c(x,2)=7$，$f(x,2)=4$，所以

$$\varepsilon(2)=\min\{\infty,7-4\}=3$$

于是顶点 2 标记成$(x,+,3)$。

与顶点 x 邻接的顶点均被标记，故 x 标记中的记号“＋”用小圆圈圈起来，这就是说，x 被标记且被检查(图 14.4-2)。

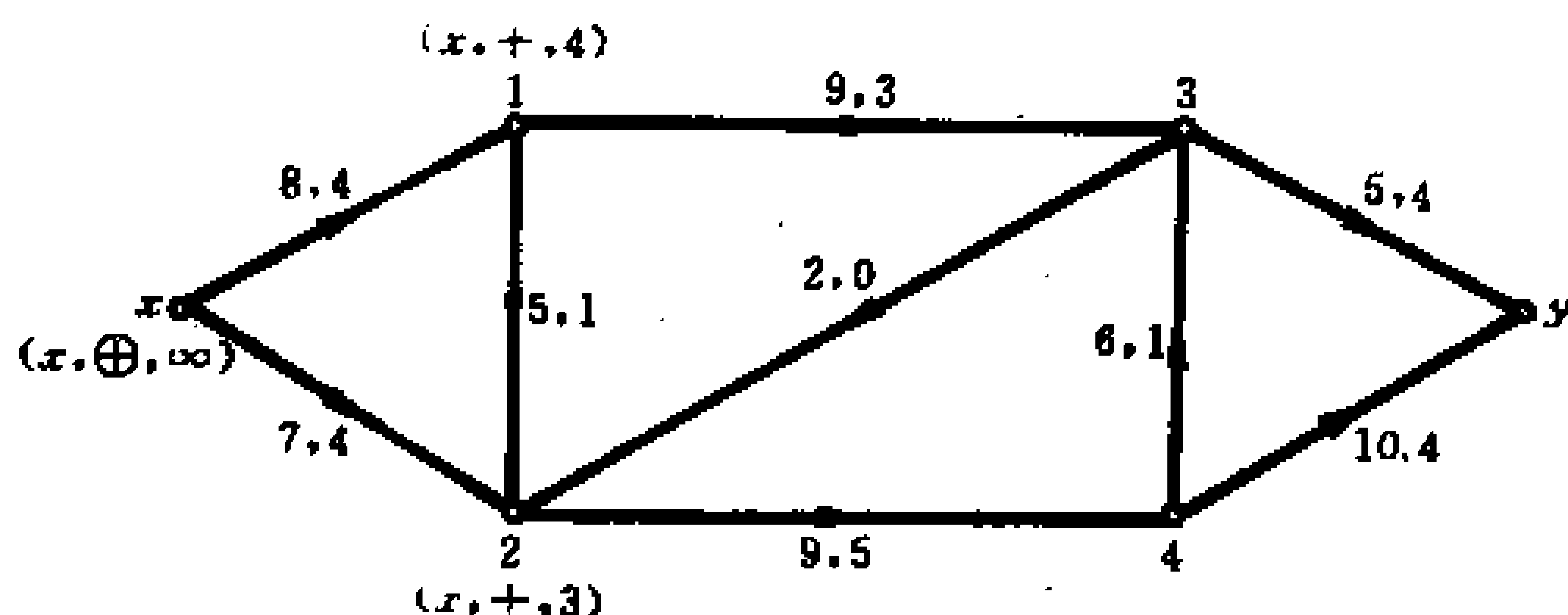


图 14.4-2

(3) 继续上面的过程，直到汇 y 被标记(图 14.4-3)。

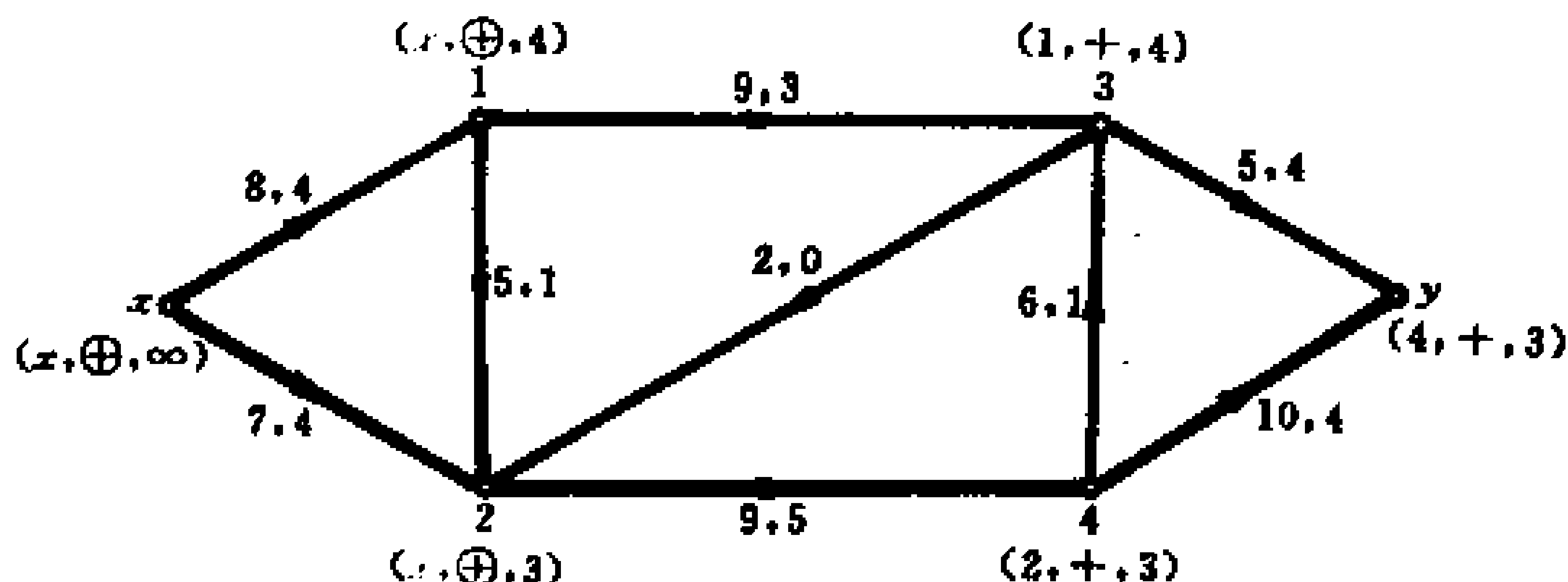


图 14.4-3

B. 增广过程

由标记过程找到一条可增广路：xv_2v_4y。

(1) 令 $v_4=y$

(2) y 的标记为(4，＋，3)故把弧(4，y)上的流值增加 $\varepsilon(y)=3$，依次把弧(2，4)，(x，2)上的流值增加 3。

(3) 去掉全部标记，得一网络(图 14.4-4)，再回到标记过程。

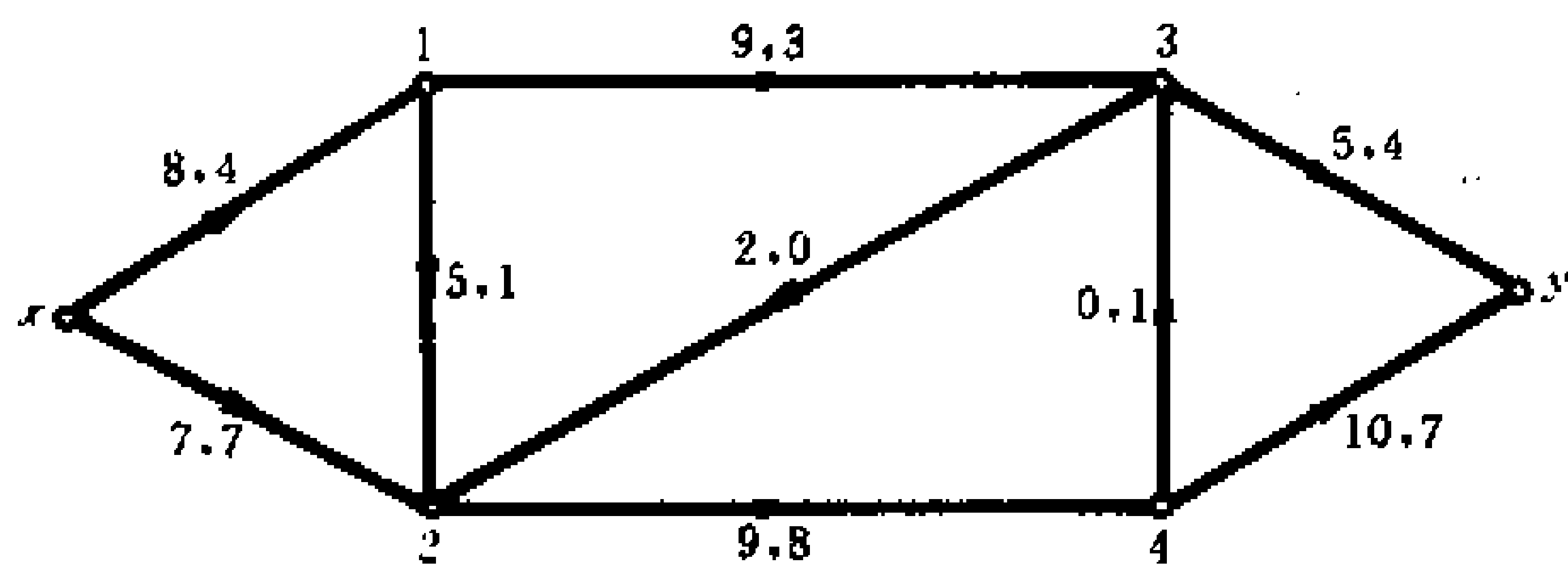
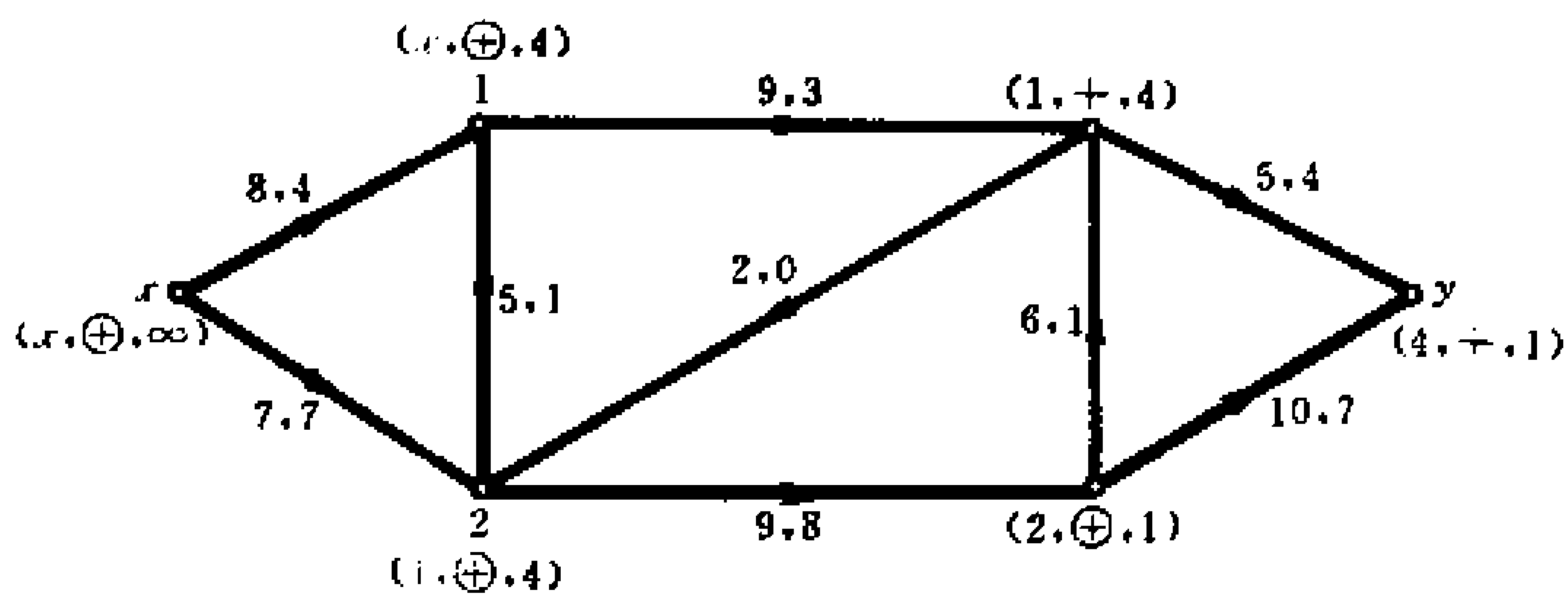
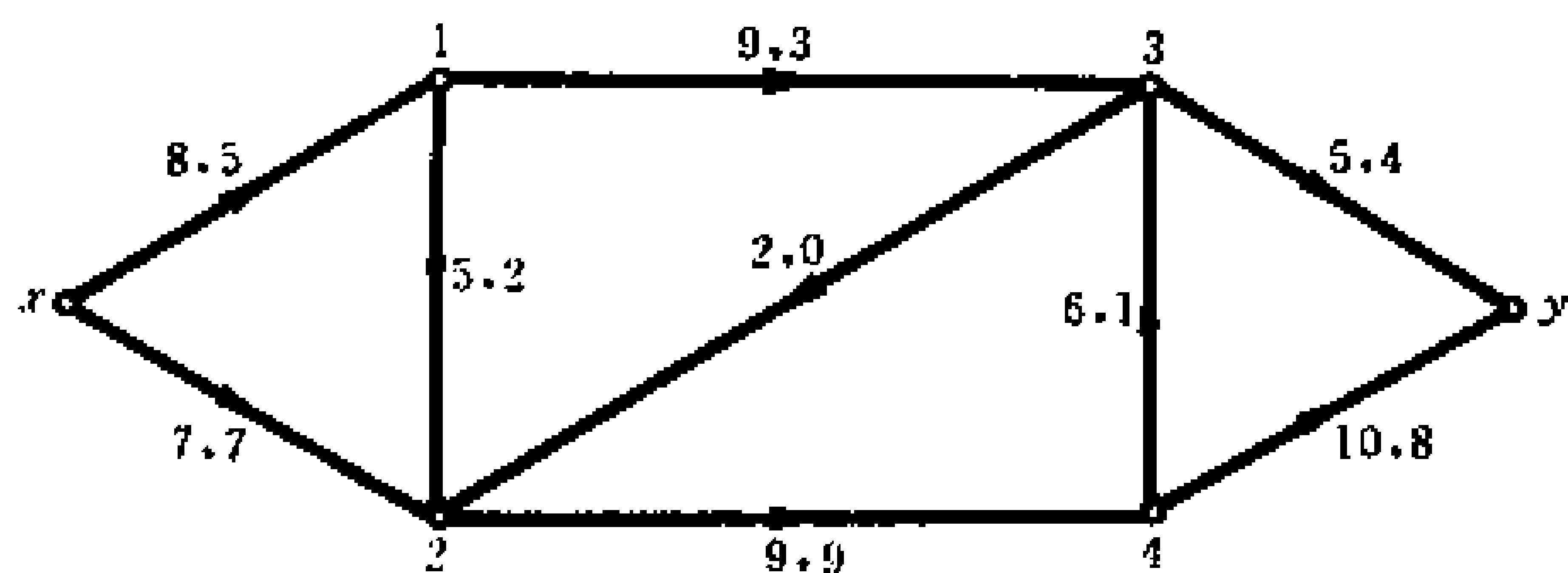


图 14.4-4

对图 14.4-4 所示的网络，由标记过程和增广过程可得图 14.4-5(*a*)和(*b*)。



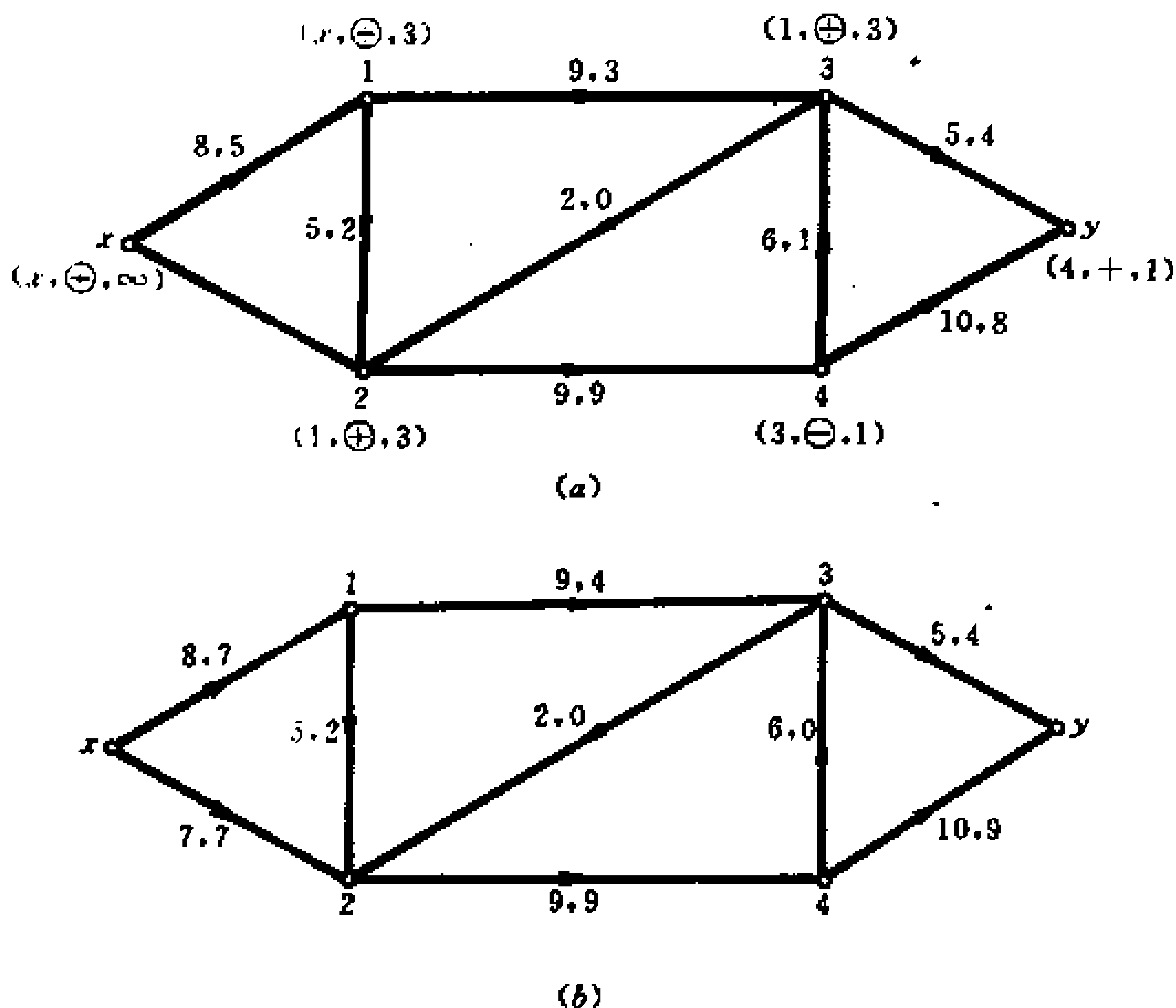
(*a*)



(*b*)

图 14.4-5

对图 14.4-5(b)所示的网络 N，由标记过程和增广过程可得图 14.4-6(a)和(b)。



(a)

(b)

图 14.4-6

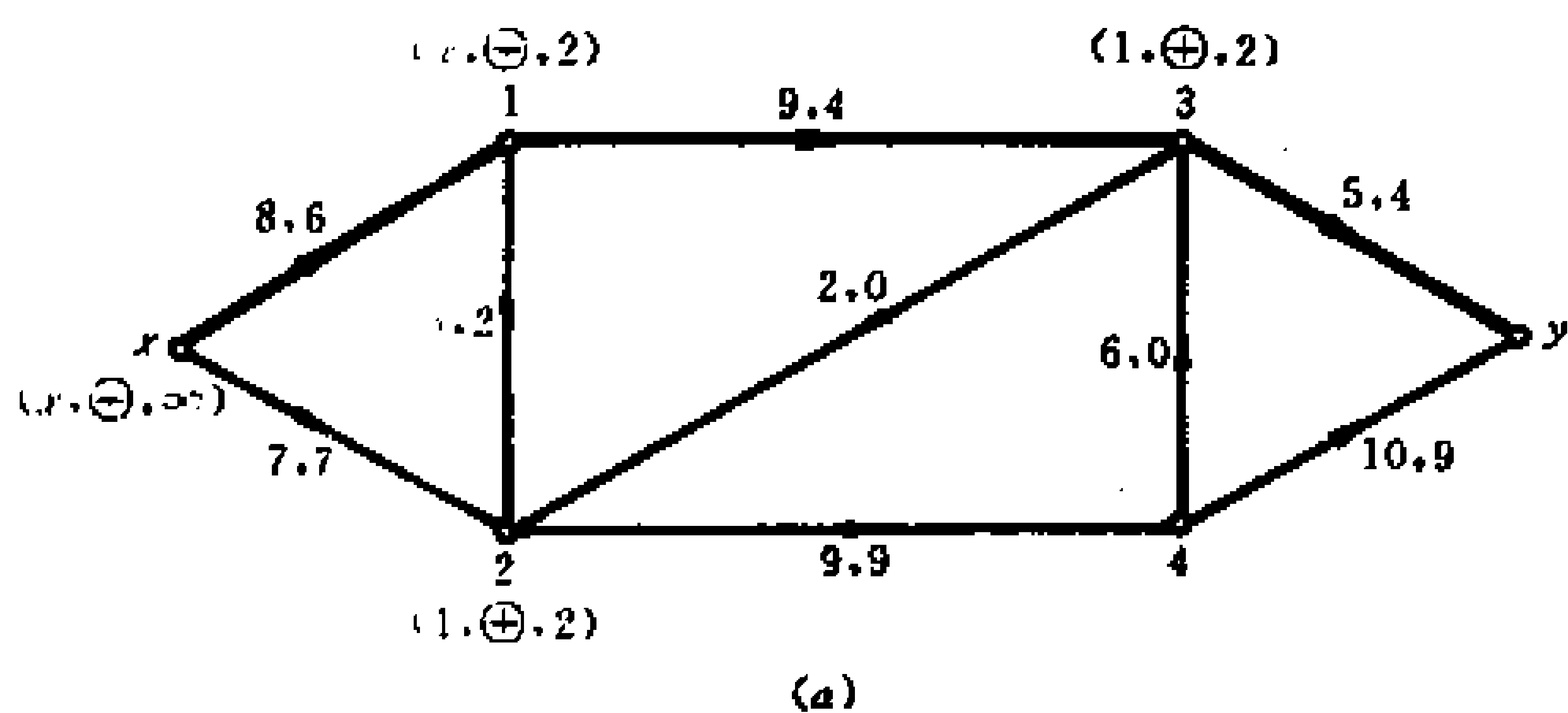
对图 14.4-6(b)所示的网络 N，由标记过程和增广过程可得图 14.4-7(a)，(b)。

最后，对图 14.4-7(b)所示的网络进行标记(图 14.4-8)。

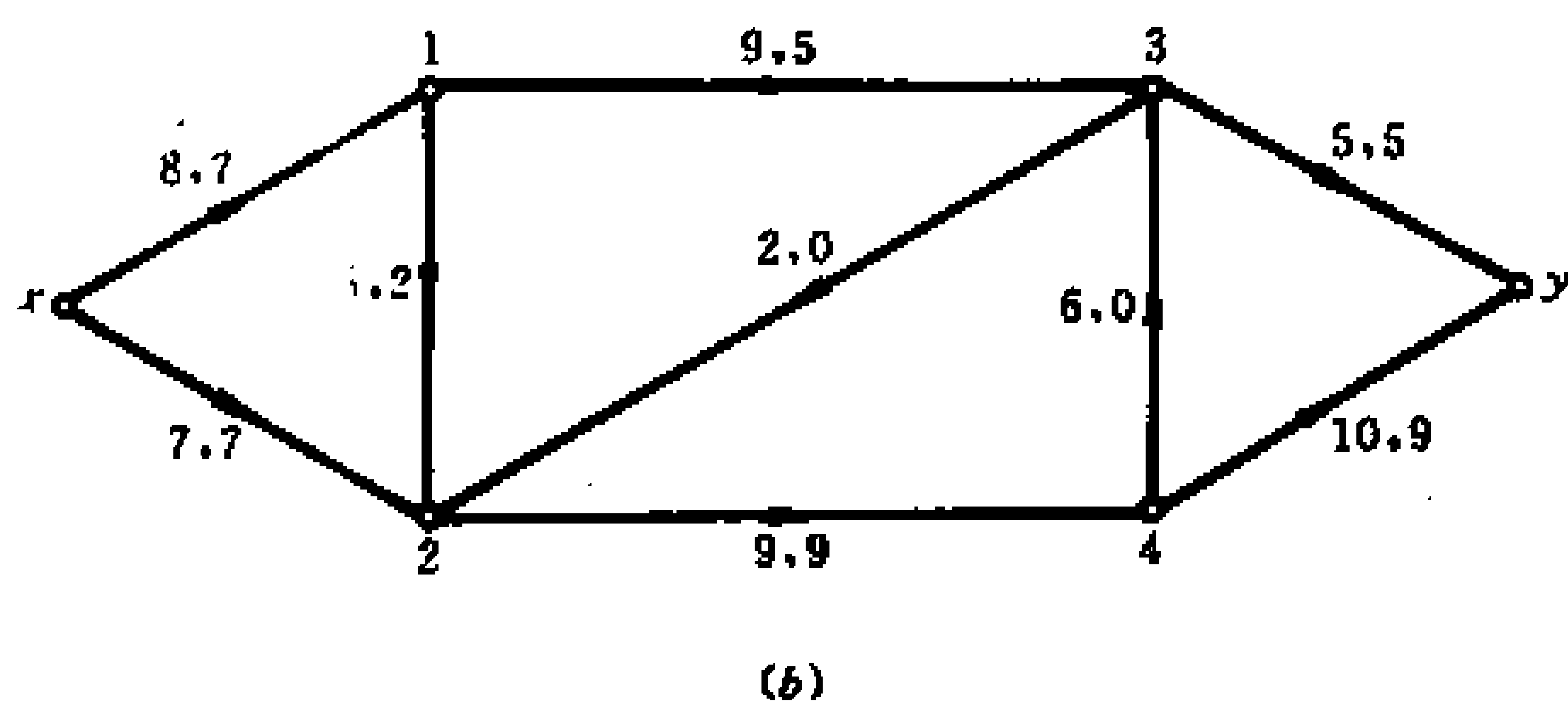
从图 14.4-8 可知，顶点 v_4 不能再被标记，故算法停止。

在此例中 $V_1=\{x,v_1,v_2,v_3\}$，$\overline{V}_1=\{v_4,y\}$。割$(V_1,\overline{V}_1)=\{(v_2,v_4),(v_3,y)\}$即为最小割且 $c_{\min}(V_1,\overline{V}_1)=14$，于是 $f_{\max}=14$。

从以上整个过程来看，当一个顶点被标记，被检查后，在这之后的过程中就完全可以不再加以考虑，所以这种标记法是有效的。某一顶点 u 得到标记，则表示由 x 到 u 之间的路为一条可增广路的前面一段。自 x 到 u 可能存在许多这种路，但只要找到一条就已足够。如果 y 被标



(a)



(b)

图 14.4-7

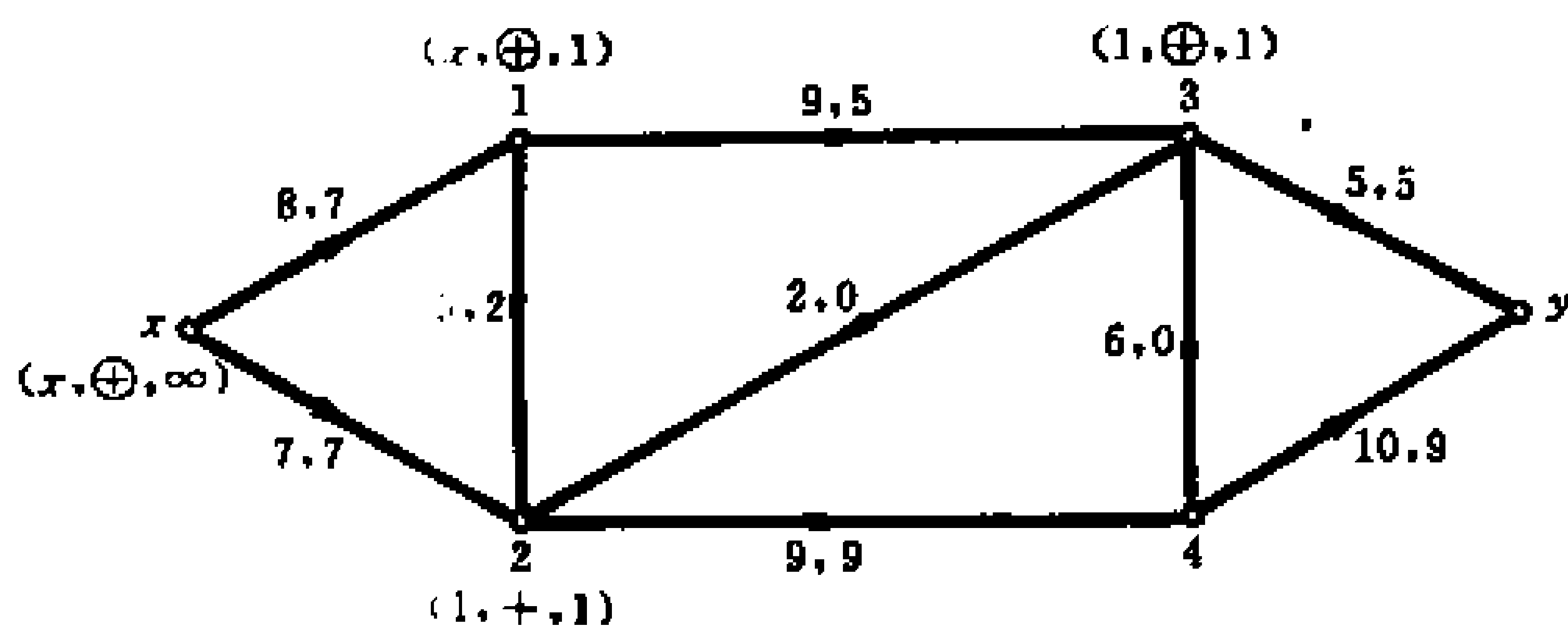


图 14.4-8

记，则说明自 x 到 y 存在一条可增广路，流值的改变则可按 $\varepsilon(y)$ 来确定。

我们假定弧的容量为正整数，如果起始的流是正整数，则当 y 被标

记后，流值就可以增加一个正整数。因此算法是有限的。因为每次流值至少能增加一个单位。所以最终获得的最大流也将是整数的。不过应当指出，这种受整数限制的条件是由于我们用来证明定理 14.3.1 所用的方法造成的。

最后，我们简单地谈一谈最大流最小割定理的推广。

1. 多个源和汇的网络

如果一个网络有多个源 $v_{x_1}, v_{x_2}, \cdots, v_{x_r}$ 和多个汇 $v_{y_1}, , v_{y_2}, , v_{y_s}$，且假设都是收和发同一种物质。对于这种网络我们放入两个顶点 v_x 和 v_y(图 14.4-9)。

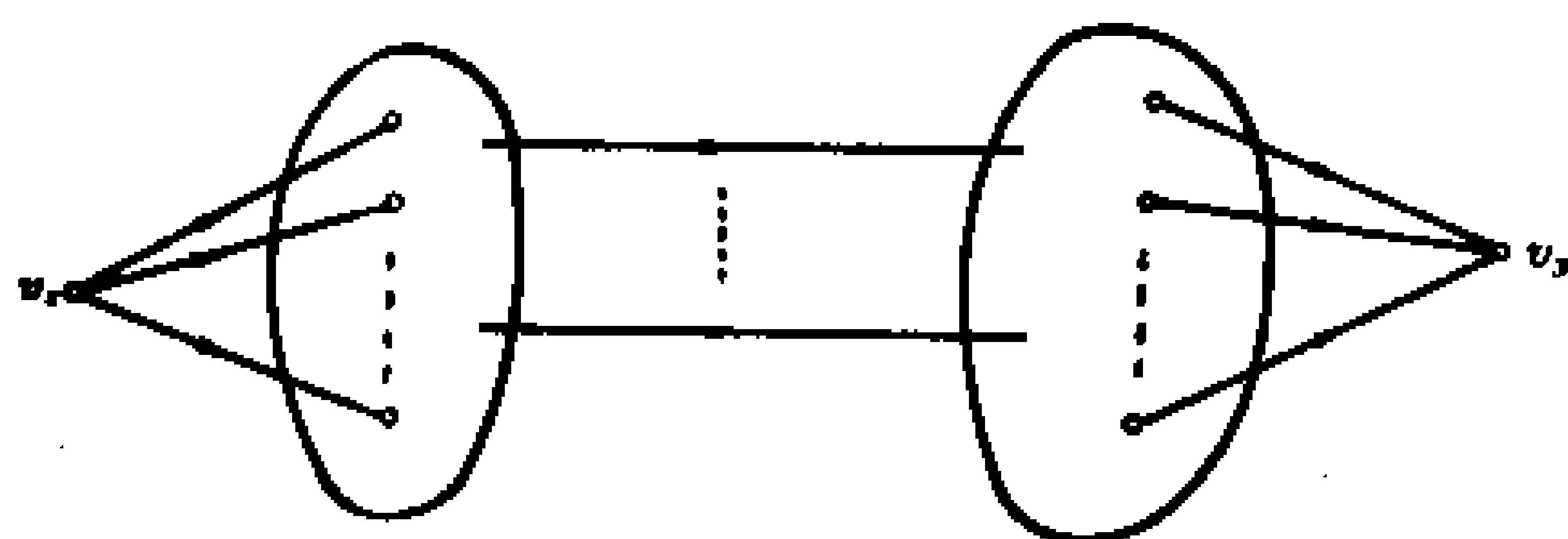


图 14.4-9

v_x 作为新的源，v_y 作为新的汇。连接新的弧(v_x, v_{x_1})，(v_x, v_{x_2})，…，(v_x, v_{x_r}) 和(v_{y_1}, y)，(v_{y_2}, y)，…，(v_{y_s}, y)，指定它们的容量均为∞。这样就把原来的网络化为一个源和一个汇的网络。在求得最大流后，通过 v_{x_i}的物资均由 v_{x_i}发送，经由 v_{y_i}的物资均由 v_{y_i}收留。

2. 顶点具有容量的网络

假如在一个网络上不仅弧具有容量，而且顶点也具有容量，顶点的容量受到限制，而弧上的容量不受限制。对于这种

类型的网络不难把它变成我们已经讨论过的网络。具体的过程是：把每个顶点 v_i 分为两个顶点 v'_i 和 v''_i，同时在 v'_i 和 v''_i 之间连一条弧 (v'_i, v''_i)，并且约定所有可达 v_i 的顶点都改为到达 v'_i；而把所有的弧 (v_i, v_j) 改为 (v''_i, v_j)，并给弧 (v'_i, v''_i) 以容量 $c(v'_i, v''_i) = c(v_i)$，而将原有各弧均令其容量为 $+\infty$。这样，就可以把顶点也具有容量的网络上的最大流问题化为我们已经讨论过的网络上的问题了（图 14.4-10）。

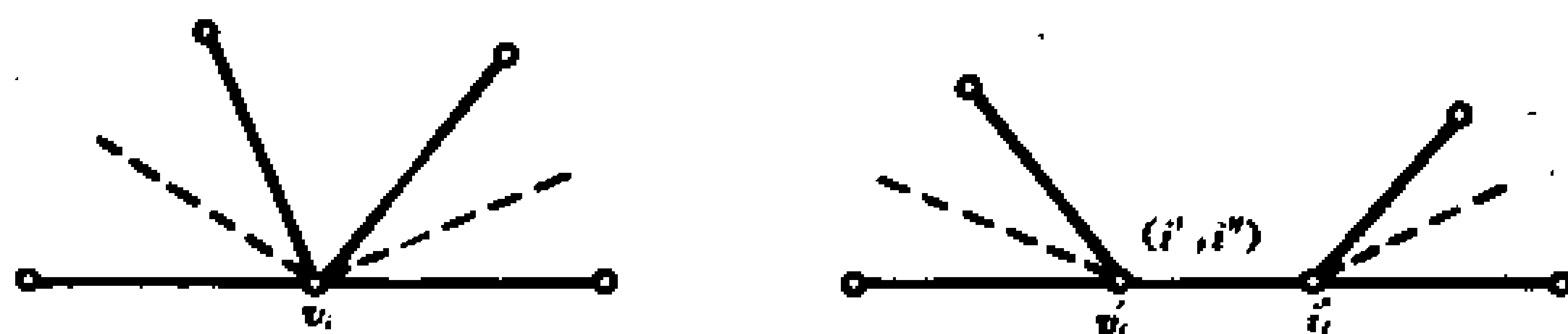


图 14.4-10

习题十四

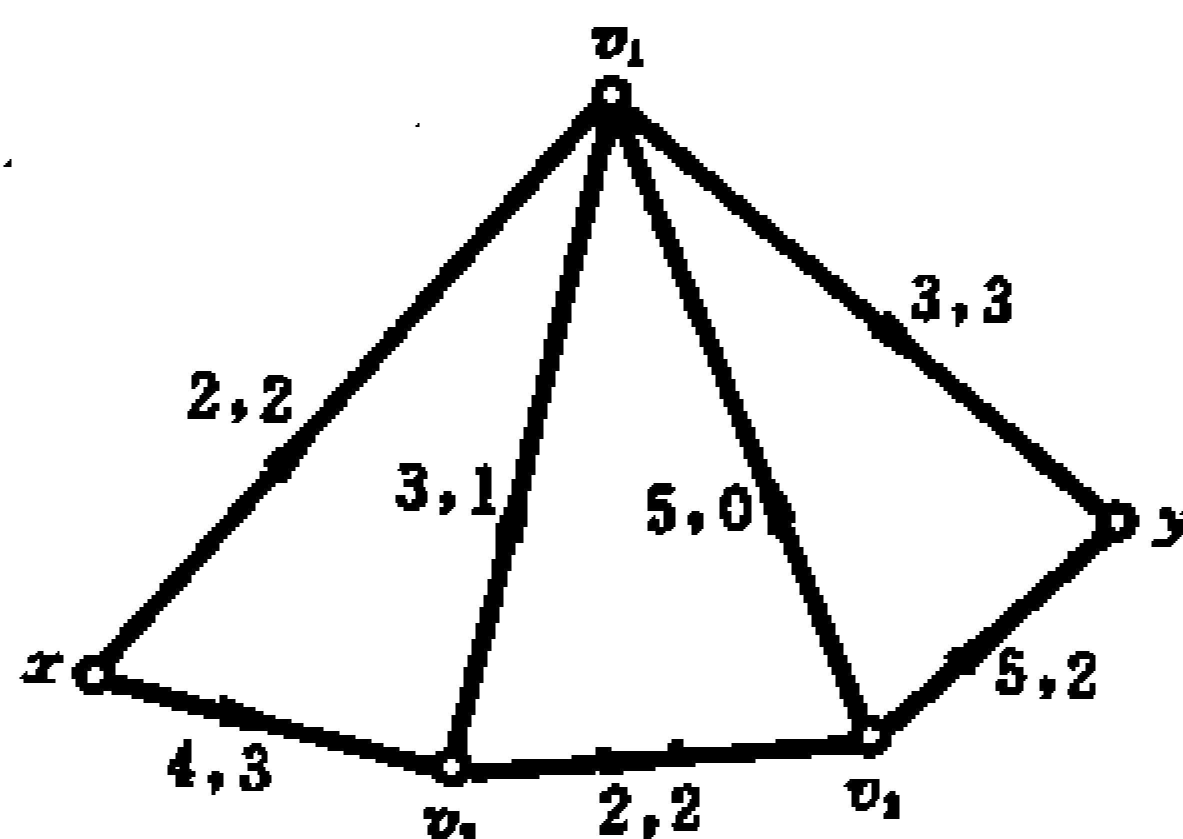
14-1 证明：对网络 N 中的任一流 f 和 $X \subseteq V(N)$，均有

$$\sum_{v \in X} [f(v, V) - f(V, v)] = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X)$$

14-2 若 (V_1, V_2) 和 (V'_1, V'_2) 都是网络 N 的最小割，证明：$(V_1 \cup V'_1, \overline{V_1 \cup V'_1})$ 和 $(V_1 \cap V'_1, \overline{V_1 \cap V'_1})$ 均为 N 的最小割。

14-3 证明：若 N 中不存在有向 (x, y) 路则最大流的值和最小割的容量均等于零。

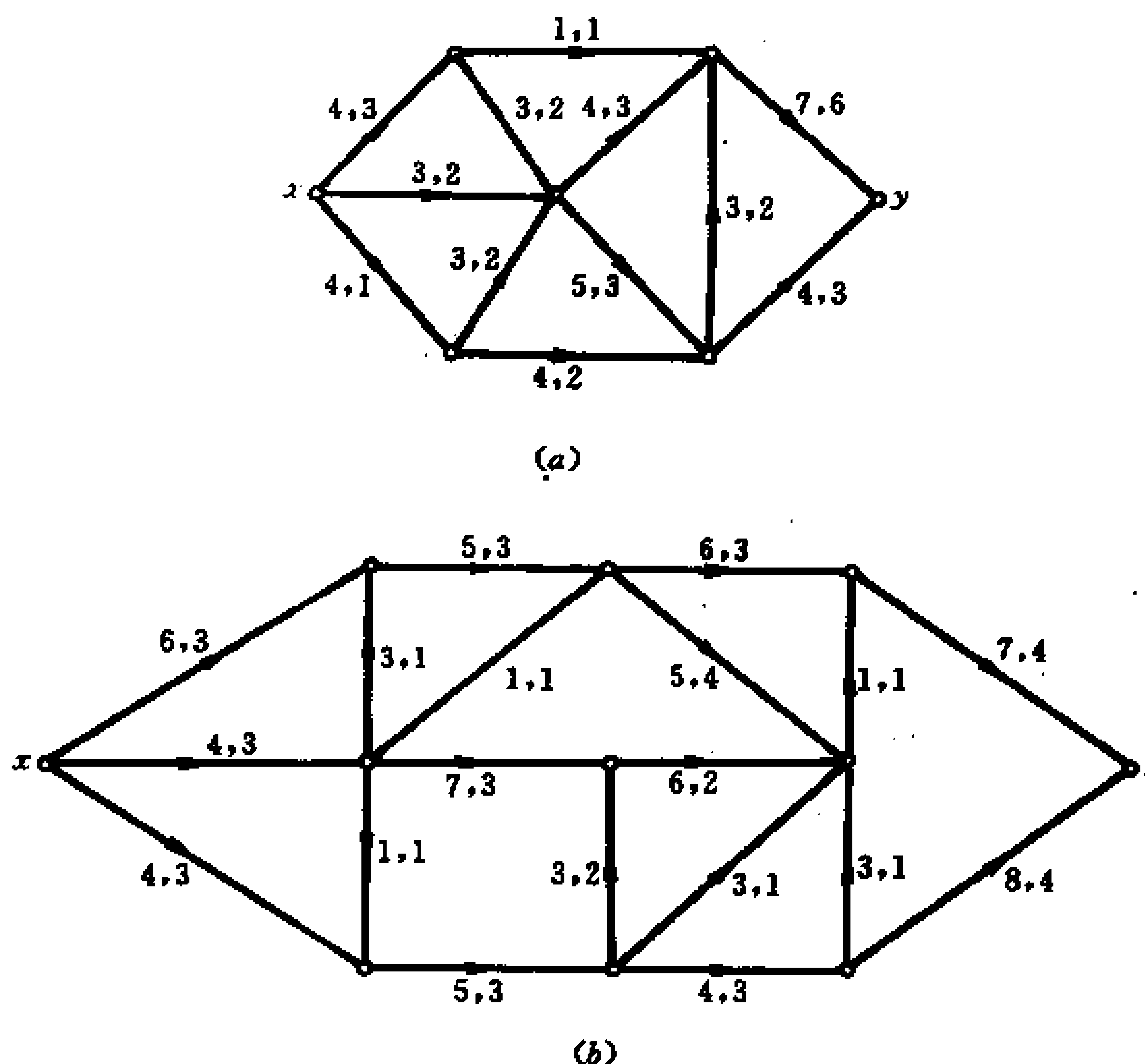
14-4 求网络 N 中



题 14-4 图

(*a*) 所有的割；(*b*) 最小割的容量。

14-5 求下述网络的最大流。



题 14-5 图

14-6 设有张三、李四、王二，赵五四人和小提琴，大提琴，钢琴和吉他四种乐器、张三善于拉小提琴，大提琴和吉他；李四善于拉小提琴和大提琴；王二善于拉大提琴和钢琴；赵五只会弹吉他。今假设四人同台演出，每人演奏一种乐器，问四人同时各演奏一种乐器时，所有可能的方案。试把此问题化为最大流问题。

14-7 证明：标记过程停止的充要条件是

$$f_{x,y} \geqslant c_{\min}(K)$$

附录 A　流图和信号流图

A.1　流　　图

流图是一类每条弧都带有权的有向图，和这种图相联系的行列式的非零项不对应生成树，而是对应圈或圈的顶点不重并，下面我们来给出流图的定义。

设 D 为一有向图，$W=(w_{ij})$是一个 n 阶矩阵，如果

(1) D 有 n 个顶点

(2) D 中从顶点 i 到顶点 j 的弧的权是 w_{ji}，$1\leqslant i,j\leqslant n$，则称 D 为对应于矩阵 W 的**流图**。

为方便起见，在下面的讨论中，w_{ji}即表示弧$(i、j)$又表示这条弧的权。

例如，与矩阵

$$W=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

相对应的流图由 9 条弧和 3 个顶点组成。如图 A.1-1 所示。

如果 D 是对应于矩阵 W 的流图，那么我们可以直接从流图 D 求得对应的矩阵 W 的行列式。

由行列式的定义，有

$$|W|=\sum\delta_{j_1j_2\cdots j_n}w_{1j_1}w_{2j_2}\cdots w_{nj_n} \qquad (A.1\text{-}1)$$

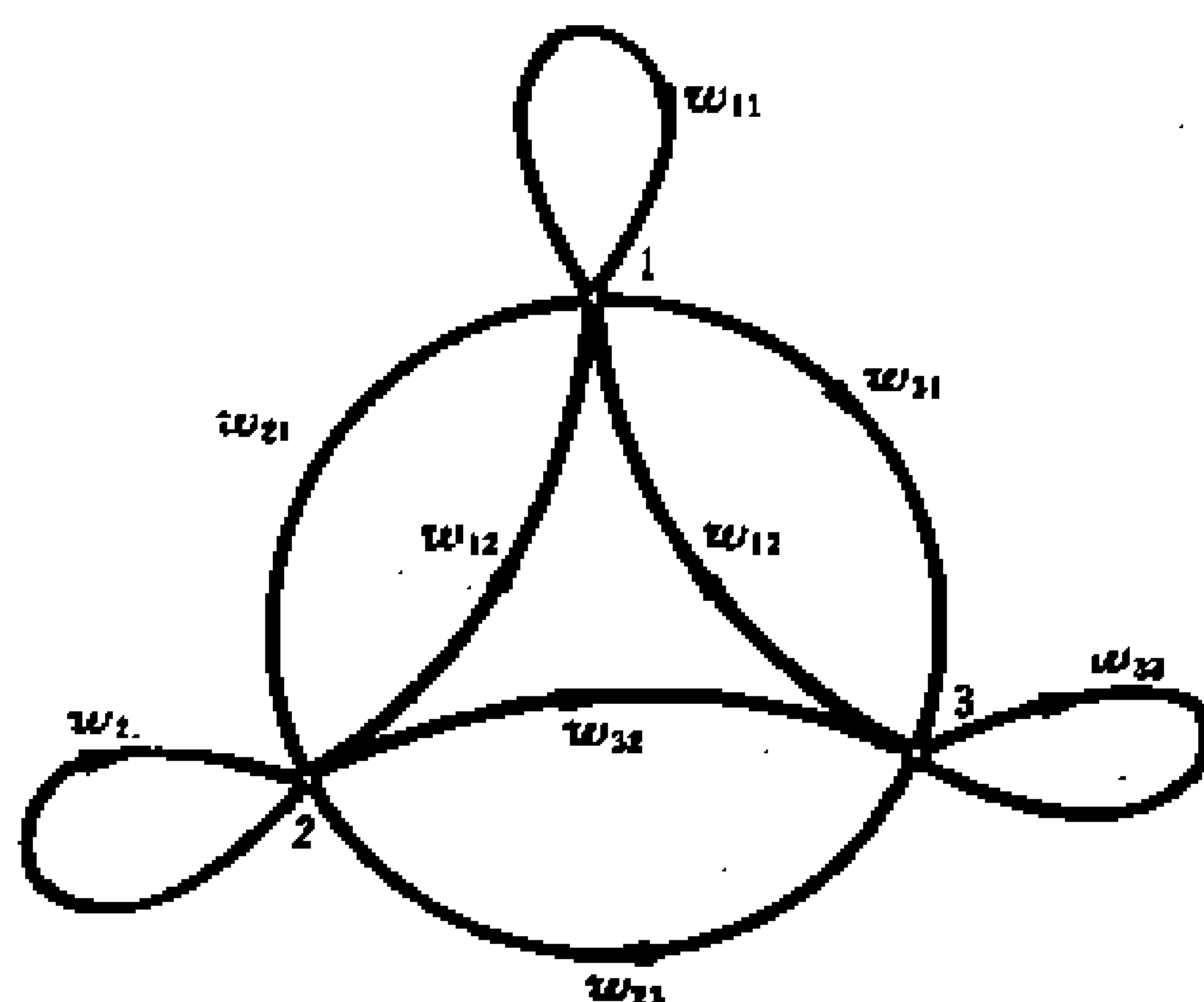


图 A.1-1

其中

$$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n}=\begin{cases}0, & \text{当}\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ j_1 j_2\cdots j_n\end{pmatrix}\text{不是置换时}\\ 1, & \text{当}\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ j_1 j_2\cdots j_n\end{pmatrix}\text{是偶置换时}\\ -1, & \text{当}\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ j_1 j_2\cdots j_n\end{pmatrix}\text{是奇置换时}\end{cases}$$

设 g 是由弧 w_{1j_1}、w_{2j_2}，…，w_{nj_n} 组成的有向图 D 的子图，这里弧 w_{kj_k} 是以顶点 j_k 为起点，顶点 k 为终点。

如果与弧 w_{1j_1}，w_{2j_2}，…w_{nj_n} 的下标对应的变换

$$\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ j_1 & j_2\cdots j_n\end{pmatrix} \tag{A.1-2}$$

是一个置换，那么 g 中每个顶点在置换式(A.1-2)的第一行和第二行中各仅出现一次。因此，和 g 中每个顶点关联的恰有两个弧，而且对每个顶点 v，有

$$\deg^+(v)=\deg^-(v)=1$$

所以，若 g 是连通的，则 g 是有向圈。

若子图 g 由 k 个分支组成，则每个分支是有向圈，而 g 则是有向圈的点不重并。

定义 包含给定有向图所有顶点的有向圈或有向圈的点不重并，称为 **P-集环**。

因为流图 D 的子图 g 包含 D 的所有顶点，所以，若

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots n \\ j_1 & j_2\cdots j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换时，则由 $w_{1j_1}, w_{2j_2}, \cdots w_{nj_n}$ 组成的子图 g 是一个 P-集环。

反之，设 g 是 P-集环，于是 g 由 n 条弧组成。如果这 n 条弧为 $w_{i_1j_1}, w_{i_2j_2}, \cdots, w_{i_nj_n}$，那么下标 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 和 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 必是 $(1, 2\cdots, n)$ 的置换，因而

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换。所以乘积 $w_{i_1j_1}w_{i_2j_2}\cdots w_{i_nj_n}$ 是式(A. 1-1)中的一项.于是

$$|W| = \sum \varepsilon_j P\text{-集环 } D_j \text{ 的乘积} \qquad \text{(A. 1-3)}$$

这里 P-集环 D_j 的乘积是指 D_j 中弧的权的乘积，ε_j；为 1 或 -1 是根据 $\delta_{j_1j_2\cdots j_n}$ 来确定。

下面来讨论 ε_j 的符号。

设弧 $w_{i_1j_1}, w_{i_2j_2}, \cdots w_{i_nj_n}$ 组成 P-集环 D_j 是 k 个有向圈的点不重并，当 $k=1$ 时，D_j 是一条有向圈，不失一般性。
设

$$(w_{i_{p_1}j_{p_1}}, w_{i_{p_1+1}j_{p_1+1}}, \cdots, w_{i_{p_1+r_1}j_{p_1+r_1}}),$$

$$(w_{i_{p_2}j_{p_2}}, w_{i_{p_2+1}j_{p_2+1}}, \cdots, w_{i_{p_2+r_2}j_{p_2+r_2}}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$(w_{i_{p_k}j_{p_k}}, w_{i_{p_k+1}j_{p_k+1}}, \cdots, w_{i_{p_k+r_k}j_{p_k+r_k}}),$$

是 k 个有向圈，则

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & i_{p_s+1}\cdots i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & j_{p_s+1}\cdots j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

是置换，$s=1,2,\cdots,k$。其中 $i_{p_s}, i_{p_s+1}, \cdots, i_{p_s+r_s}$ 和 $j_{p_s}, j_{p_s+1}, \cdots j_{p_s+r_s}$ 表示有向圈中所有顶点。

因为我们总可以通过安排有向圈的弧的次序使得序列

$$(w_{i_{p_s}j_{p_s}}, \cdots, w_{i_{p_s+1}j_{p_s+1}}, \cdots, w_{i_{p_s+r_s}j_{p_s+r_s}})$$

是一闭链，闭链的方向和有向圈的方向一致，且有

$$i_{p_s+u-1} = j_{p_s+u}, u = 1,2,\cdots,r_s$$

$$i_{p_s+r_s} = j_{p_s}$$

所以

$$\begin{pmatrix} i_{p_s}\cdots i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s}\cdots j_{p_s+r_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_s} & i_{p_s+1}\cdots i_{p_s+r_s-1} & i_{p_s+r_s} \\ i_{p_s+r_s} & i_{p_s}\cdots i_{p_s+r_s-2} & i_{p_s+r_s-1} \end{pmatrix}$$

(A.1-4)

把置换式(A.1-4)的第二行进行 r_s-1 次对换，就可以使第二行等于第一行。

由假设知

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_n \\ j_1 & j_2\cdots j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_1}\cdots i_{p_1+r_1} \\ j_{p_1}\cdots j_{p_1+r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{p_2}\cdots i_{p_2+r_2} \\ j_{p_2}\cdots j_{p_2+r_2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_{p_k}\cdots i_{p_k+r_k} \\ j_{p_k}\cdots j_{p_k+r_k} \end{pmatrix}$$

(A.1-5)

对

$$\begin{pmatrix} i_{p_s}\cdots i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s}\cdots j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

的第二行作 r_s-1 次对换就可以使它和第一行一样，对

$$\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

的第二行作 $(r_1-1)+(r_2-1)+\cdots+(r_s-1)$ 次对换可使第二行和第一行一样. 其中 r_s 是对应于

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} \cdots i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} \cdots j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

的有向圈中的弧数。

因为

$$(r_1-1)+(r_2-1)+\cdots+(r_k-1)=r_1+r_2+\cdots+r_k-k=n-k$$

所以式(A.1-3)中的符号 ε_j 是

$$\varepsilon_j = (-1)^{n+k_j}$$

于是

$$|W| = (-1)^n \sum_{(j)} (-1)^{k_j} P\text{-集环 } D_j \text{ 乘积} \quad \text{(A.1-5)}$$

其中 k_j 是 P-集环 D_j 中有向圈数。

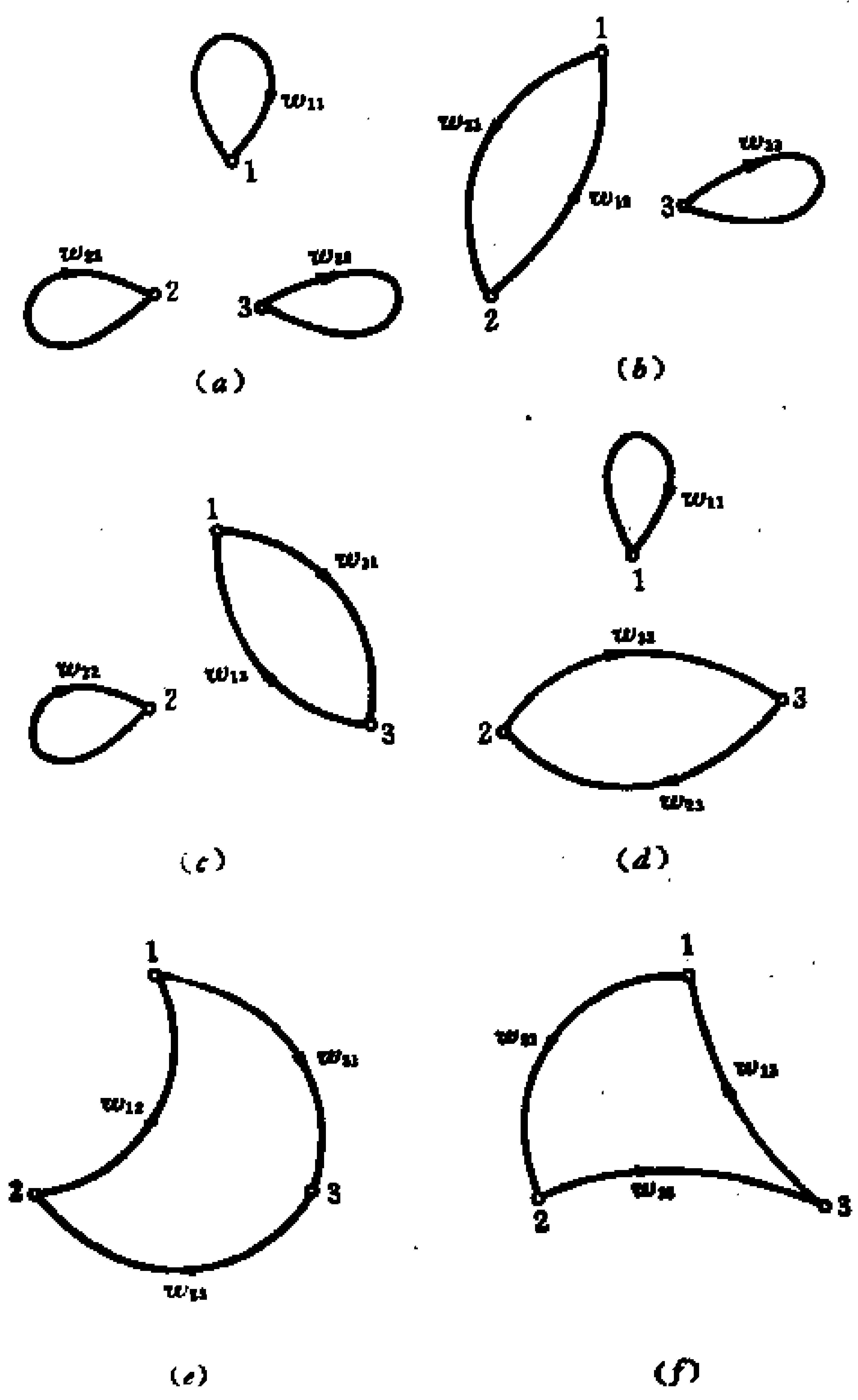
例如图 A.1-1 所示的流图 D，它的对应矩阵是

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

由式(A.1-5)，W 的行列式是

$$\begin{aligned} |W| = (-1)^3 [& (-1)^3 w_{11}w_{22}w_{33} + (-1)^2 w_{12}w_{21}w_{33} \\ & + (-1)^2 w_{31}w_{13}w_{22} + (-1)^2 w_{23}w_{32}w_{11} \\ & + (-1) w_{12}w_{23}w_{31} + (-1) w_{13}w_{32}w_{21}] \end{aligned}$$

它们对应的子图如图 A.1-2 所示。



w_{11}
1
w_{22}
2
3
w_{33}
(a)
1
w_{21}
w_{12}
2
w_{33}
3
(b)
1
w_{31}
w_{13}
3
w_{22}
2
(c)
w_{11}
1
w_{32}
2
3
w_{23}
(d)
1
w_{31}
w_{12}
2
3
w_{23}
(e)
1
w_{21}
w_{13}
w_{32}
2
3
(f)

图 A. 1-2

A.2 信号流图

信号流图是顶点和弧都带有权的有向图。它是用图的结构表示线性方程组中诸变量间关系的一种方法。对于许多物理系统来说，不要写出方程组，就可以直接作出信号流图，由信号流图按一定规则可写出对应方程组的解。从数学观点来讲，信号流图是解线性方程组的一种方法。由于这种方法直接和简便，在工程系统，特别是在线性系统中得到广泛的应用，成为分析线性系统的一种有力工具。

我们先来讨论两个例子，然后给出信号流图的定义。

例 A.2.1 设有方程 $y=ax$，其中 x 和 y 是变量，a 是常数。用顶点 x 表示变量 x，用顶点 y 表示变量 y，这种带有与变量相关的顶点称为**信号**。连接 x 和 y 的弧 $(x、y)$ 带有一个与它相关的量 a，称为弧 $(x、y)$ 上的**增益(或传输量)**。这样，方程 $y=ax$ 就可以顶点和弧都带有权的有向图来表示(图 A.2-1)



图 A.2-1

图 A.2-1 所示的有向图称为方程 $y=ax$ 的信号流图。

例 A.2.2 设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \tag{A.2-1}$$

把方程组(A.2 1)改写成

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11} + 1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_3 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + (x_{23} + 1)x_3 \end{cases} \tag{A.2-1}$$

这种改写遵循一个规定：把方程的一个变量放在等号一边作为因变量，且在方程组中作为因变量只出现一次，在别的方程中作为自变量出现。

在被改写的方程中，该变量即可作为因变量同时又可为自变量。

对于方程组(A. 2-2)，由 x_1 到 x_1 作一个弧(实际上是环)(x_1,x_1)，增益是 $a_{11}+1$，由 x_2 到 x_1 作一弧(x_2,x_1)，增益是 a_{12}，由 x_3 到 x_1 作一弧(x_3,x_1)，增益是 a_{13}，由 x_1 到 x_3 作一弧(x_1,x_3)增益是 a_{21}，由 x_2 到 x_3 作一弧(x_2,x_3)，增益是 a_{22}，由 x_3 到 x_3 作一弧(x_3,x_3)，增益是 $a_{23}+1$。这样我们得到一个顶点 x_1,x_2,x_3 带有权(它的权分别是 x_1,x_2,x_3)和弧也带有权的有向图(图 A. 2-2)，这个有向图就是方程组(A. 2-2)的信号流图。

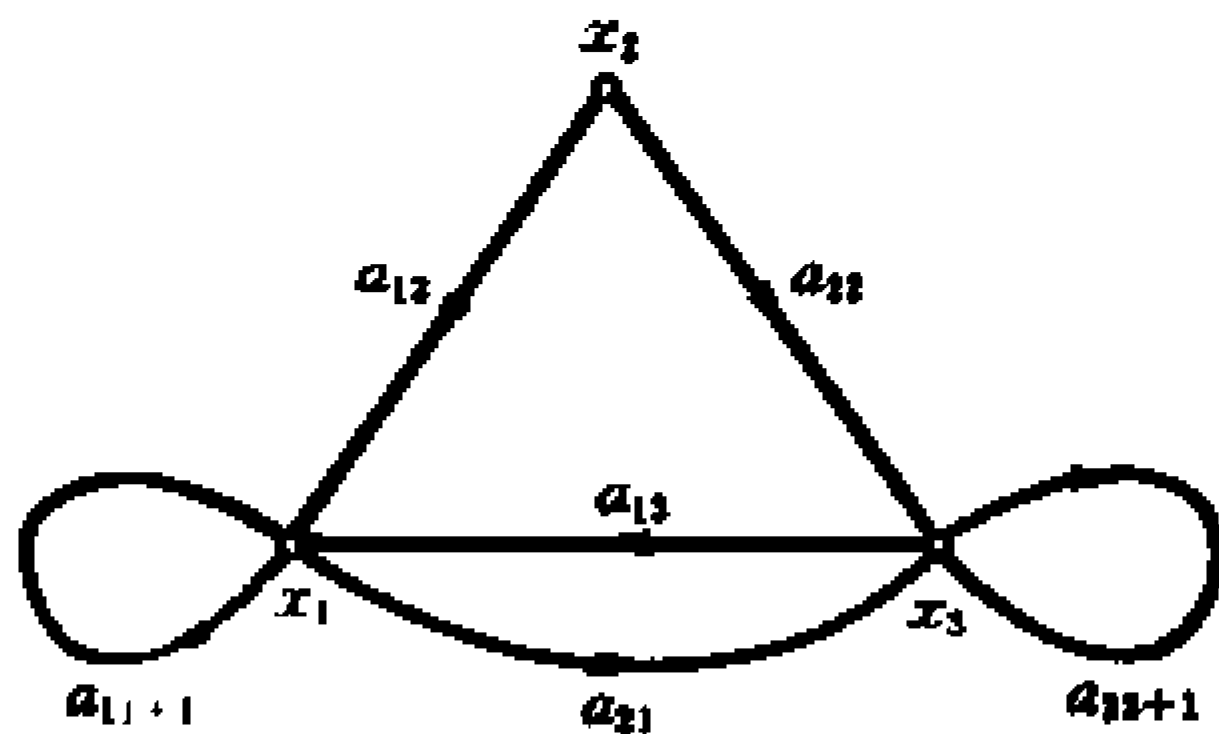


图 A. 2-2

方程组(A. 2-2)也可以写成

$$
\begin{cases}
x_1=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 \\
x_3=-\dfrac{a_{21}}{a_{23}}x_1-\dfrac{a_{22}}{a_{23}}x_2
\end{cases}
\tag{A. 2-3}
$$

方程组(A. 2-3)的信号流图如图 A. 2-3 所示。

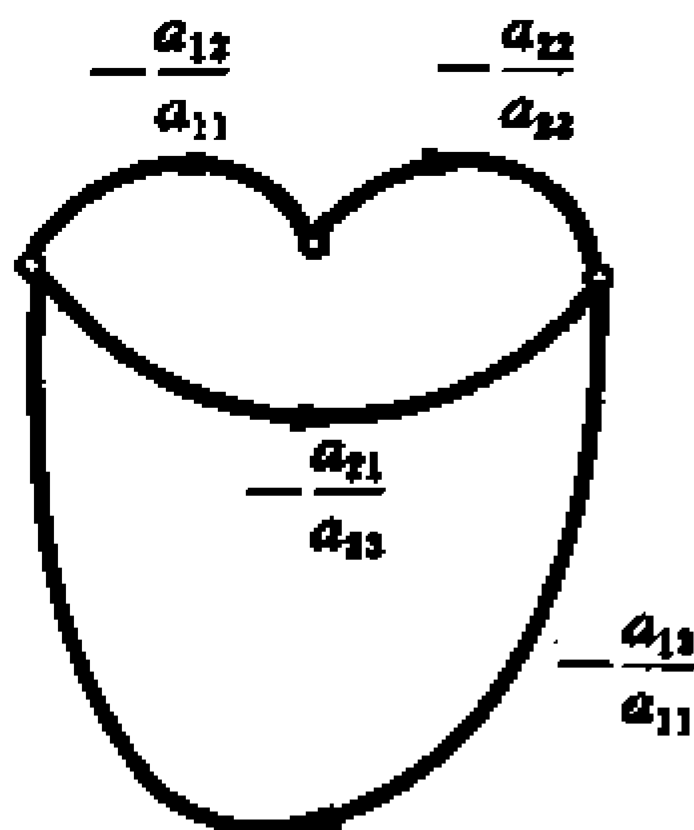


图 A. 2-3

图 A. 2-2 和图 A. 2-3 这两个信号流图虽然不同，但它们所表示的方程组中变量间的关系是相同的。

下面我们来给出信号流图的定义。

定义 A.2.1 设有方程组

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j (1 \leqslant i \leqslant r) \qquad (\text{A.2-4})$$

用一个顶点和弧带有权的有向图 D 来表示它，其中

(1) 每个顶点 i 有权 x_i；①

(2) 若 $m_{ij} \neq 0$，则有一条自顶点 j 到顶点 i 的弧，若 $m_{ij} = 0$，则顶点 j 到 i 不存在弧；

(3) 和顶点 i 相关联，指向 i 的弧的权为 m_{ij}。

则称有向图 D 为方组(A.2-4)的**信号流图**。

需要指出的是，从应用上来讲，信号流图的顶点表示物理量，弧表示物理量间的关系，这与有向图正好相反。有向图的弧表示物理量，顶点表示它们间的关系。但是这种差别不是本质上的。

下面我们来讨论如何通过信号流图求解方程组的问题，这个问题要涉及到流图的简化规则。

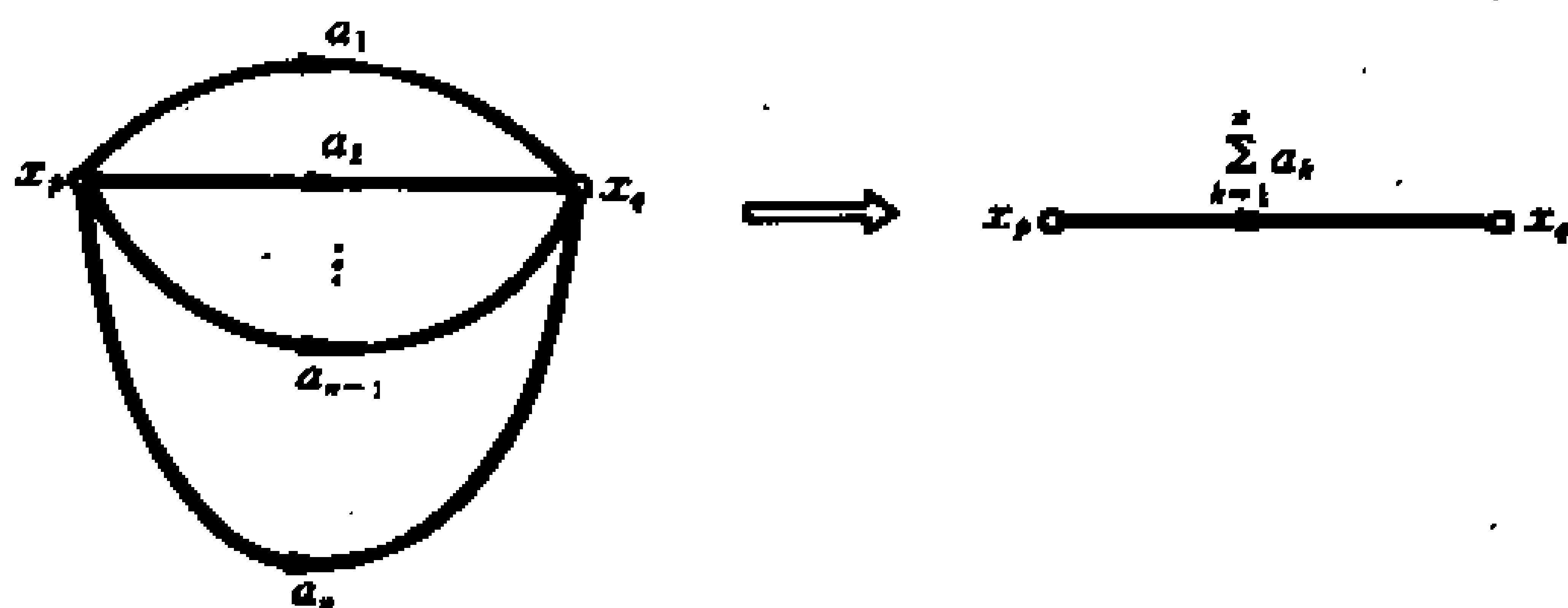


图 A.2-4

信号流图的基本代数规则：

---

① 有时为了方便，常用变量 x_i 表示顶点 i。

R_1. **加法规则**

两个顶点间 m 个同向弧可以用一条与它们同向的弧来代替，弧的增益为 m 个同向弧增益的和(图 A. 2-4)。

加法规则可由相应的线性方程组的恒等关系证明。事实上，由顶点 x_q 的方程可得

$$x_q = \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{n} m_{qk}x_k + \sum_{s=1}^{m} a_s x_p$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}} m_{qk}x_n + (\sum_{s=1}^{m} a_s)x_p$$

R_2. **乘法规则**

$m+1$ 个顶点 $x_k, x_1, x_2, \cdots, x_m$，若有弧$(x_k, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{m-1}, x_m)$相连，则可用弧$(x_k, x_m)$代替，弧$(x_k, x_m)$的增益为弧$(x_k, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{m-1}, x_m$ 增益的乘积(图 A. 2-5)



图 A. 2-5

因为

$$x_1 = a_1 x_k$$

$$x_2 = a_2 x_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_m = a_m x_{m-1}$$

依次把前一个等式代入后一个等式中，则有

$$x_m = a_1 a_2 \cdots a_m x_k$$

R_3. **环消去法则**

对于有 i_k 条以 x_p 为终点的弧和环的顶点 x_p，如将 i_k 条弧上的增益除以 1－环的增益，则可将环消去，以 x_p 为起点的弧的增益不变（图 A. 2-6）

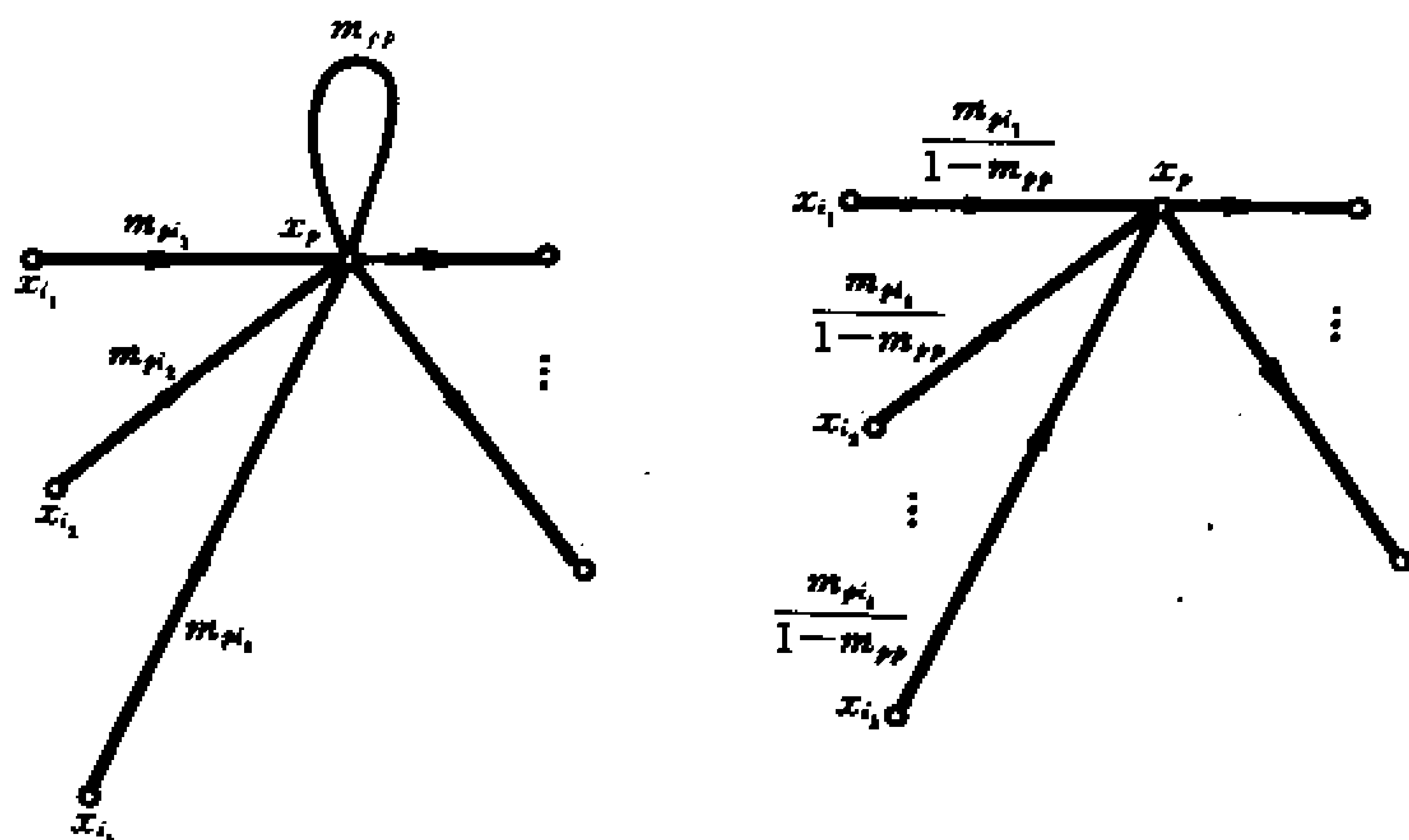


图 A. 2-6

顶点 x_p 的方程是

$$x_p = m_{pp}x_p + \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}}^{k} m_{p_{i_r}} x_{i_r} \tag{A. 2-5}$$

方程（A. 2-5）可以改写成

$$(1 - m_{pp})x_p = \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}}^{k} m_{p_{i_r}} x_{i_r} \tag{A. 2-6}$$

或（在 $m_{pp} \neq 1$ 时）

$$x_p = \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}} \frac{m_{pi_r}}{1 - m_{pp}} x_{i_r} \tag{A. 2-7}$$

即，要消去 x_p 处的环，可把所有流入顶点 x_p 的弧的增益都乘

以$\frac{1}{1-m_{pp}}$。

R_4. **顶点吸收规则**

对于以 x_p 为终点的弧$(x_{i_1},x_p),(x_{i_2},x_p),\cdots,(x_{i_p},x_p)$和以 x_p 为起点的弧$(x_p,x_{j_1}),(x_p,x_{j_2}),\cdots,(x_p,x_{j_k})$，其增益分别是 $m_{pi_1},m_{pi_1},\cdots,m_{pi_k}$和 $m_{j_1p},m_{j_2p},\cdots,m_{j_kp}$，则可把顶点 x_p 吸收（消去），得弧为

$$(x_{i_1},x_{j_1}),(x_{i_2},x_{j_1}),\cdots(x_{i_k},x_{j_1}),$$
$$(x_{i_1},x_{j_2}),(x_{i_2},x_{j_2}),\cdots(x_{i_k},x_{j_2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_{i_1},x_{j_k}),(x_{i_2},x_{j_k}),\cdots(x_{i_k},x_{j_k})$$

其增益为

$$m_{pi_1}m_{j_1p},m_{pi_2}m_{j_1p},\cdots,m_{pi_k}m_{j_1p},$$
$$m_{pi_1}m_{j_2p},m_{pi_2}m_{j_2p},\cdots,m_{pi_k}m_{j_2p}.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$m_{pi_1}m_{j_kp},m_{pi_2}m_{j_kp_1}\cdots m_{pi_k}m_{j_kp}$$

如图 A.2-7。

顶点 x_p 的方程是

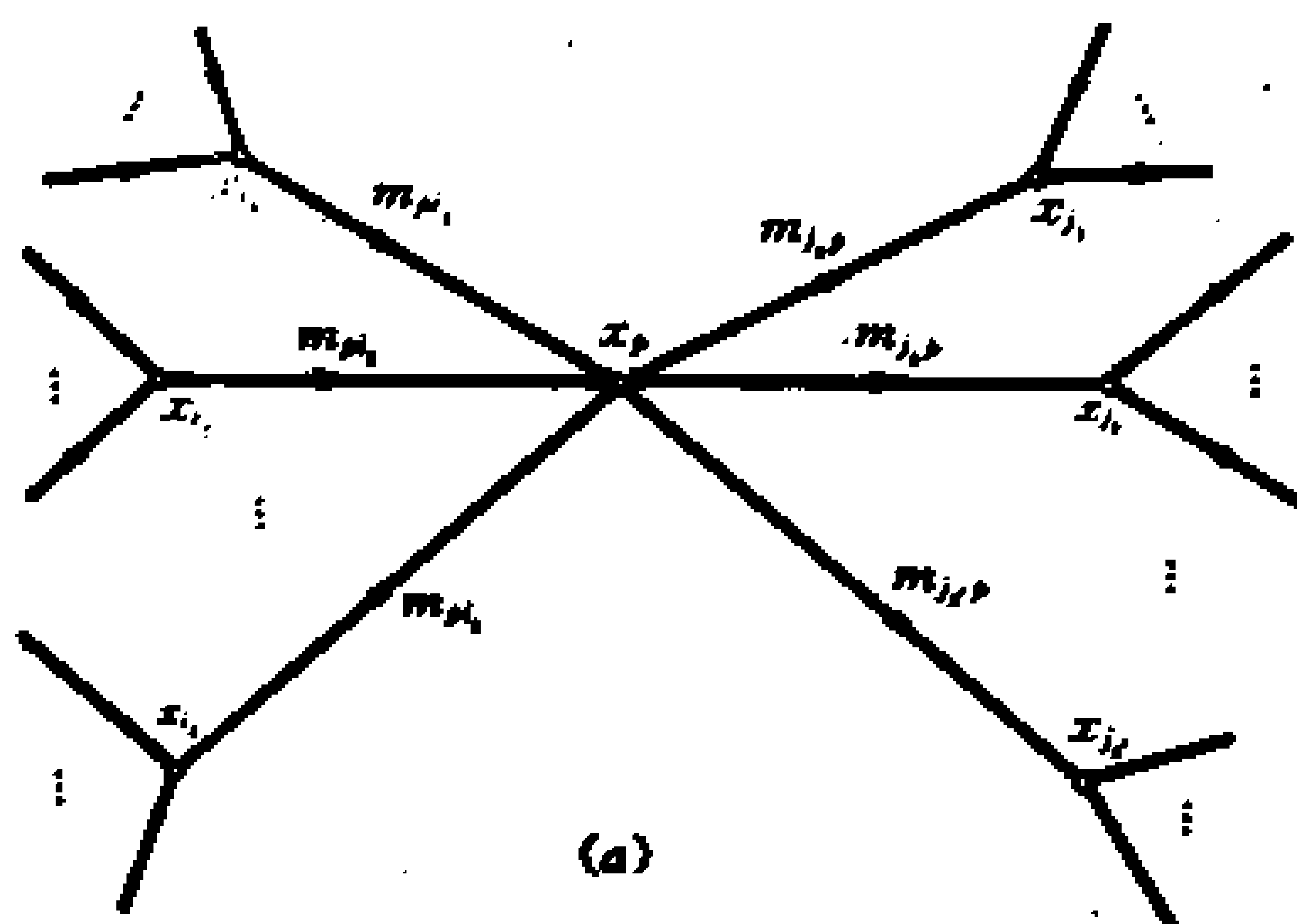
$$x_p=\sum_{\substack{r=1\\i_r\neq p}}^{k}m_{pi_r}x_{i_r} \qquad (A.2\text{-}8)$$

顶点 x_{j_u}的方程可以写成

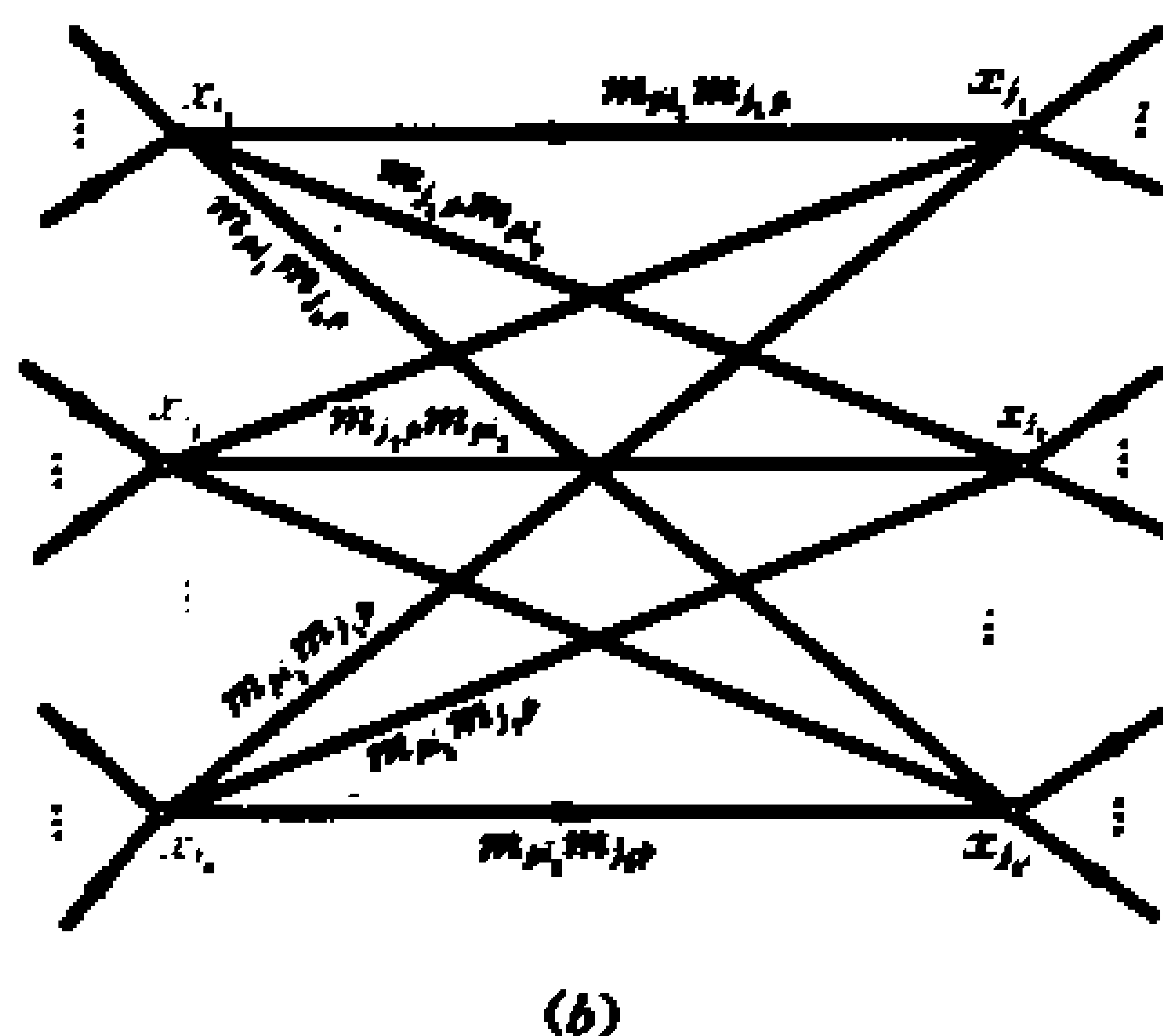
$$x_{j_u}=\sum_{\substack{s=1\\i_s\neq p}}^{n}m_{j_ui_s}x_{i_s}+m_{j_up}x_p \qquad (A.2\text{-}9)$$

$u=1,2,\cdots,k'$，把方程(A.2-8)代入方程(A.2-9)，有

$$x_{j_u}=\sum_{\substack{r=1\\i_r\neq p}}^{k}(m_{j_up}m_{pi_r})x_{i_r}+\sum_{\substack{s=1\\i_s\neq p}}^{n}m_{j_ui_s}x_{i_s} \qquad (A.2\text{-}10)$$



(a)



(b)

图 A. 2-7

由方程(A. 2-10)知，如果要吸收顶点 x_p，可把每个由两条弧(x_{i_r}, x_p)和(x_p, x_{j_s})组成的有向道路用一条从 x_{i_r}到 x_{j_s}的增益为 $m_{pi_r}m_{j_sp}$的弧代替(图 A. 2-7)。

下面我们举两个应用简化规则的例。简化过程分别由图 A. 2-8 和图 A. 2-9 给出。

例 A. 2. 1

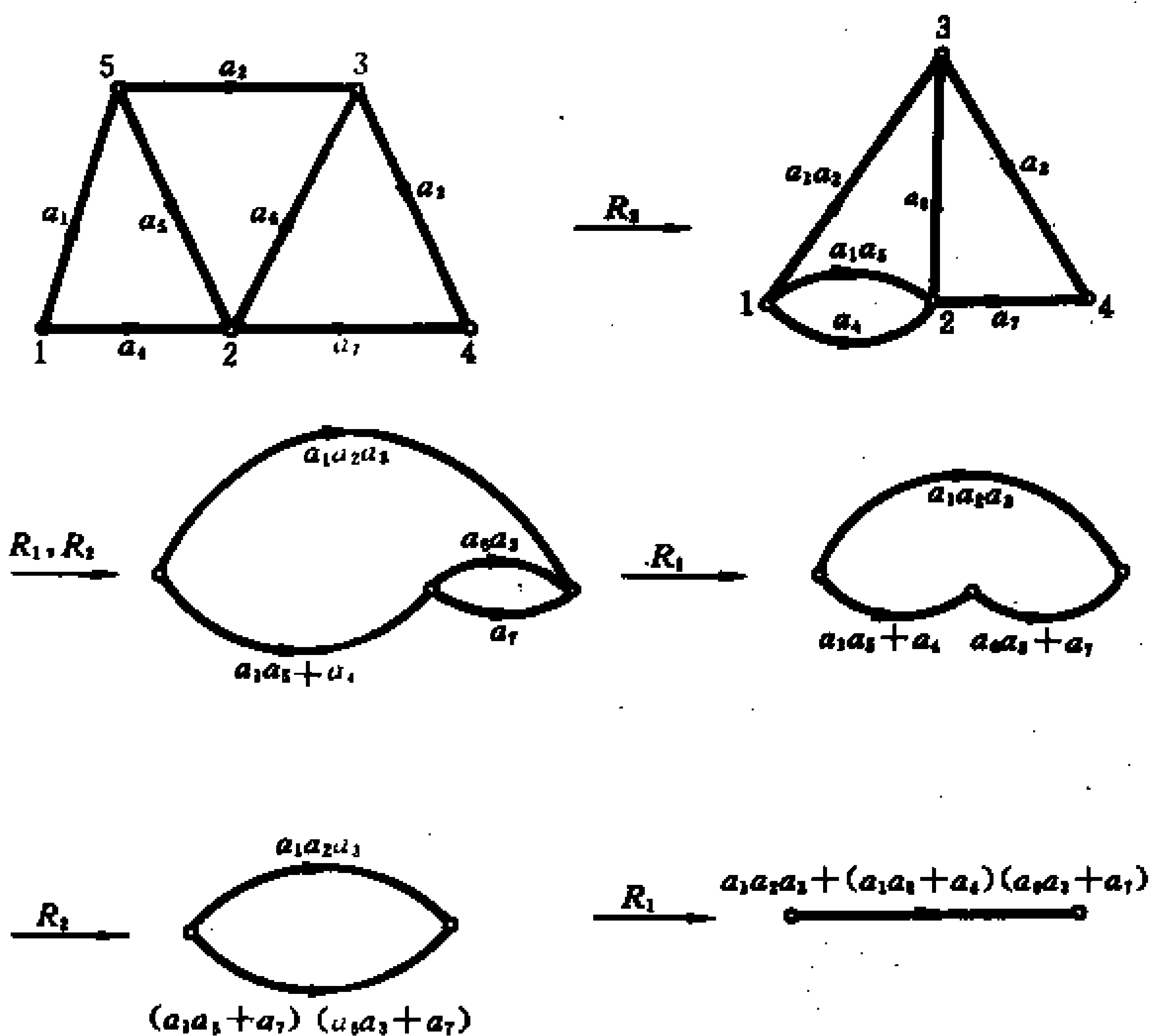


图 A.2-8

利用信号流图的简化规则，可以求出该信号流图对应的方程组的解。

例 A.2.2

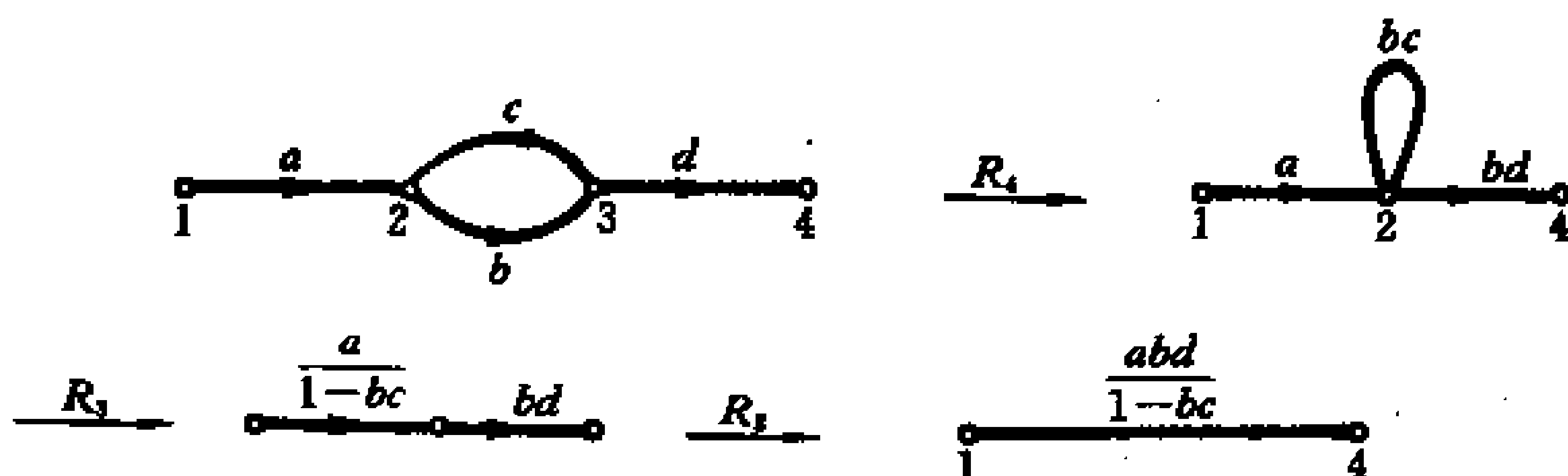


图 A. 2-9

例 A. 2. 3

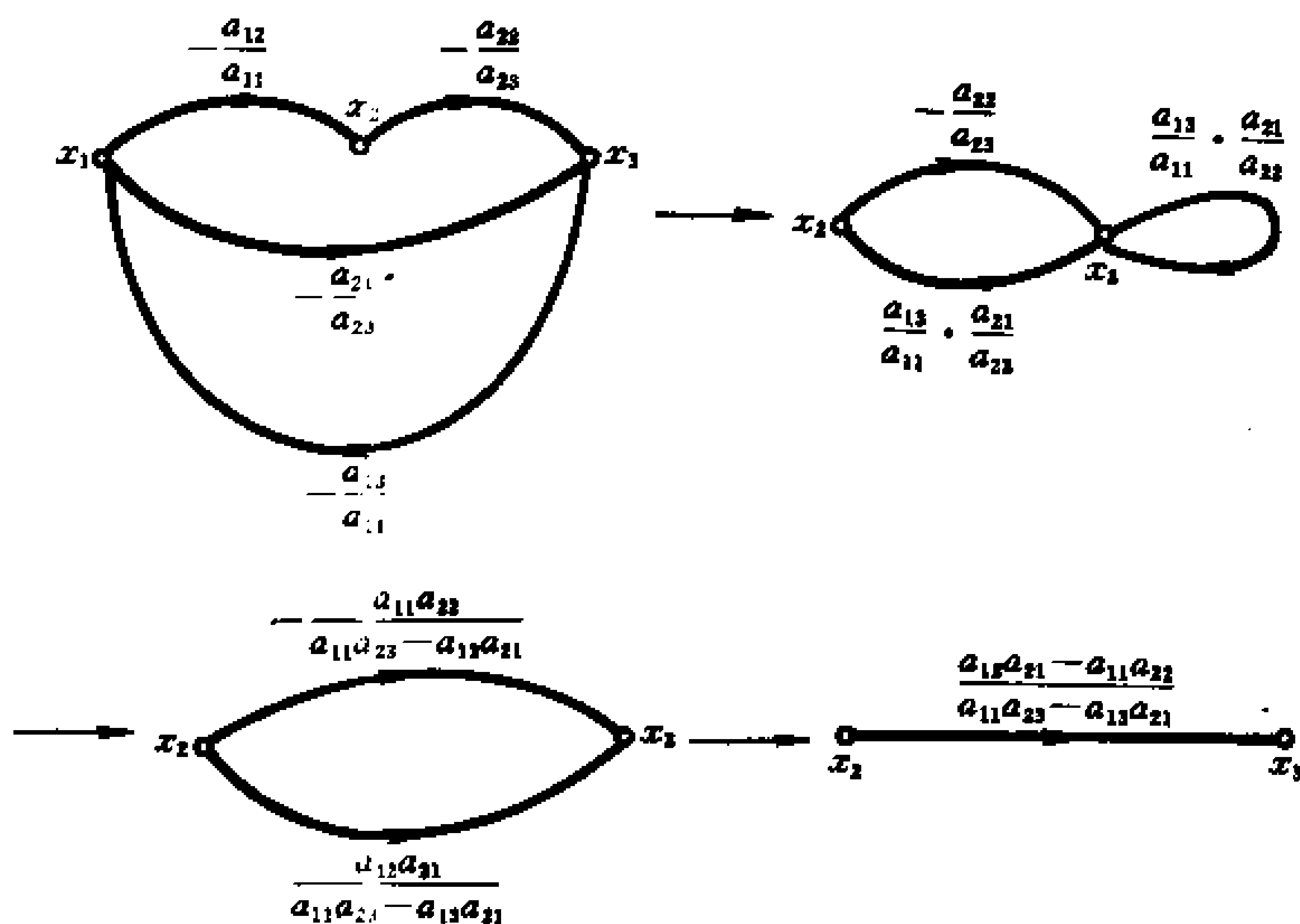


图 A. 2-10

由此可知，图 A. 2-3 所示的方程组(A. 2-3)的信号流图，我们把它简化如下：

$$x_3=\frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}x_2$$

同样可以求出 x_1 和 x_2 之间的关系。

A.3 流图公式

我们来考虑方程组

$$
\begin{cases}
x_1 = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \cdots + m_{1n}x_n \\
x_2 = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \cdots + m_{2n}x_n \\
\cdots\cdots \\
x_{n-1} = m_{n-1,1}x_1 + m_{n-1,2}x_2 + \cdots + m_{n-1,n}x_n \\
x_0 = m_{01}x_1 + m_{02}x_2 + \cdots + m_{0n}x_n
\end{cases}
\tag{A.3-1}
$$

与方程组(A.3-1)对应的信号流图由 $n+1$ 个顶点组成(图 A.3-1)。其中 x_n 在任一方程左端不出现，顶点 x_n 叫做源，x_0 在任一方程右端均不出现，顶点 x_0 叫做汇。

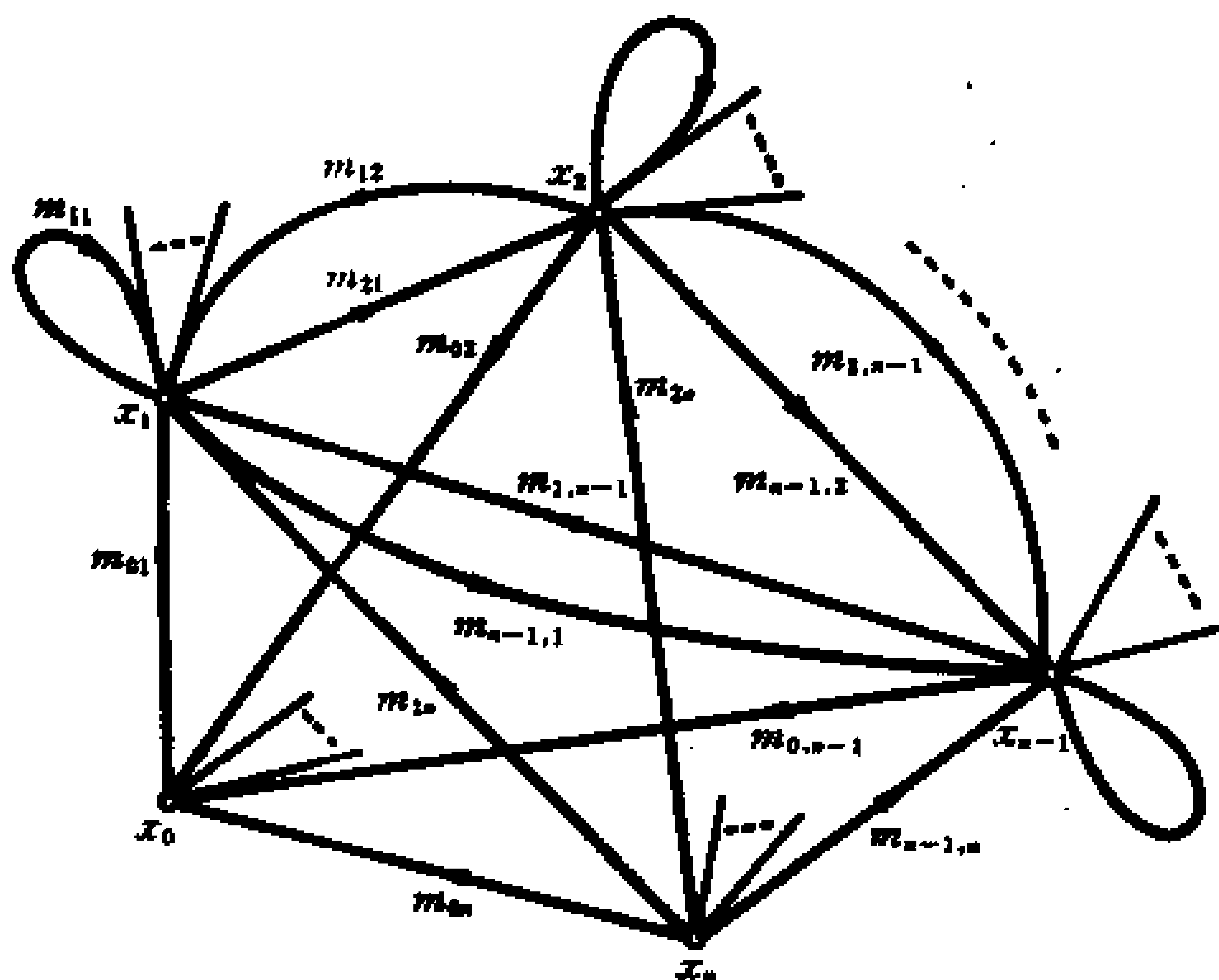


图 A.3-1

我们把方程(A. 3-1)写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n} \\ m_{01} & m_{02} & \cdots & m_{0n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_0 \end{pmatrix} \tag{A. 3-2}$$

和

$$x_n = Kx_0 \tag{A. 3-3}$$

方程(A. 3-2),(A. 3-3)可以改写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} & 0 \\ \cdots\cdots & & & & \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & K \\ m_{01} & m_{02} & \cdots & m_{0n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{pmatrix} \tag{A. 3-4}$$

或

$$\begin{pmatrix} m_{11}-1 & m_{12} & \cdots & m_{1n} & 0 \\ m_{21} & m_{22}-1 & \cdots & m_{2n} & 0 \\ \cdots\cdots & & & & \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & K \\ m_{01} & m_{02} & \cdots & m_{0n-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{pmatrix} = 0 \tag{A. 3-5}$$

方程(A. 3-5)可以简写成

$$[M - I]X = 0 \qquad (A.3\text{-}6)$$

其中 I 为单位矩阵。

把矩阵 $M-I$ 对应的信号流图(图 A. 3-2)与图 A. 3-1 的信号流图进行比较可以看出,图 A. 3-1 的信号流图是图 A. 3-2 的信号流图的一个子图。

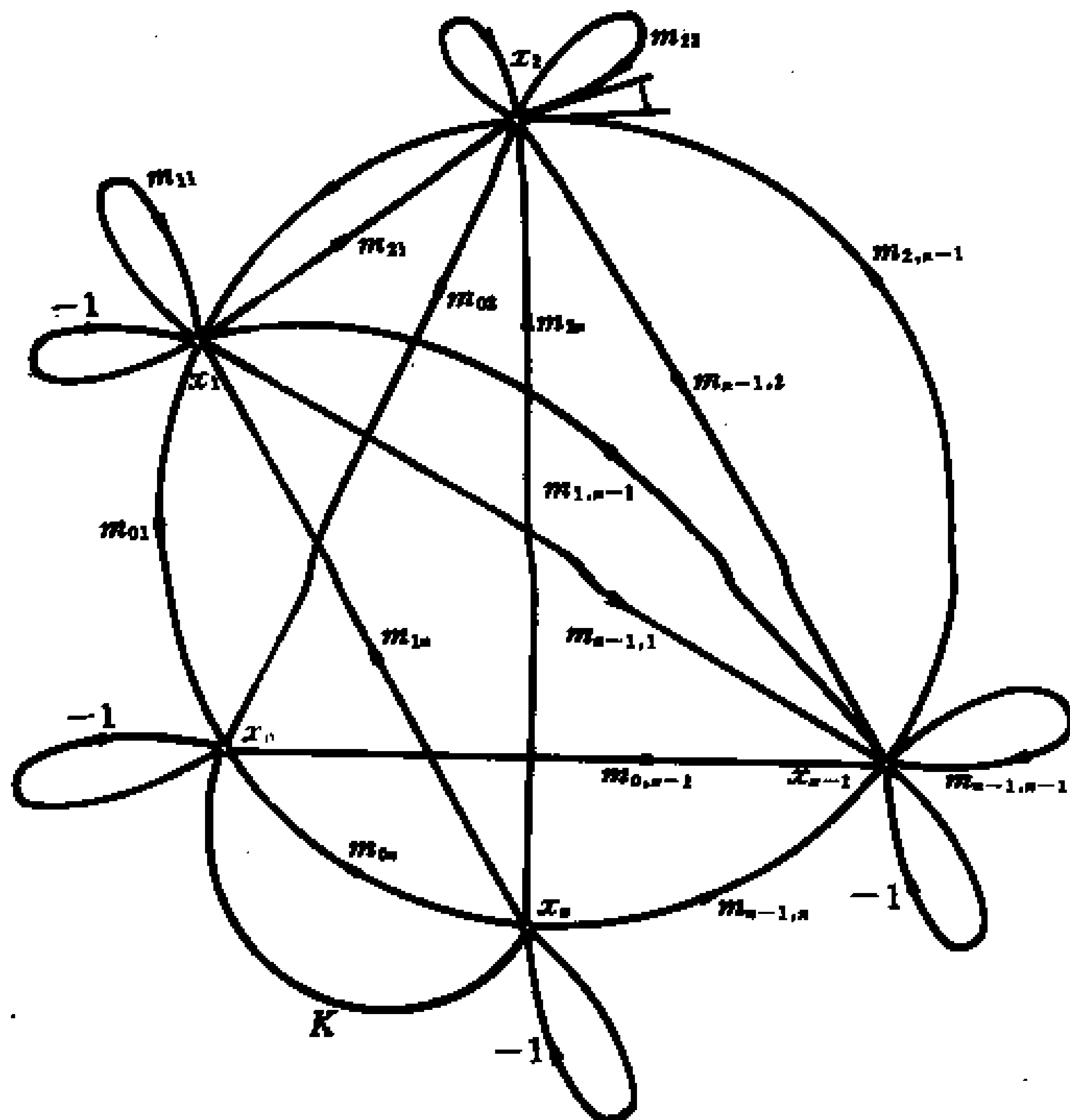


图 A. 3-2

在图 A. 3-1 的信号流图中,每个顶点添上一各增益为 -1的环,再添上一条增益为 K 的弧(x_0, x_n),就可以得到图 A. 3-2的信号流图。我们称图 A. 3-1 的信号流图为图 A. 3-2

的信号流图的对应信号流图。

由式(A. 1-5)知，图 A. 3-2 的信号流图的矩阵 $M-I$ 的行列式是

$$[M-I] = (-1)^{n+1}\sum(-1)^{k}P-\text{集环 } D_j \text{ 乘积} \tag{A. 3-6}$$

令 $D_j(K)$表示不包含弧 K 的 P—集环，$D_q(K)$表示包含弧 K 的 P—集环，那么式(A. 3-6)变成

$$|M-I| = (-1)^{n+1}(C+KP) \tag{A. 3-7}$$

这里

$$C = \sum(-1)^{k_j}P-\text{集环 } D_j(\overline{K}) \text{ 乘积} \tag{A. 3-8}$$

$$KP = \sum(-1)^{k_q}P-\text{集环 } D_q(K) \text{ 乘积} \tag{A. 3-9}$$

如果方程(A. 3-6)有非平凡解，那么必须有

$$|M-I| = 0$$

或

$$(-1)^{n+1}(C+KP) = 0 \tag{A. 3-10}$$

由式(A. 3-3)和式(A. 3-10)，有

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{K} = \frac{-P}{C} \tag{A. 3-11}$$

因为C是 $\sum(-1)^{k_j}P$—集环 $D_j(\overline{K})$乘积，每个 P—集环 $D_j(\overline{K})$可看作两个集合 $D_j(0)$和 $D_j(-1)$的并，其中 $D_j(0)$是由对应信号流图的弧构成的有向圈的集合，$D_j(-1)$是不在对应信号流图上环的集合。设在 $D_j(-1)$中有 u 个环，则

$$D_j(-1)\text{ 乘积} = (-1)^{u} \tag{A. 3-12}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{k_j}D_j(\overline{K})\text{乘积} &= (-1)^{k_j}(D_j(0)\text{乘积})(D_j(-1)\text{乘积})\\ &= (-1)^{k_j-u}(-1)^{u}(D_j(0)\text{乘积})(-1)^{u}\\ &= (-1)^{k'_j}D_j(0)\text{乘积}\end{aligned} \tag{A. 3-13}$$

其中 $k'_j=k_j-u$ 是 $D_j(0)$ 中有向圈的数目。若 $D_j(0)$ 是空集，那么方程(A. 3-13)变成

$$(-1)^{k_j}D_j(\overline{K})\ \text{乘积} = 1$$

这里需要指出的是，$D_j(0)$ 是在对应信号流图上的有向圈的点不重并，并不要求它包含对应信号流图的所有顶点。

下面我们来讨论式(A. 3-7)中的 C 和 KP。

对 C 我们引入一个记号 C_r：

$C_r=\sum$ 恰包含 r 个有向圈的点不重并 $D_j(0)$ 的乘积。这样式(A. 3-8)中的 C 可以写成 (A. 3-14)

$$C = 1 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots \qquad \text{(A. 3-15)}$$

例如，对图 A. 3-3 所示的信号流图，有

$$C_1 = g + h + cd$$

$$C_2 = gh$$

$$C_u = 0, u \geqslant 3$$

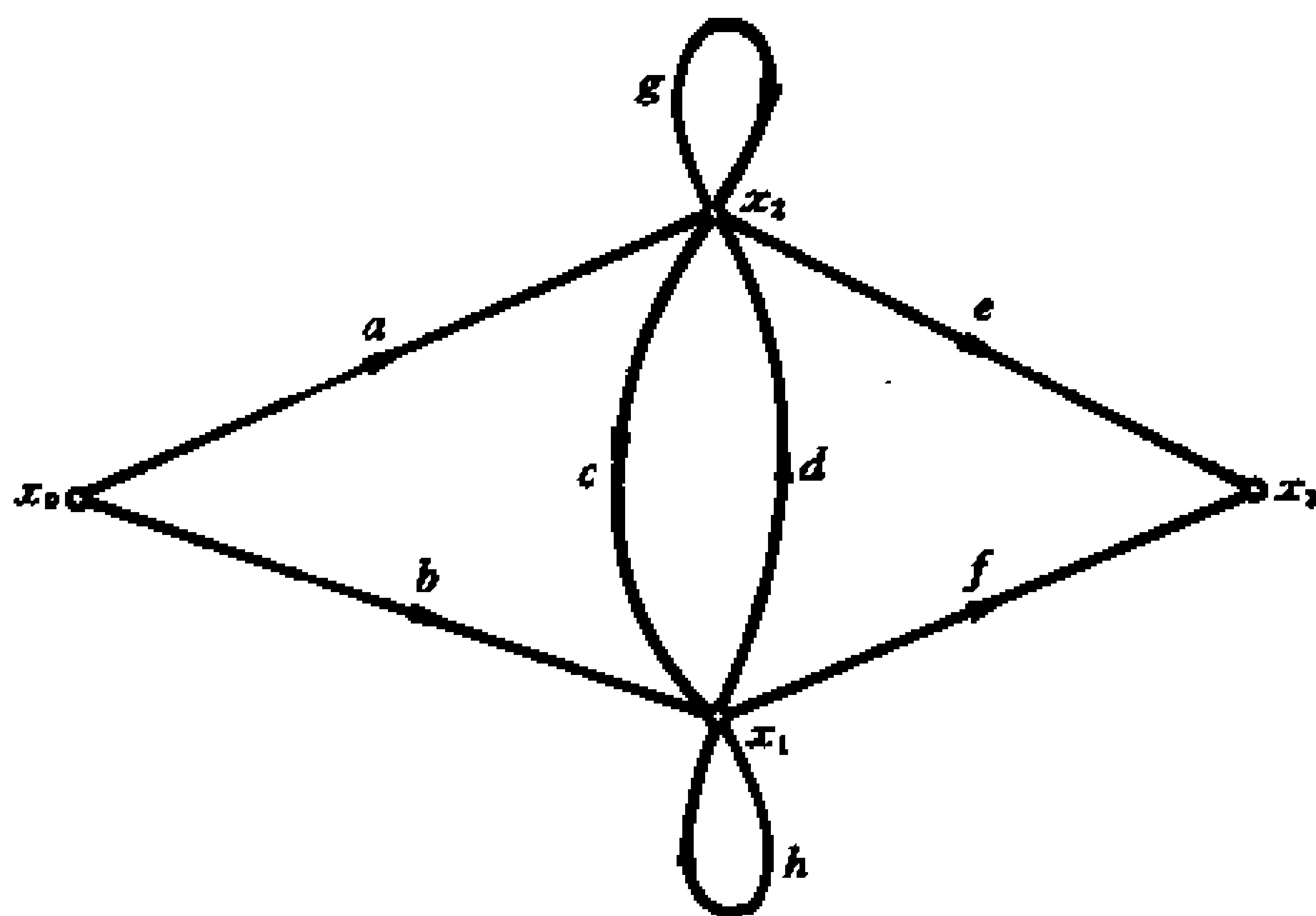


图 A. 3-3

所以

$$C = 1 - g - h - cd + gh$$

再来讨论KP。因为KP是$\sum(-1)^{k_q}P$—集环$D_q(K)$乘积，且每个P—集环$D_q(K)$必然包含弧K，从$D_q(K)$中删去弧K得到的是一条从顶点x_n到顶点x_0的有向道路和若干有向圈的点不重并。

引入记号：

P_i：为从顶点x_0到顶点x_n的有向道路(图 A.3-2 所示的流图)；

$D_F(\overline{\Omega(P_i)}\overline{K})$：为从流图$D_F$中删去$D_i$上的所有顶点及关联这些顶点的弧和弧$K$所得到的子图。

例如图 A.3-3 中的信号流图的流图如图 A.3-4 所示。

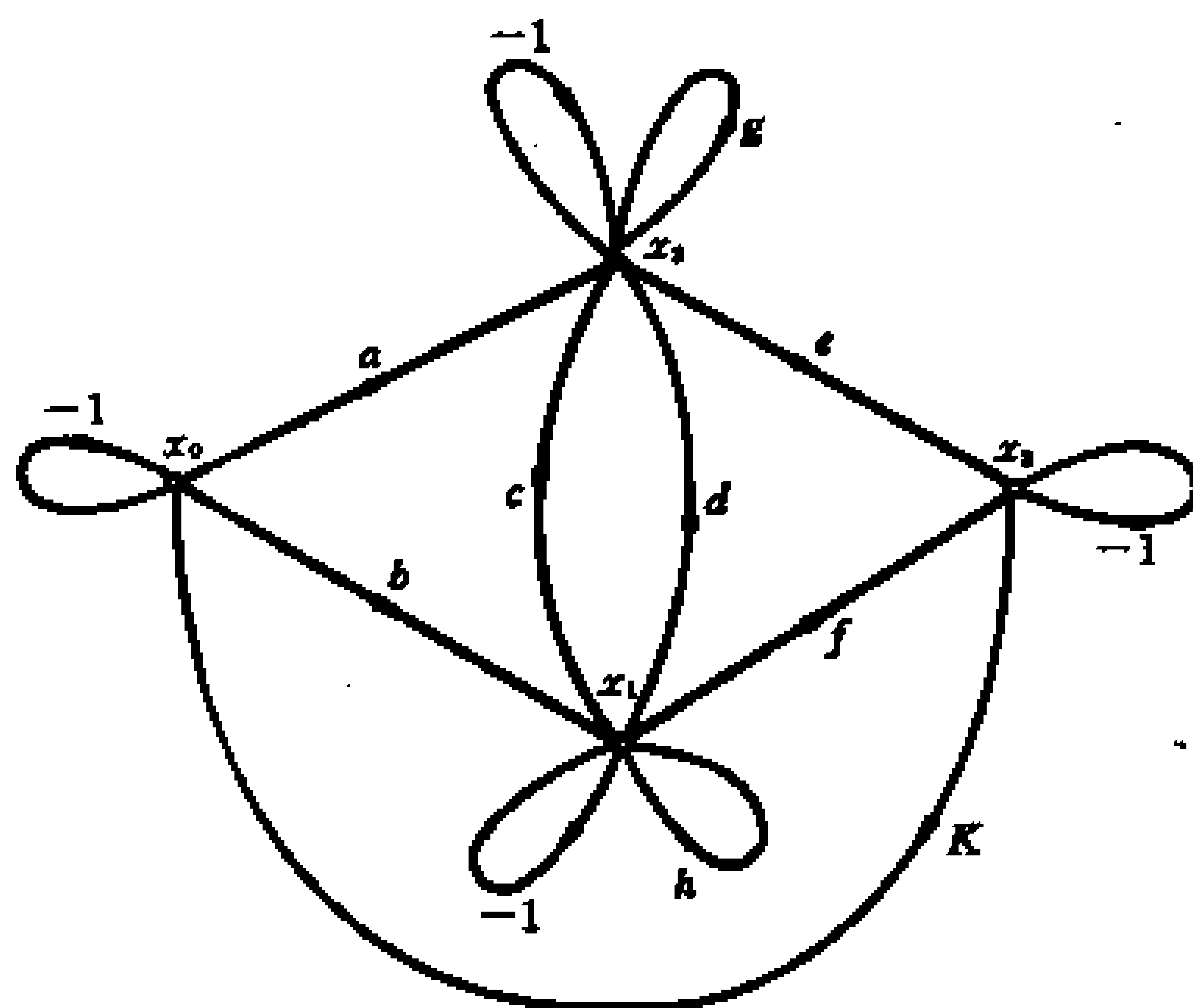


图 A.3-4

取$P=\{a,e\}$，则$D_F(\overline{\Omega(P)}\overline{K})$如图 A.3-5 所示。

把流图D_F中所有包含有向道路P_i的P—集环$D_q(K)$取

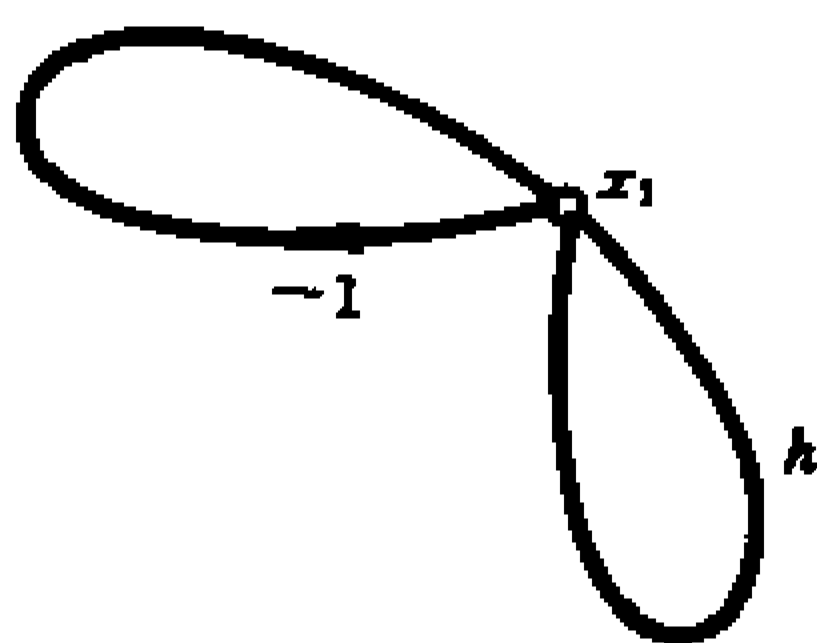


图 A. 3-5

出来，则

$$\sum_{\{D_q(K) \mid P_i \in D_q(K)\}} (-1)^{k_q} D_q(K) \text{ 乘积}$$
$$= -K \sum_{(i)} (P_i \text{ 乘积})$$
$$x(\sum (-1)^{k_q - 1} D_p(\overline{\Omega(P_i)K}) \text{ 的 } P - \text{集环乘积} \tag{A. 3-16}$$

这里

$$\sum_{\{D_q(K) \mid P_i \in D_q(K)\}}$$

是指所有包含 P_i 的 $D_q(K)$。

因为 k_q-1 是 P—集环 $D_q(K)$中不包含弧 K 的有向圈数，k_q-1 也是 $D_t(\overline{\Omega(P_i)K})$中 P—集环 D'_q 中有向圈数，所以由式(A. 3-14)，得

$$\sum (-1)^{k_q - 1} D_p(\Omega(P_i)K) \text{ 的 } P - \text{集环 } D'_q \text{ 乘积}$$

$$= D(\overline{\Omega(P_i)K}) \text{ 的} (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots) \tag{A. 3-17}$$

这里 $D(\Omega(P_i))$是对应信号流图 D 中删去有向道路 P_i 上所有顶点和关联这些顶点的弧所得到的子图。

为了不致引起混淆，设

$$C(\bar{P}_i) = D(\bar{P}_i) \text{ 中的} (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots) \tag{A. 3-18}$$

则由式(A. 3-16)，有

$$\sum_{\{D_q(K);P_i \in D_q(K)\}} (-1)^{k_q} D_q(K) \text{ 乘积} = -K(P_i \text{ 乘积}) \times C(\bar{P}_i)$$

于是式(A. 3-11)右端分子是

$$-P = \sum_{(i)} (P_i \text{ 乘积}) \times C(\bar{P}_i)$$

由式(A. 3-8)和式(A. 3-11)，源和汇的比是

$$\frac{x_t}{x_s} = \frac{\sum_{(i)} (P_i \text{ 乘积}) \times C(\bar{P}_i)}{1 - C + C_2 - C_3 + \cdots} \tag{A. 3-19}$$

式(A. 3-19)称为流图公式(Mason 公式)。

例如，图 A. 3-3 所示的信号流图，x_0 到 x_3 的增益，由下面的计算得出：

$$\frac{x_0}{x_3} = \frac{ae(1-h) + bf(1-g) + acf + bde}{1 - g - h - cd + gh}$$

附录 B　开关网络

B.1　道路集合(续)

在第十一章中，我们曾经讨论了道路的集合。为了介绍开关网络，我们对道路的集合再做进一步的讨论。

设有二个集合 A,B，称

$$\min\{\alpha_p \oplus \beta_q, \alpha_p \in A, \beta_q \in B\}$$

为 A 和 B 的环积，记作 $A \otimes B$，即

$$A \otimes B = \min\{\alpha_p \oplus \beta_q, \alpha_p \in A, \beta_q \in B\}$$

例如

$$A = \{(a),(b,c),(d,e)\},$$

$$B = \{(a,b),(b,c,d),(e)\}$$

则

$$\begin{aligned} A \otimes B = & \min\{(b),(a,b,c,d),(a,e),(a,c), \\ & (d),(b,c,e),(a,b,d,e)\} \\ = & \{(b),(a,e),(a,c),(d)\} \end{aligned}$$

下面我们来讨论关于环积的一些性质。为此，先来证明下面两个命题。

命题 B.1.1　设 G 是至少有 $p(p \geqslant 3)$ 个顶点的不可分图，对 G 中的任何一条边 e，在删去或收缩边 e 这两种运算，至少有一种运算不改变图的不可分性。

[证明]　假设删去边 e 使 G 变成可分的，设所得的图为

G'_e，那么 G'_e 必为图 B. 1-1 所示的情况，其中 p 为割点。

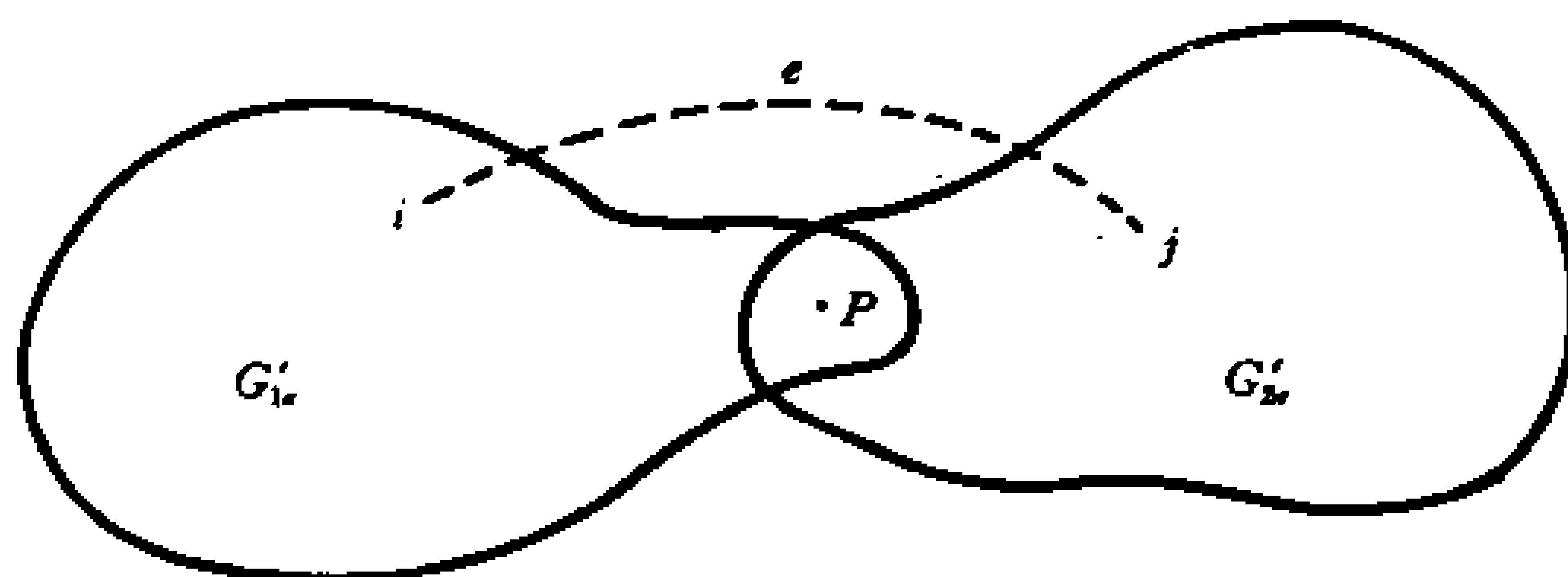


图 B. 1-1

显然，边 e 的两个端点 i 和 j 一个在 G'_{1e} 中，另一个在 G'_{2e} 中。因为图 G 是不可分的，故顶点 i 和 j 均不是割点 p，于是代替删去边 e 而收缩 e，所得的图如图 B. 1-2 所示。这个图显然是不可分的

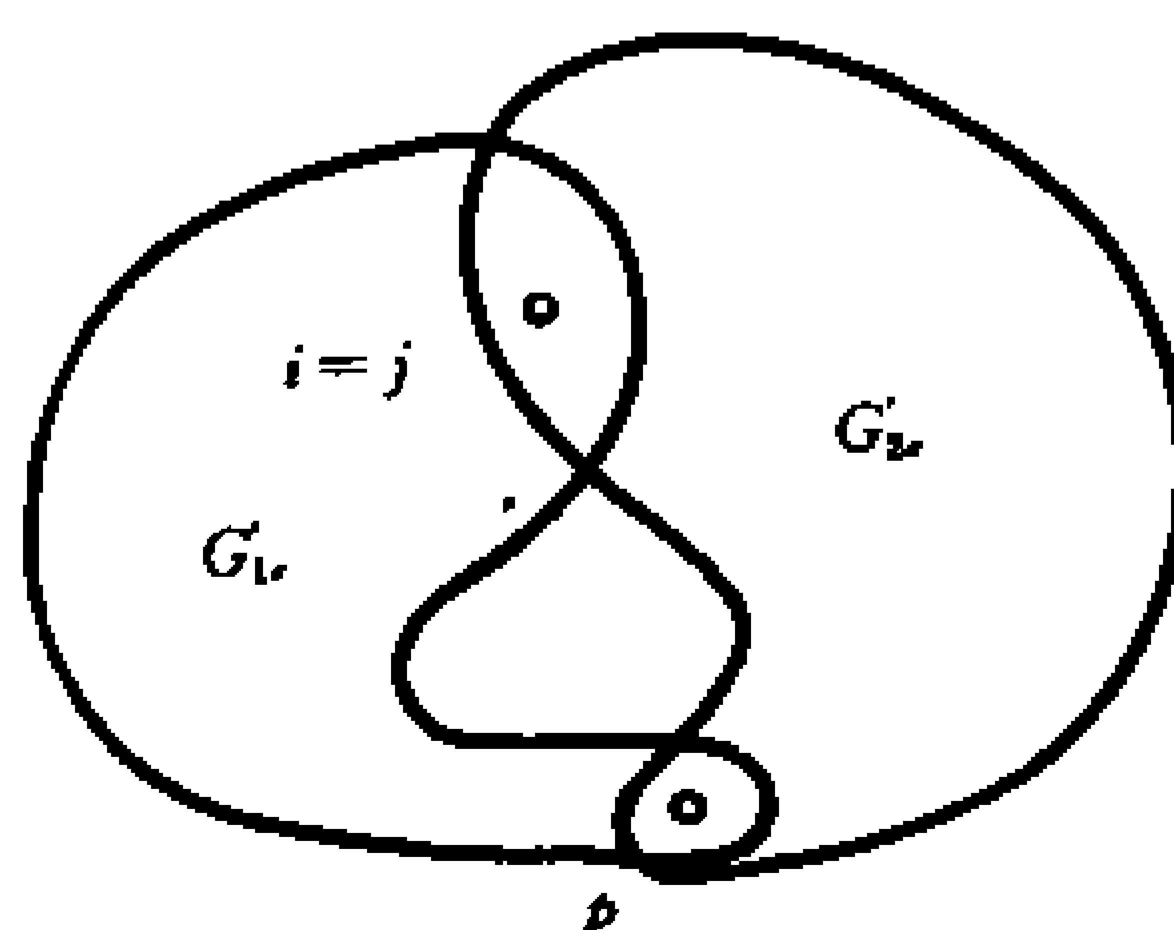


图 B. 1-2

假如收缩边 e 后图变成可分的，所得的图为 G''_e，如图 B. 1-3 所示。

那么必然是由边 e 和两个子图 G_1 和 G_2 组成，它们在边 e 的端点 i、j 相交．如图 B. 1-4 所示。

显然，在图 B. 1-4 所示的图中，代替收缩将边 e 删去，所

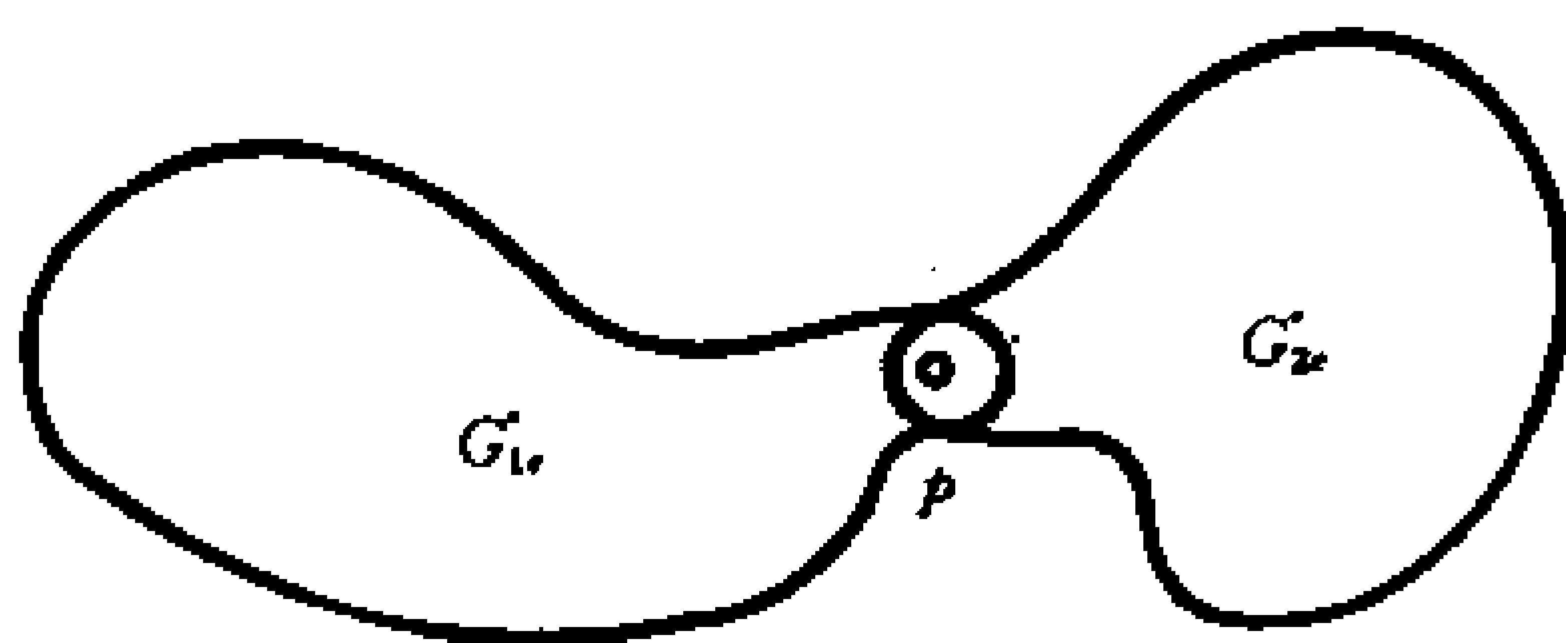


图 B. 1-3

得到的图是不可分的。∎

命题 B. 1. 2 当且仅当 G 是不可分时，对图 G 的任一条边 e 和任一对顶点 i、j，存在一条包含 e 的 (i,j) 道路。

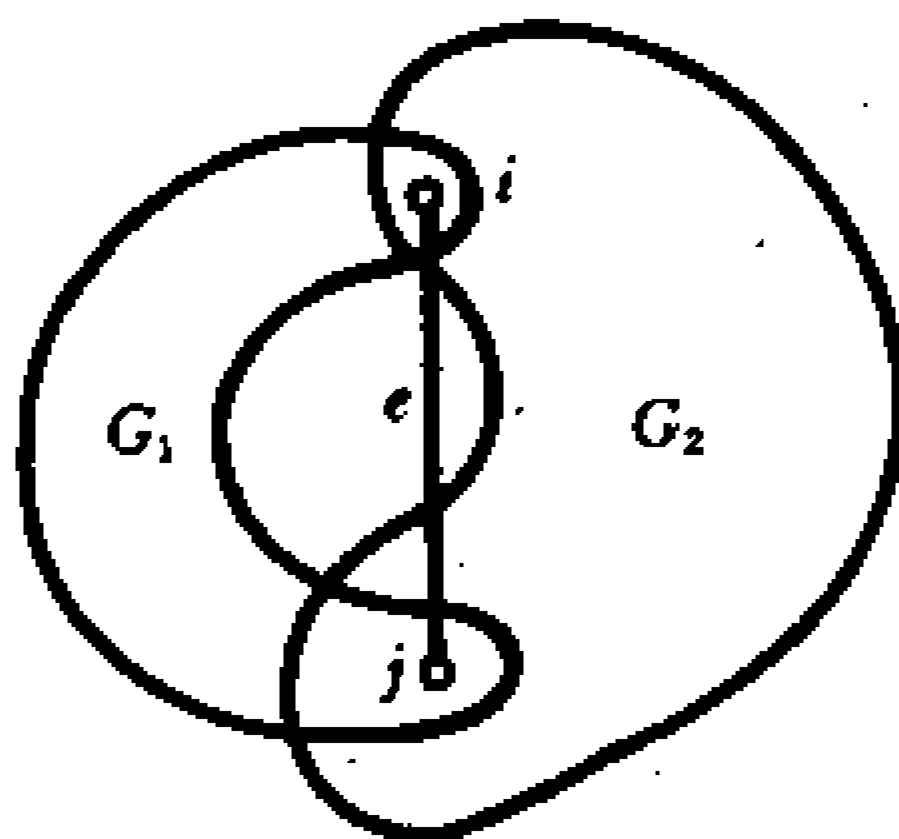


图 B. 1-4

[证明] 如果图 G 只有三个顶点，结论显然是正确的。

设对任意一个有 $k(k>3)$ 个顶点的不可分图结论是正确的。

若一个不可分图有 $k+1$ 个顶点，由命题 B. 1. 1 知，对任意一条边，删去或收缩这条边这两种运算，保持图的不可分性。取一条不同于 e 的边 e_1，且 i 不是 e_1 的端点。把 e_1 收缩，若所得的有 k 个顶点的图是可分的，则用删去边 e_1 代替收缩 e_1，然后另取一异于 e 的边 e_2，，且 i 不 e_2 的端点。将 e_2 收缩，若所得的有 k 个顶点的图是可分的，则用删去 e_2 代替收缩 e_2。最后，总可以找到一条边 e_r，它不是边 e 且 i 不是 e_r 的端点，将 e_r 收缩后所得的图是不可分的。设此图为 G'，因为 G' 只有 k 个顶点，由归纳法原理，结论对 G' 成立。即在 G' 中存在一条包含 e 的 (i,j) 道路。把边 e 添到这条

道路上，则得图 G 的包含边 e 的 (i,j) 道路。▌

由命题 B. 1. 2 可以直接得到下面的命题：

命题 B. 1. 3 对不可分图中任何一对顶点 i 与 j 和圈 C，存在两条 (i,j) 道路 P_1 和 P_2，使得

$$C = P_1 \oplus P_2 \tag{B. 1-1}$$

定理 B. 1. 1 设 G 是不可分图，则

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \{C\} \tag{B. 1-2}$$

$$\{C\} \otimes \{C\} = \{C\} \tag{B. 1-3}$$

$$\{P_{ij}\} \otimes \{C\} = \{P_{ij}\} \tag{B. 1-4}$$

其中 $\{P_{ij}\}$，$\{C\}$ 的定义见第十一章第一节。

［证明］ 由命题 B. 1. 3，不可分图 G 中任一圈 C 可表为顶点 i 和 j 间两条道路的环和，于是

$$\{P_r \oplus P_s; P_r, P_s \in \{P_{ij}\}\}$$

将包含 G 的所有圈，而 $P_r \oplus P_s$ 不是圈就是环路，如果是环路，在求最小化集合时将被删去，故

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \min\{P_r \oplus P_s; P_r, P_s \in \{P_{ij}\}\}$$
$$= \{C\}$$

因为 $\varnothing \in \{C\}$，若 $C \in \{C\}$，则 $C \oplus \varnothing = C$，所以

$$\{C\} \subset \{C_1 \oplus C_2; C_1, C_2 \in \{C\}\}$$

$$\{C\} \subset \min\{C_1 \oplus C_2; C_1, C_2 \in \{C\}\} = \{C\} \otimes \{C\}$$

又 $C_r \oplus C_s$ 是圈或环路，故

$$\{C\} \otimes \{C\} = \min\{C_r \oplus C_s; C_r, C_s \in \{C\}\} \subset \min\{E\}$$

由定理 11. 1. 1，$\min\{E\} = \{C\}$，于是

$$\{C\} \subset \{C\} \otimes \{C\} \subset \{C\}$$

即

$$\{C\} = \{C\} \otimes \{C\}$$

因为 $\varnothing \in \{C\}$

所以

$$\{P_{ij}\} \subset \{P_{ij}\} \otimes \{C\}$$

另一方面，又有

$$\{P \oplus C: P \in \{P_{ij}\}, C \in \{C\}\} \subset \{M_{ij}\}$$

所以

$$\{P_{ij}\} \otimes \{C\} = \min\{P \oplus C; P \in \{P_{ij}\}, C \in \{C\}\}$$

$$\subset \min\{M_{ij}\} = \{P_{ij}\}$$

于是

$$\{P_{ij}\} \otimes \{C\} = \{P_{ij}\} \quad \blacksquare$$

由定理 B.1.1 可以直接得出下面的推论。

推论 B.1.1 $\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{P_{ij}\}$ (B.1-5)

定理 B.1.2 设 G 是连通图，i,j,k 是 G 中三个不同的顶点，则

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{jk}\} = \{P_{ik}\} \quad \text{(B.1-6)}$$

[证明] 对任意 $P_{ij}\in\{P_{ij}\}$，$P_{jk}\in\{P_{jk}\}$，$P_{ij}\oplus P_{jk}$是顶点 i 和顶点 k 的度为奇数其余顶点均为偶数的 G 的子图，即 $P_{ij}\oplus P_{jk}\in\{M_{ik}\}$。由定理 11.1.1，有

$$\min\{M_{ik}\} = \{P_{ik}\}$$

故

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{jk}\} \subset \{P_{ik}\} \quad \text{(B.1-7)}$$

下面证明对任意 $P_{ik}\in\{P_{ik}\}$，存在 $P_{ij}\in\{P_{ij}\}$ 和 $P_{jk}\in\{P_{jk}\}$，使

$$P_{ij} \oplus P_{jk} = P_{ik}$$

因为 G 是连通的，所以存在一条从 j 到道路 P_{ik}中任何一顶点的道路。设 P' 是 G 中一条从 j 到 P_{ik}中顶点 v 的道路(图 B.1-5)，而 P'不包含 P_{ik}中其余顶点。

设 P_{ir}是道路 P_{ik}的(i,r)节，P_{rk}是道路 P_{ik}的(r,k)节。于是

$$P_{ij} = P_{ir} \cup P'$$

和

$$P_{jk} = P' \cup P_{rk}$$

这就是所要求的道路。这表明

$$\{P_{ik}\} \subset \{P_{ij} \cup P_{jk};\ P_{ij} \in \{P_{ij}\}, P_{jk} \in \{P_{jk}\}\} \tag{B. 1-8}$$

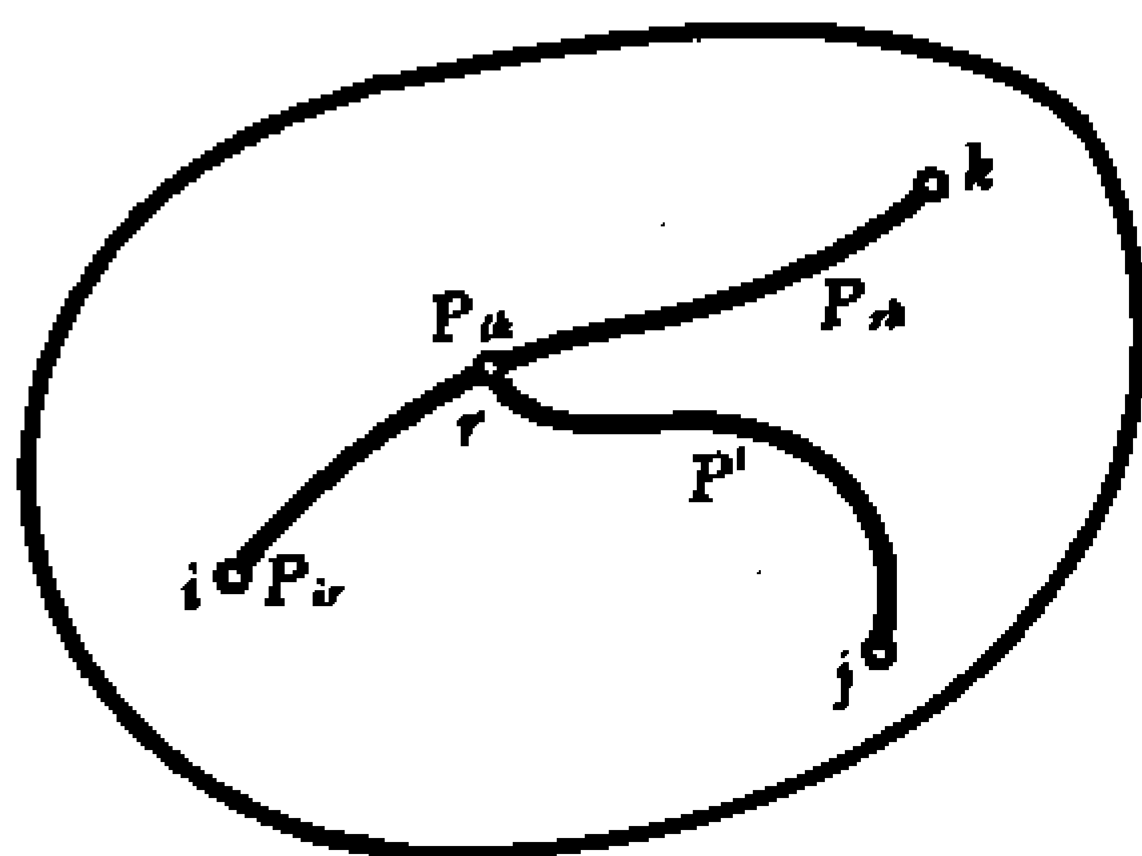


图 B. 1-5

由式(B. 1-7)和式(B. 1-8),有

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{jk}\} = \{P_{ik}\} \quad \blacksquare$$

推论 B. 1. 2 设 G 是连通图,则

$$\{P_{ij_1}\} \otimes \{P_{j_1j_2}\} \otimes \cdots \otimes \{P_{j_mk}\} = \{P_{ik}\}$$

推论 B. 1. 3 设 G 为不可分图,则

$$\{P_{ij_1}\} \otimes \{P_{j_1j_2}\} \otimes \cdots \otimes \{P_{j_mk}\} \otimes \{P_{ki}\} = \{C\}$$

B. 2 开关网络分析

把一开关网络看作赋权图,可以求得开关网络的拓扑性质,利用这些性质可以分析与综合开关网络。分析开关网络有两种方法:一种是我们在第十一章第一节中介绍过的所谓道路法;另一种是所谓连接矩阵法。

下面我们来介绍连接矩阵法。

设 D 是有 n 个顶点的加权有向图,一个 n 阶矩阵 $C=(c_{ij})$,其中行与列均对应图的顶点,且

$$c_{ij}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{k} e_i, \text{其中 } e_1, e_2, \cdots, e_k \text{ 均为从顶点 } i \text{ 到顶点 } j \text{ 的弧,} \\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

则称 $C=(c_{ij})$ 为图 D 的**连接矩阵**。

例如,图 B. 2-1 所示的图的连接矩阵为

$$C=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & c & e+f \\ 2 & a+b & 0 & 0 \\ 3 & 0 & d & g+h+i \end{matrix}$$

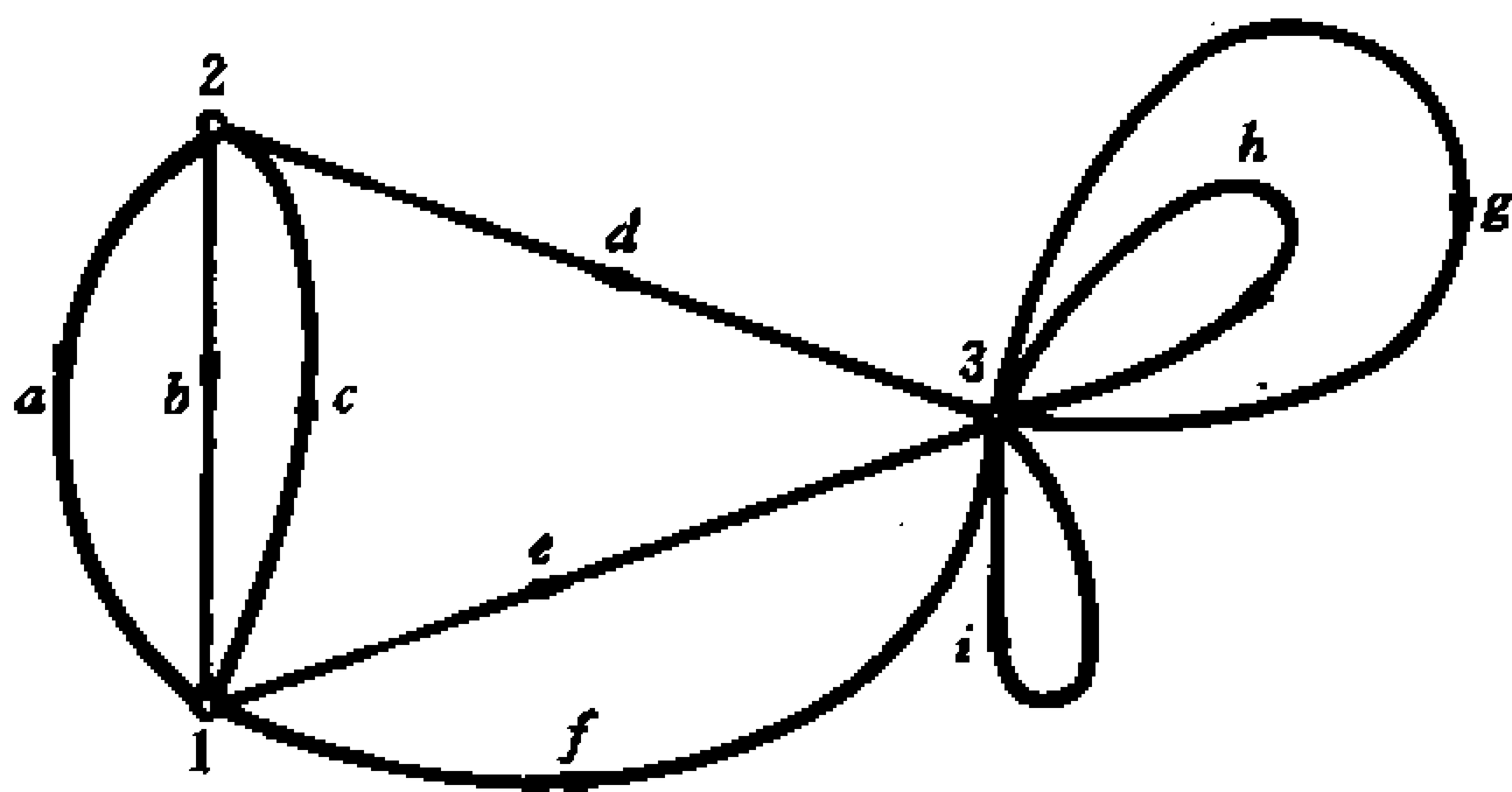


图 B. 2-1

设 D 是矩阵 $W=(w_{ij})$ 的流图,则 D 中从 j 到 i 的弧的权为 w_{ij},把 W 中的 w_{pq} 改为 $\sum_{r=1}^{k} w_{r_{pq}}$,这样得到的矩阵记为 W',把 D 中的弧 w_{pq} 用指向相同的弧 $w_{r_{pq}}$ $(r=1,2,\cdots,k)$ 来代替(图 B. 2-2),这样得到的图记为 D'。

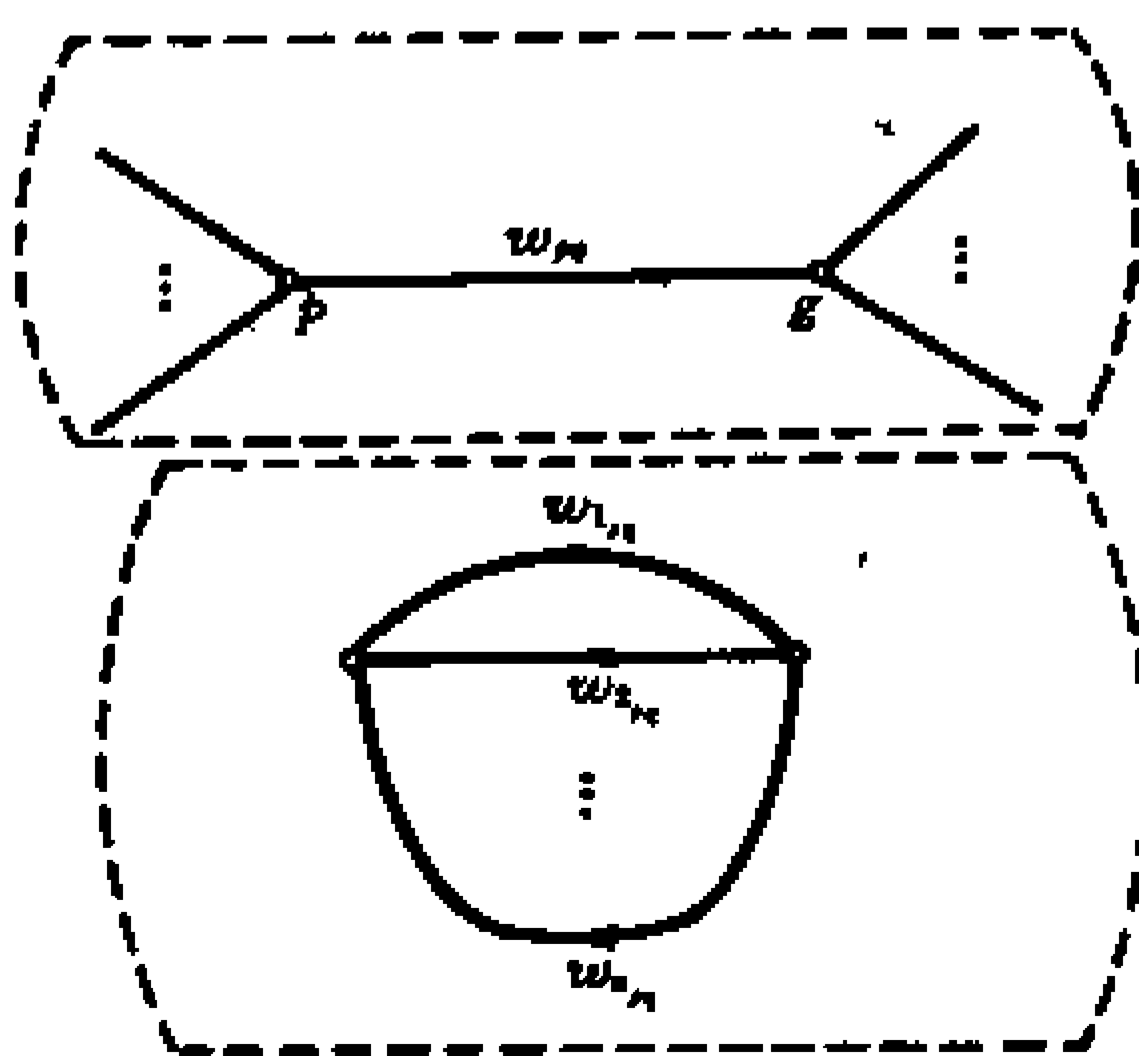


图 B. 2-2

于是 W 的行列式可表为

$$
\begin{aligned}
|W'| = & \sum_{j_p \neq q} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n} \\
& + \sum_{j_p = q} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n} \\
= & \sum_{j_p \neq q} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n} \\
& + \sum_{j_p = q} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots \left(\sum_{r=1}^{k} w_{r_{pq}} \right) \cdots w_{nj_n} \quad \text{(B. 2-1)}
\end{aligned}
$$

若 $\delta_{j_1, j_2 \cdots j_n}$ 非零，每个 $w_{1j_1}, w_{2j_2}, \cdots w_{nj_n}$ 是 P 集环，则

$$
|W'| = (-1)^n \sum (-1)^{k_j} D' \text{ 的 } P\text{-集环 } D'_j \text{ 乘积} \quad \text{(B. 2-2)}
$$

显然，对有多重弧的图，上式也成立。所以我们可以把流图的定义加以修改使得对有多重弧时也适用。对应于流图 D 可得一矩阵 $W = (w_{ij})$，其元素 w_{ij} 为

$$
w_{ij} = \begin{cases} \text{从顶点 } j \text{ 到顶点 } i \text{ 的所有弧的权的和，} \\ 0\text{，当从 } j \text{ 到 } i \text{ 没有弧时。} \end{cases}
$$

假如把一带权的有向图 D 看成为流图，D 的连接矩阵 $C = (c_{ij})$ 的元素为

$$
c_{ji} = \begin{cases} \text{从顶点 } j \text{ 到顶点 } i \text{ 的所有弧的权的和，} \\ 0\text{，当从 } j \text{ 到 } i \text{ 没有弧时。} \end{cases}
$$

于是可以看到

$$
C = W^T \quad \text{(B. 2-3)}
$$

也就说，如果 C 是一有向图的连接矩阵，那么 D 可以看成是矩阵 C^T 的流图，因此，由式(A. 1-5)，有

$$
|C| = (-1)^n \sum (-1)^{k_j} D \text{ 的 } P\text{-集环 } D_j \text{ 乘积} \quad \text{(B. 2-4)}
$$

由于不少有向图没有 P-集环(例如图 B.2-3 所示的图),因此 $|C|=0$,这时对分析开关网络则失去作用。

但是,把连接矩阵修改一下,有下面的重要结果。

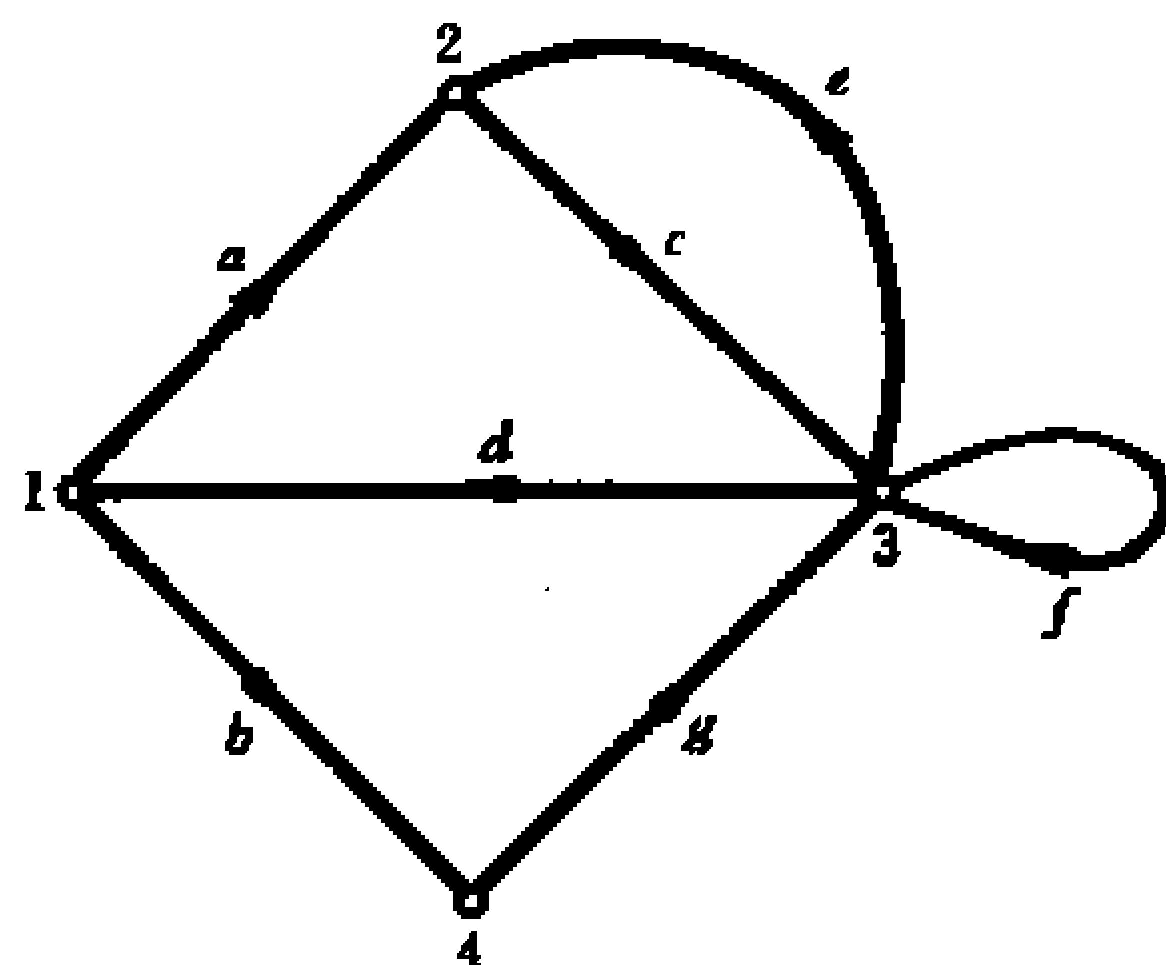


图 B.2-3

定理 B.1.1 设一有向图 D 的所有弧的权为布尔变量,C 是 D 的连接矩阵。矩阵 $[C+I]$ 在逻辑和运算下,位置 (s,r) 余子式 $\Delta_{s,r}$ 是从顶点 r 到顶点 s 的开关函数。

[证明] 由行列式 $|W|$ 的定义(式(1.1-5))

$$|W| = \sum \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n} \qquad (B.2\text{-}5)$$

有

$$|W| = (-1)^n \sum (-1)^{k_j} P\text{-集环 } D_j \text{ 乘积} \qquad (B.2\text{-}6)$$

当 $\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 非零,则项 $\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n}$ 是 P-集环乘积,故式(B.1-5)中一非零项和式(B.1-6)中一 P-集环一一对应,而式(B.2-5)对布尔变量的矩阵也是成立的(不计符号),所以有

$$|C| = \sum P\text{-集环 } D_j \text{ 乘积} \qquad (B.2\text{-}7)$$

假如在矩阵 C 的位置 (s,r) 上添上变量 Y,记所得的矩阵为 $C(Y)$。由式(B.2-7)可把矩阵 $(C(Y)+I)$ 的行列式写为

$$|C(Y)| = \sum D'_Y \text{ 的 } P\text{-集环乘积} \qquad (B.7.8)$$

这里 D'_Y 是由 D 中从顶点 s 到顶点 r 插入弧 Y,把 D 的每一顶点加上权为 1 而得到的。

用 $D_j(0)$ 记不包含弧 Y 的 P-集环，用 $YP_j(0)$ 记包含 Y 的 P-集环，则式(B.2 8)可表为

$$|C(Y)+I| = \sum D_j(0) \text{ 乘积} + \sum D'_Y \text{ 的 } YP_j(0) \text{ 乘积} \tag{B.2-9}$$

显然有

$$C+I| = \sum D_j(0) \text{ 乘积} \tag{B.2-10}$$

和

$$\Delta_{s,r} = \sum P_j(0) \text{ 乘积} \tag{B.2-11}$$

因为 $YP_j(0)$ 是 D'_Y 的 P-集环，$P_j(0)$ 必包含从 r 到 s 的一条有向道路 P_i，道路 P_i 和 Y 一起构成一有向圈。设 $D'_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ 是从 D'_Y 中删去 P_i 上所有顶点及连接这些顶点的弧所得的图。于是 $D(\overline{\Omega(P_i)})$ 中任一 P-集环上再加上有向圈 $Y \cup P_i$ 的 P-集环，把 $Y \cup P_i$ 移去后是 $D'_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ 中的 P-集环。于是

$$\sum P_j(0) \text{ 乘积} = \sum_{(i)} P_i \text{ 乘积}(D'_Y(\overline{\Omega(P_i)})) \text{ 的 } P\text{- 集环乘积} \tag{B.2-12}$$

这里 $\sum_{(i)}$ 是指对 D'_Y 中从 r 到 s 的所有可能的有向道路求和。

对于非空的 $D'_Y(\overline{\Omega(P_i)})$，有一个仅由权为 1 的环组成的 P-集环。因此

$$D'_Y(\overline{\Omega(P_i)}) \text{ 的 } P\text{- 集环 } D'_j \text{ 乘积} = 1 + \cdots \tag{B.2-13}$$

由于用的是逻辑和，所以该式为 1。

如果 $D'_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ 是空集时，$P_j(0)$ 乘积就是 P_j 乘积。于是式(B.2-12)变成

$$\sum D'_Y \text{ 的 } P_j(0) \text{ 乘积} = \sum_{(i)} D'_Y \text{ 的 } P_i \text{ 乘积}$$

(B. 2-14)

由于在 D'_Y中除弧 Y 自身外，从顶点 r 到顶点 s 的有向道路也在 D 内，反之，D 中的从 r 到 s 的有路也在 D'_Y内，所以有

$$\Delta_{s,r} = \sum_{(i)} D \text{ 的 } P_i \text{ 乘积} \qquad \text{(B. 2-15)}$$

而式（B. 2-15）的右端即为从顶点 r 到顶点 s 的开关函数。▮

如图 B. 2-4 中的有向图 D，其连接矩阵是

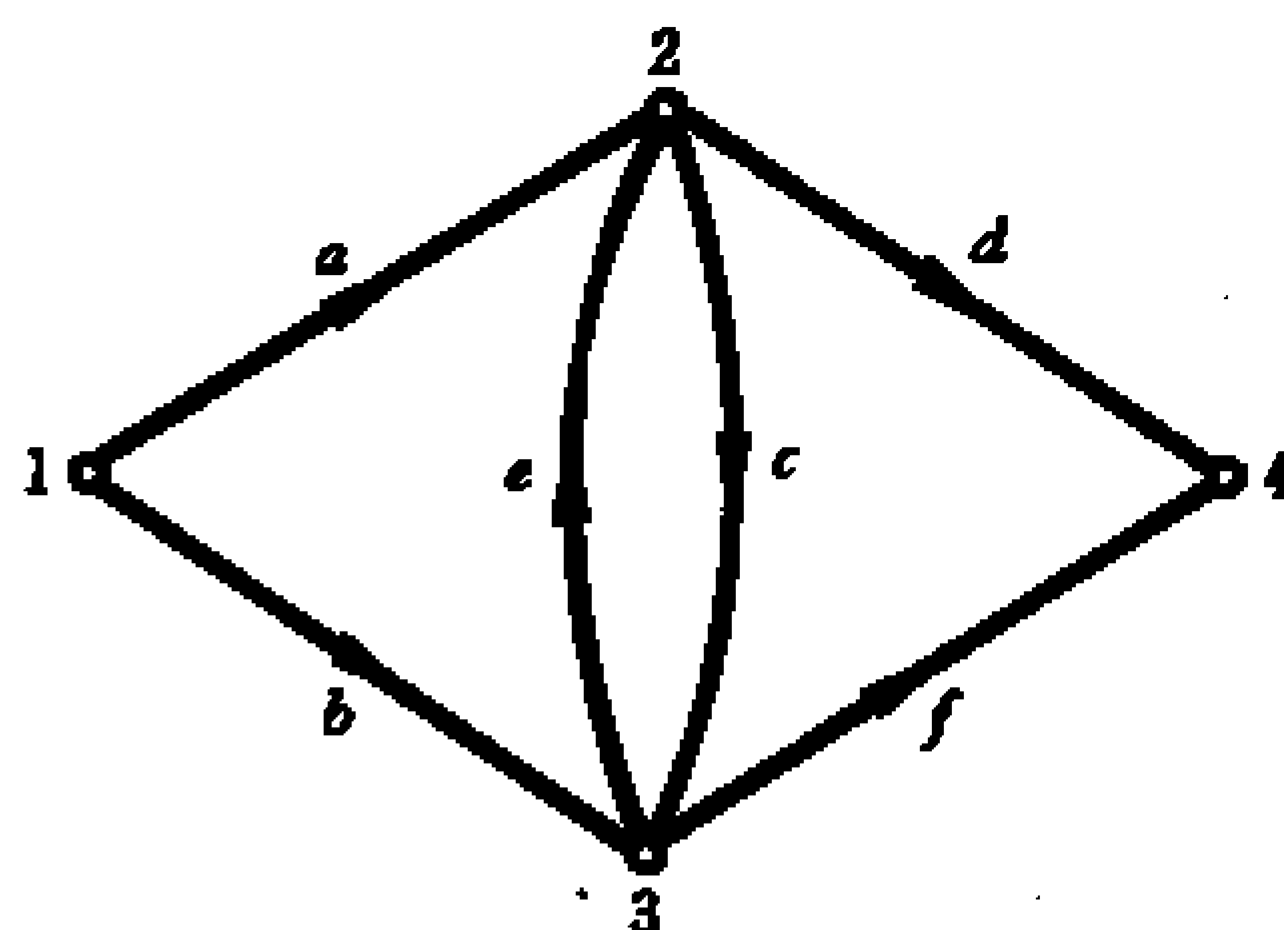


图 B. 2-4

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

于是

$$[C + I] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & e & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

矩阵$[C+I]$的余子式 Δ_{41}是

$$\Delta_{41} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & c & d \\ e & 1 & f \end{vmatrix}$$

$$= acf + bde + ad + bf$$

Δ_{41}即为从顶点 1 到顶点 4 的开关函数。

对于无向开关网络 G，我们把每条边用二条方向相反的弧代替（图 B. 2-5）。这样得到一个有向图。

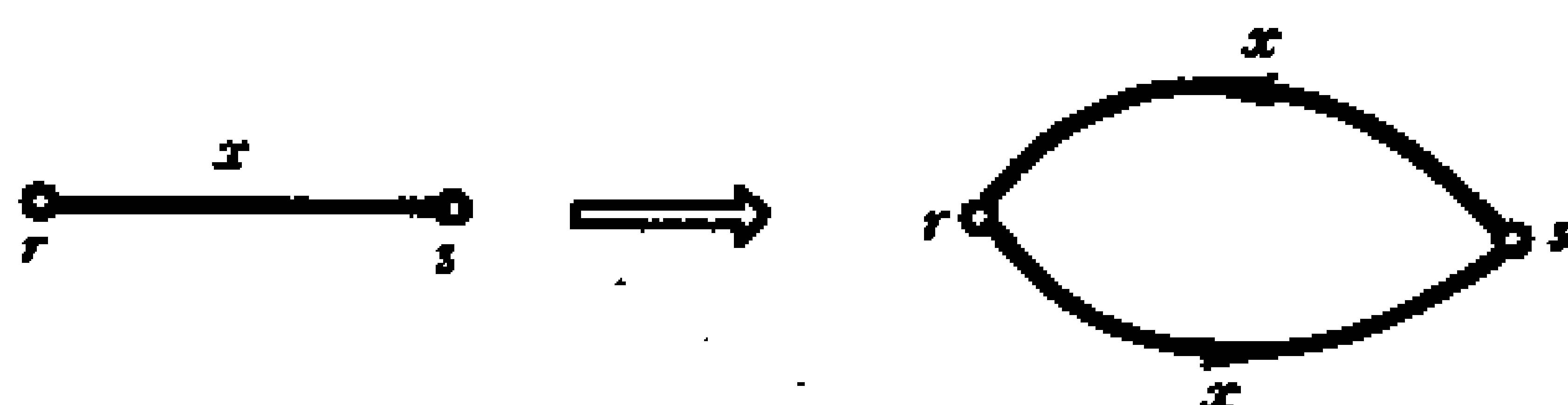


图 B. 2-5

有向图 D 有两个特点：

(1) 对 G 中任一(r,s)道路 P，在 D 中有两条有向道路 P' 和 P''，P' 是从 r 到 s，P'' 是从 s 到 r，且

$$P' \text{乘积} = P'' \text{乘积} = P \text{乘积}$$

(2) 对 D 的任意从 r 到 s 的有向道路 P'，在 G 中存在一条(r,s)道路 P，使得

$$P' \text{乘积} = P \text{乘积}$$

因此，对开关函数来说，G 和 D 是一样的。于是对无向图，定理 B. 1. 1 可以修改成为

定理 B. 2. 2 设 G 为一无向图，它的所有边的权为布尔变量，C 是 G 的连接矩阵，矩阵$[C+I]$在逻辑乘与逻辑和运算下，余子式 $\Delta_{rs}(=\Delta_{sr})$是 G 中顶点 r 和 s 间的开关函数。

B.3 开关网络综合

在这一节中我们来讨论几种特殊类型接点网络综合法。

1. 完全定义开关函数的 SC-网络的实现

一个无向图 G，它的每条边的权是不同的布尔变量时，称 G 为**单接点网络**，记作 SC-网络。

例如，每个继电器，开关之类的元件只允许用一个接点，这样一系列接点构成的网络就是 SC-网络。

所谓完全定义开关函数就是它对应的真值表只有 0 和 1 而没有约束项。

我们要讨论的问题是，对于给定的完全开关函数是否有一个与之对应的 SC 网络。例如对函数

$$F = ab + acd + be$$

没有表示它的 SC-网络，但是对函数

$$F = ab + acd$$

则有一个与它对应的 SC-网络。

定义 B.3.1 如果

$$F_{rs} = \sum_{P_{rs} \in \{P_{rs}\}} P_{rs} \text{ 乘积}$$

则称 $\{P_{rs}\}$ 是与完全定义开关函数 F_{rs} 对应的集合

例如

$$\begin{aligned} F_{rs} &= a(b + ce) + d(e + bc) \\ &= ab + ace + bcd + de \end{aligned}$$

对应的

$$\{P_{rs}\} = \{(a,b),(a,c,e),(d,e),(b,c,d)\}$$

因为 SC-网络中每条边的权不同，我们就用该边的权表示该

条边。把完全定义开关函数 F_{ij} 表示为

$$F_{ij}=\sum_{P_{ij}\in\{P_{ij}\}} P_{ij}\ \text{乘积}$$

时，若有一对应于 F_{ij} 的 SC-网络，则 $\{P_{ij}\}$ 必须是所有的 (i,j) 道路的集合。

定理 B.3.1 设 F_{ij} 是 SC-网络的开关函数，$\{P_{ij}\}$ 是 F_{ij} 的对应集合。对 $\{P_{ij}\}$ 中的任何奇数个 $P_1,P_2,\cdots,P_{2k+1}$，则存在一个 $P'\in\{P_{ij}\}$，使得

$$P'\subset P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_{2k+1} \tag{B.3-1}$$

[证明] 因为 $\{P_{ij}\}$ 是 i 和 j 间所有道路的集合、由推论 3.1.3 知，$\{P_{ij}\}$ 中奇数个元素的环和是集合 $\{M_{ij}\}$ 中的元素，即或是一条道路或是一条道路和若干个圈的边不重并，故有式(B.3-1)。 ∎

解决综合一开关函数为 F_{ij} 的 SC-网络 G 的途径是：从开关函数 F_{ij} 给出的 $\{P_{ij}\}$ 找出图 G 的基本圈矩阵，由所得到的基本圈矩阵，构造出 G。

因为我们综合的是一个开关函数为 F_{ij} 的 SC-网络 G，所以 G 是连通的，且 G 的每一条边至少在一条 (i,j) 道路上。于是 G 或者是不可分图或者是由 k 个不可分子图 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 组成(图 B.3-1)。



图 B.3-1

由式(B.1-6)和式(B.1-2)，有

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{C\} \tag{B.3-2}$$

如果知道了图 G 的集合 $\{C\}$，那么由 $\{C\}$ 就可以求出 G 的基本圈矩阵。但是利用式(B. 3-2)求得的图 G，它的 (i,j) 道路的集合 $\{P_{ij}\}$ 不一定和所要求的一致，例如设 $\{P_{ij}\}=\{(a,b),(c,d)\}$，则

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{\varnothing,(a,b,c,d)\}$$

图 B. 3-2 所示的图确有圈 $\{a,b,c,d\}$ 但它不存在道路 (a,b) 和 (c,d)。

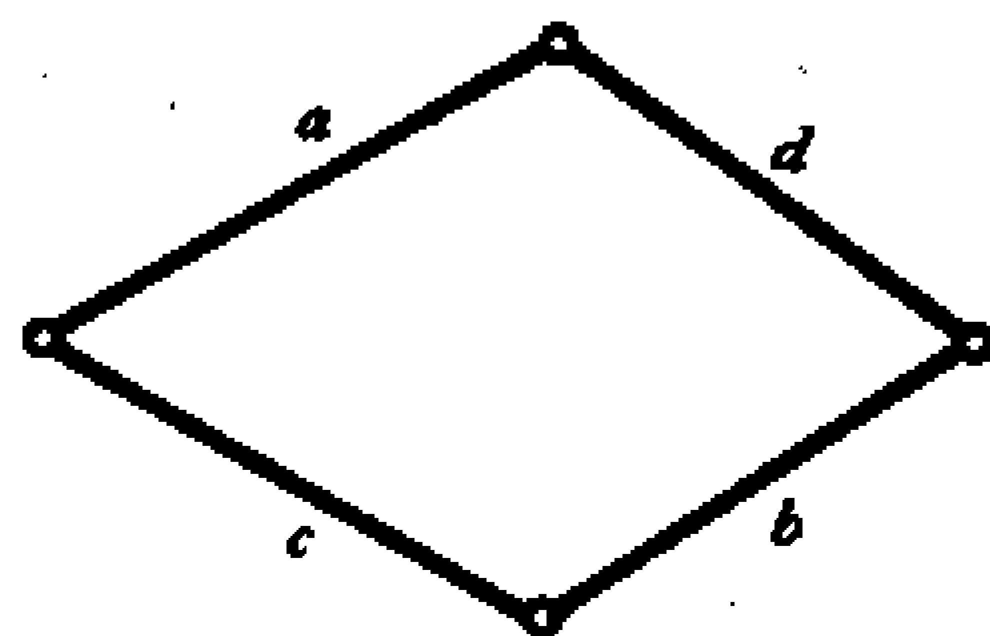


图 B. 3-2

为了能够得到具有 (i,j) 道路集合 $\{P_{ij}\}$ 的图，我们在顶点 i,j 之间添上一条边 y，得到一个新的图 $G+y$。对每个 $\{P_{ij}\}$ 中的道路 P，$P+y$ 是一个圈，于是

$$\{P_{ij}+y\}=\{P+y;P\in\{P_{ij}\}\}$$

是 $G+y$ 的所有圈集合 $\{C_y\}$ 的一个子集。

由于我们所要求的 SC-网络有式(B. 3-2)这种性质，$\{P_{ij}+y\}$ 包含了能生成 $\{C_y\}$ 的所有线性无关圈，于是用 $\{P_{ij}+y\}$ 中的这些圈可得 $G+y$ 的圈矩阵，从而也就可以得到基本圈矩阵和基本割集矩阵，由基本割集矩阵可以构造一个图 G'（参见 6. 6 节）。

还需要解决的问题是：从 G' 中删去边 y 所得到的图 G 是否存在两个顶点，使该二顶点间的所有道路的集合恰是给定的 $\{P_{ij}\}$，下面的定理回答了这个问题。

定理 B. 3. 4 设一完全定义开关函数 F_{ij} 的对应集合为 $\{P_{ij}\}$，满足定理 B. 3. 1。又设 $\{P_{ij}\}$ 中所有线性无关的元为 P_1，$P_2,\cdots,P_m$，使得添上 $\{P_{ij}\}$ 中的另一元 P'，这 $m+1$ 个元则线

性相关，当且仅当存在一个 $q-p+1=m$ 的图，其 m 个线性无关的圈是 $P_1+y, P_2+y, \cdots, P_m+y (y \notin \{P_{ij}\})$，则 G 中删去边 y 所得的图中存在两个顶点，该二顶点间的开关函数为 F_{ij}。

［证明］ 设存在一个 $q-p+1=m$ 的图 G，其中 P_1+y，$P_2+y, \cdots, P_m+y$ 是线性无关的圈。又设 G 中有一(i,j)道路 $P' \notin \{P_{ij}\}$。因为 $P'+y$ 是圈，故 $P'+y$ 可表示成 $P_1+y, P_2+y, \cdots, P_m+y$ 中某些圈的环和，不妨设

$$P'+y=(P_1+y) \oplus (P_2+y) \oplus \cdots \oplus (P_{2k+1}+y)$$

这里 $2k+1 \leqslant m$。于是

$$P'=P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_{2k+1}$$

又因 P_{ij}满足定理 B.3.1 的条件，故 P' 必在$\{P_{ij}\}$中，这与假设矛盾。故 i,j 间所有道路集合恰为给定的$\{P_{ij}\}$。

设 G 中删去边 y 后是 SC-网络，其 i,j 间的开关函数为 F_{ij}，于是 G 中 i 和 j 间有 $m+1$ 个线性无关道路 $y, P_1, P_2, \cdots, P_m$，而 $P_1+y, P_2+y, \cdots, P_m+y$ 是 m 个线性无关圈，故对 G 有 $q-p+1=m$ ∎

由定理 B.3.2，可以得出从一完全定义开关函数 F_{ij}综合 SC-网络的算法。

算法 B.3.1

S_1 判别给定的函数 F_{ij}是否满足定理 B.3.1，若不满足，则 F_{ij}不是 SC-网络的开关函数。

S_2 从 F_{ij} 对应的集合$\{P_{ij}\}$取线性无关的元素 $P_1, P_2, \cdots, P_m$，添上一条边 y，由 $P_1+y, P_2+y, \cdots, P_m+y$ 构成圈矩阵 B。

S_3 由初等变换把 B 变成基本圈矩阵

$$B_f=[I \; B_{f12}]$$

S_4 构成基本割集矩阵

$$Q_f = [B_{f_{12}}^T \ I]$$

S_5　用 6.6 节的方法，构成以 Q_f 为基本割集矩阵的图 G_y。若无法构成，则 F_{ij}不是 SC-网络的开关函数。

S_6　删去边 y，所得到的图为 SC-网络，其中 y 的两个端点间的开关函数等于 F_{ij}。

例如，设

$$F_{ij} = ab + acd + bce + de$$

则

S_1　F_{ij}满足定理 B.3.1。

S_2　$\{P_{ij}\} = \{(a,b),(a,c,d),(b,c,e),(d,e)\}$，取 $P_1 = (a,b)$，$P_2 = (a,c,d)$，$P_3 = (b,c,e)$，($(d,e) = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$)。圈矩阵为

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 + y \\ P_2 + y \\ P_3 + y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

S_3 调整矩阵 B 的列序

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} b & d & e & a & c & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 + y \\ P_2 + y \\ P_3 + y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

把第一行加到第 3 行，得

$$B_f = \begin{matrix} \begin{matrix} b & d & e & a & c & y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

S_4 基本割集矩阵是

$$Q_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} b & d & e & a & c & y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

S_5 用 6.6 节中的方法构造图 G'（图 B.3-3）。

S_6 从图 G' 中删去 y（图 B.3-4）。顶点 3 和 4 间的开关函数等于 F_{ij}。

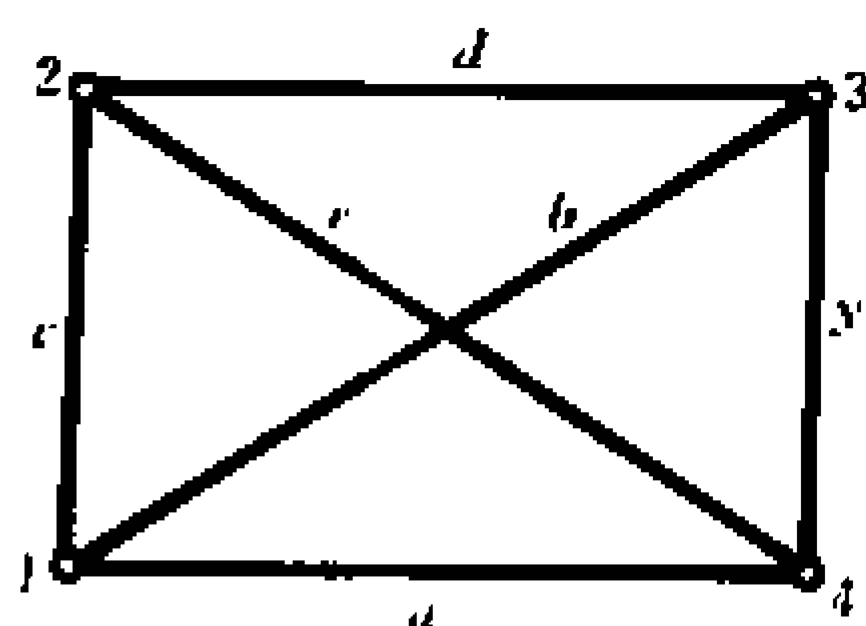


图 B.3-3

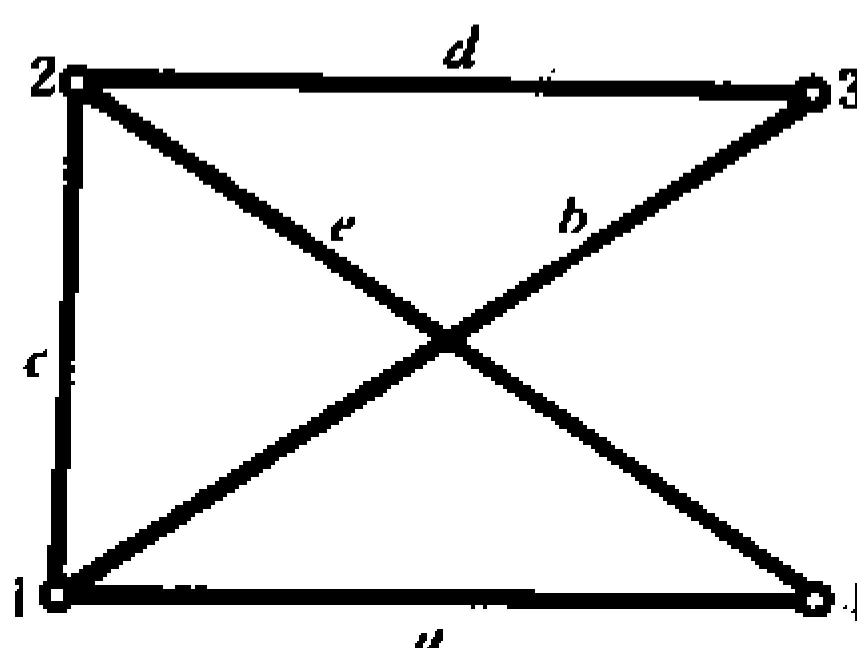


图 B.3-4

2. 不完全定义开关函数的 SC-网络的实现

有些开关函数含有一些约束项，这些约束项为 0 为 1 都可以。例如由下面真值表定义的开关函数

x_2	x_1	F
0	0	0
0	0	I
1	0	1
1	1	1

当自变量 $x_2, x_1 = 0,1$ 时，函数 F 可为 0 也可为 1，符号 I 表示 F 没有完全定义。这种开关函数称为**不完全定义开关函数**。

对一个不完全定义开关函数 F_{ij}，用记号$\{R_{ij}\}$和$\{I_{ij}\}$分别表示满足下述条件的集合：

(1)

$$F_{ij}(1) = \sum_{R_r \in \{R_{ij}\}} R_r \text{乘积} \qquad (B.3\text{-}3)$$

(2)

$$F_{ij}(I) = \sum_{I_r \in \{I_{ij}\}} I_r \text{乘积} \qquad (B.3\text{-}4)$$

其中 $F_{ij}(1)$是从 F_{ij}中把所有的 I 换成 0 所得的函数；$F_{ij}(I)$是从 F_{ij}中把所有的 1 换成 0 和所有的 I 换成 1 所得的函数。

若我们把 F_{ij}真值表中 I 都换成 1，则有

$$F_{ij} = F_{ij}(1) + F_{ij}(I) \qquad (B.3\text{-}5)$$

显然有

$$\{R_{ij}\} \cap \{I_{ij}\} = \varnothing \qquad (B.3\text{-}6)$$

我们可以不用真值表，而用 $F_{ij}(1)$和 $F_{ij}(I)$来定义开关函数。例如，前面真值表的开关函数 F_{ij}：

$$F_{ij}(1) = x_2, \{R_{ij}\} = \{x_2\},$$

$$F_{ij}(I) = x_1\overline{x}_2, \{I_{ij}\} = \{x_1, \overline{x}_2\}$$

当一不完全定义开关函数 F_{ij}给出后，我们可以适当选择$\{P_{ij}\}$使得

$$\{R_{ij}\} \subset \{P_{ij}\}$$

$\{I_{ij}\}$中的元也可以在$\{P_{ij}\}$中。然而，$\{P_{ij}\}$要选择适当，使得按算法 B.3.1 可用一 SC-网络实现 P_{ij}。

例如，设有一不完全定义开关函数 F_{ij}，它的对应集合是：

$$\{R_{ij}\} = \{(a,e,f),(b,d,f),(c,d,e),(a,b,c)\}$$

和

$$\{I_{ij}\} = \{(d,e,f),(a,b,f),(a,c,e),(b,c,d),(a,b,e)\}$$

若取$\{P_{ij}\}=\{R_{ij}\}$，可知这种选法满足定理 B. 3. 1，取 $P_1=(a,e,f)$，$P_2=(b,d,f)$，$P_3=(c,d,e)$，有

$$B=\begin{array}{c} \\ P_1+y \\ P_2+y \\ P_3+y \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

它就是基本圈矩阵，于是基本割集矩阵是

$$Q_f=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

这个矩阵是不可实现的。因此，$F_{ij}(1)$不是 SC-网络的开关函数。

若在$\{P_{ij}\}$中再加入(d,e,f)，则因

$$(d,e,f)\oplus P_1\oplus P_2=(a,b,f)\in\{I_{ij}\}$$

由定理 B. 3. 1，(a,b,f)必须也在$\{P_{ij}\}$中。同样因

$$(d,e,f)\oplus P_2\oplus P_3=(b,c,d)\in\{I_{ij}\}$$

所以(b,c,d)也必须在$\{P_{ij}\}$中，且因

$$(d,e,f)\oplus P_1\oplus P_3=(a,c,e)\in\{I_{ij}\}$$

所以(a,c,e)也必须在$\{P_{ij}\}$中。因此有

$$\{R_{ij}\}=\{R_{ij}\}\cup\{(d,e,f),(a,b,f),(b,c,d),(a,c,e)\}$$

显然它满足定理 B. 3. 1，取线性无关道路 P_1，P_2，P_3 和 P_4，则有

$$B=\begin{array}{c} \\ P_1+y \\ P_2+y \\ P_3+y \\ P_4+y \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

把第 4 行加到第 2 行和第 3 行，得

$$B_f=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

于是 Q_f 为

$$Q_f=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

矩阵 Q_f 是可实现的，它对应的图如图 B. 3-5 所示，删去边 y 即得所求得的 SC 网络。

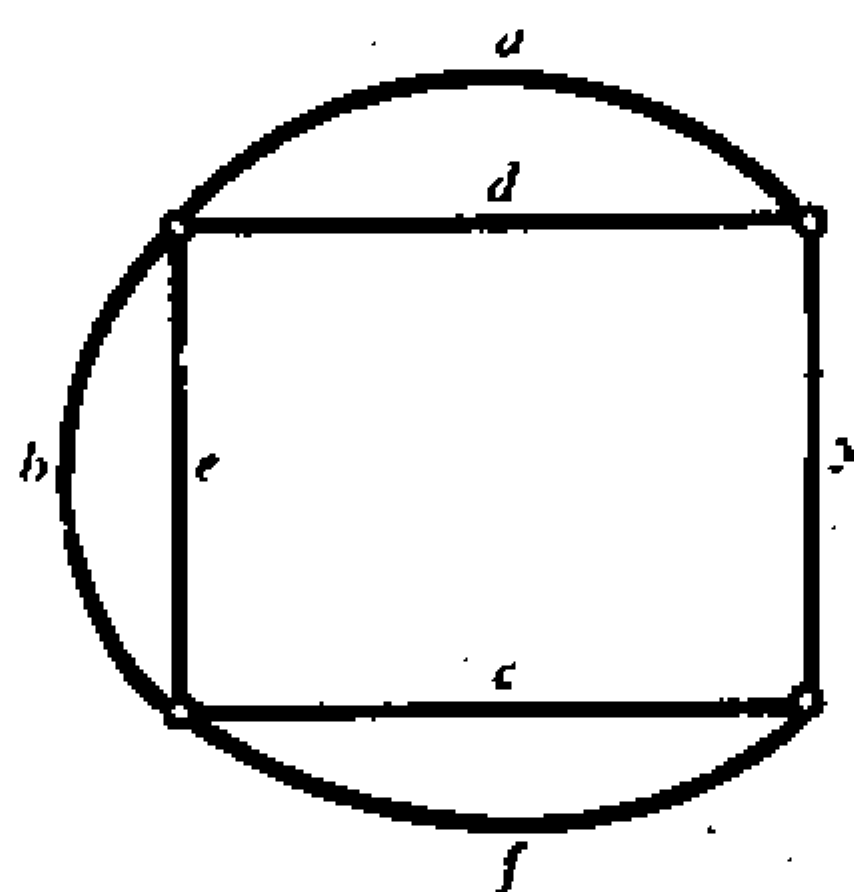


图 B. 3-5

假如在上例中不取 (d,e,f) 而取 (a,b,e) 加到 $\{P_{ij}\}$ 中去，因为

$$(a,b,e)\oplus P_1\oplus P_2 = (a)\notin\{I_{ij}\}$$

所以，这时 $\{P_{ij}\}$ 不可能满足定理 B. 3. 1，因此这个例子中的 $\{P_{ij}\}$ 选法只有一种。

但应注意，只要$\{P_{ij}\}$的不同选法保持出现的相异布尔变量数相等，$\{P_{ij}\}$的不同选法不会影响求得的 SC-网络中的边数，该边数就等于$\{P_{ij}\}$中出现的相异的布尔变量的数目。

3. 单对接点网络

每个元件（如继电器）只允许最多用二个接点 x_1 和 $\bar{x}_1$，由这样一系列接点构成的网络称为**单对接点网络**，记作 SP-网络。

设 F_{ij}是一个单对接点网络的开关函数，于是有

$$F_{ij} = \sum_{P_r \in \{P_{ij}\}} P_r \text{乘积}$$

但这时对应的集合$\{P_{ij}\}$可能没有把 i 和 j 间的所有道路都包括在内。

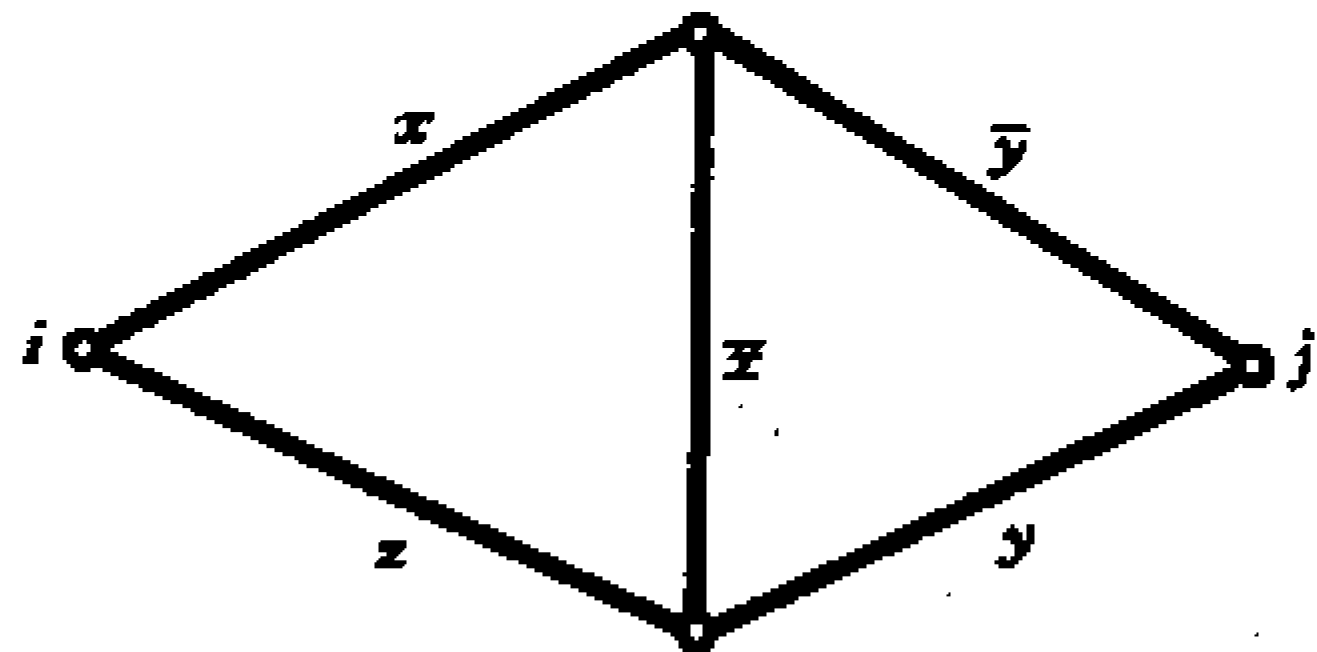


图 B. 3-6

例如，图 B. 3-6 所示的 SP-网络

$$F_{ij} = x\bar{y} + yz + \bar{x}\,\bar{y}\,z$$

F_{ij}对应集合

$$\{P_{ij}\} = \{(x,\bar{x}),(y,z),(\bar{x},\bar{y},z)\}$$

中没有包含道路 $x\,\bar{x}y$。因为在逻辑表达式

$$x\bar{x} = 0$$

中，把这一项抹掉了。

把同时包含某一布尔变量的原变量和反变量的道路称为 **0-道路**。

一般说来，对应于 SP-网络的完全定义开关函数 F_{ij}的集合$\{P_{ij}\}$不满足定理 B. 3. 1，因此，在$\{P_{ij}\}$中添入 0-道路，使所得的集合$\{P_{ij}\}$能由算法 B. 3. 1 求出一 SP-网络。

例如，完全定义开关函数

$$F_{ij} = ace + ac\bar{d}e + \bar{a}bce + bd\bar{e} + \bar{a}bc\bar{d}e$$

对应的集合

$$\{P_{ij}\} = \{(a,c,e),(a,c,\bar{d},e),(\bar{a},b,c,e),$$
$$(b,d,\bar{e}),(\bar{a},b,c,\bar{d},e)\}$$

不满足定理 B. 3. 1。这是因为

$$(a,c,e) \oplus (a,c,\bar{d},e) \oplus (b,d,\bar{e}) = (b,d,\bar{d},\bar{e}) \notin \{P_{ij}\}$$
$$(a,c,e) \oplus (\bar{a},b,c,e) \oplus (b,d,\bar{e}) = (a,\bar{a},d,\bar{e}) \notin \{P_{ij}\}$$
$$(a,c,\bar{d},e) \oplus (\bar{a},b,c,e) \oplus (b,d,\bar{e}) = (a,\bar{a},d,\bar{d},\bar{e}) \notin \{P_{ij}\}$$

然而这些都是 0-道路，把这些 0-道路添入$\{P_{ij}\}$中，不变 F_{ij}。所以这时得到的$\{P_{ij}\}$为

$$\{P_{ij}\} = \{(a,c,e),(a,c,\bar{d},e),(\bar{a},b,c,e),$$
$$(b,d,\bar{e}),(\bar{a},b,c,\bar{d},e),(b,d,\bar{d},e),$$
$$(a,\bar{a},d,\bar{e}),(a,\bar{a},d,\bar{d},\bar{e})\}$$

取

$$P_1 = (a,c,e) \quad P_2 = (a,c,\bar{d},e)$$
$$P_3 = (\bar{a},b,c,e) \quad P_4 = (b,d,\bar{e})$$

为线性无关道路，于是得圈矩阵

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

把第一行加到第二行，得

$$B_f = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccccccc} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \end{array}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是基本割集矩阵是

$$\begin{array}{ccccccccc} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \end{array}$$

$$Q_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

把第一行加到第 5 行，第 2 行加到第 3 行可得关联矩阵

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{ccccccccc} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

顶点 6 为参考点。矩阵 A 对应的图 G_y，如图 B. 3-7 所示。

从图 G_y 中删去边 y，所得的图 G 为一 SP-网络，其开关函数 F_{ij}为所给的函数。

不完全定义开关函数要用 SP-网络来实现，其方法和 SC-网络相仿。

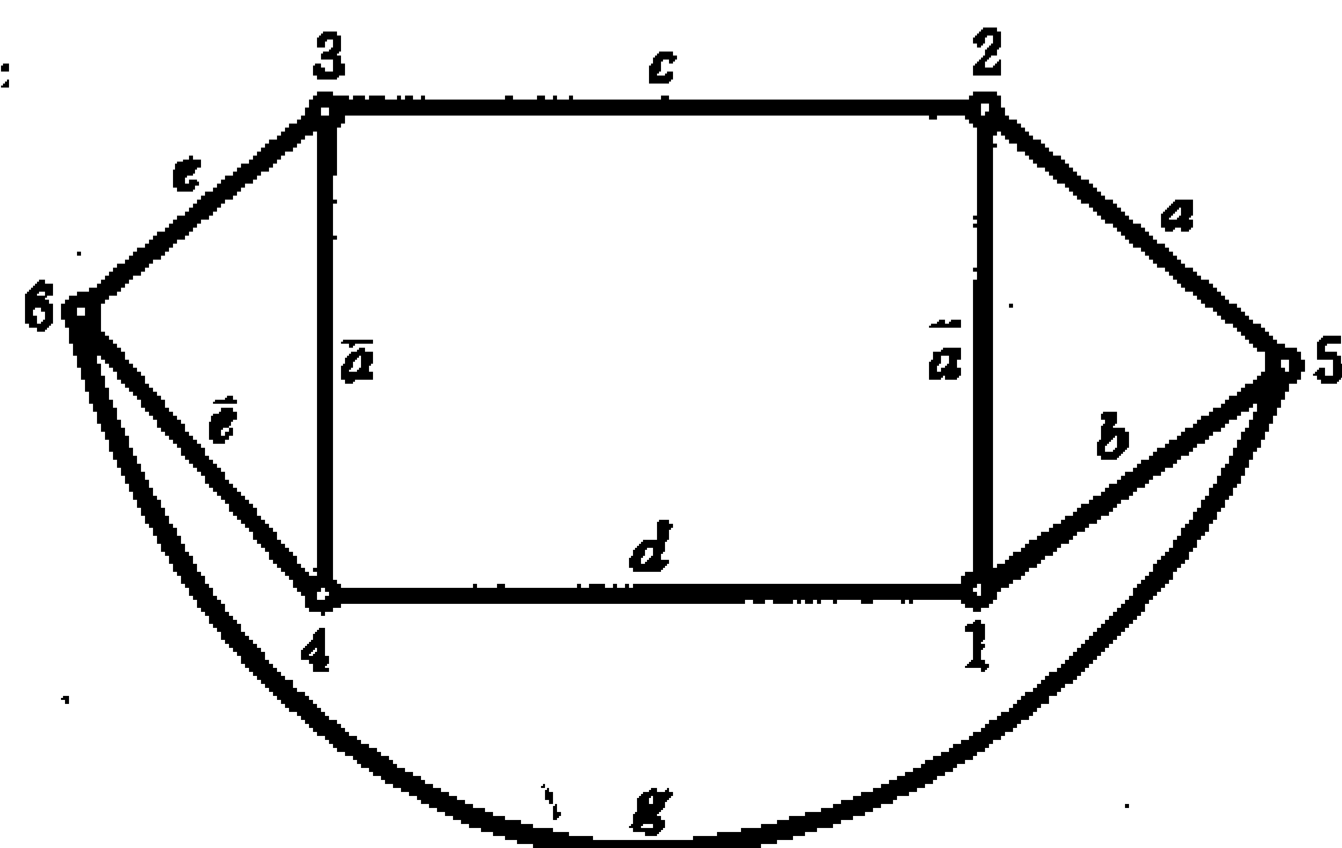


图 B. 3-7

附录C 电 网 络

C.1 引 言

在表示物理或物理系统的特征，特别是当一个系统可以用一个图表示时，基尔霍夫定律是很重要的。换句话说，可以把系统按是否满足基尔霍夫定律来分类：仅满足基尔霍夫电流定律；仅满足基尔霍夫电压定律；既满足基尔霍夫电流定律又满足基尔霍夫电压定律；基尔霍夫电流定律和电压定律均不满足。例如，电网络是既满足基尔霍夫电流定律又满足基尔霍夫电压定律。

下面我们讨论当一个系统可以用一个图（如无特殊说明，所讨论的图都是连通的）来表示基尔霍夫定律的特征。

考察一个电网络的图 N（图 C.1-1），其中每条弧 e_k 上的

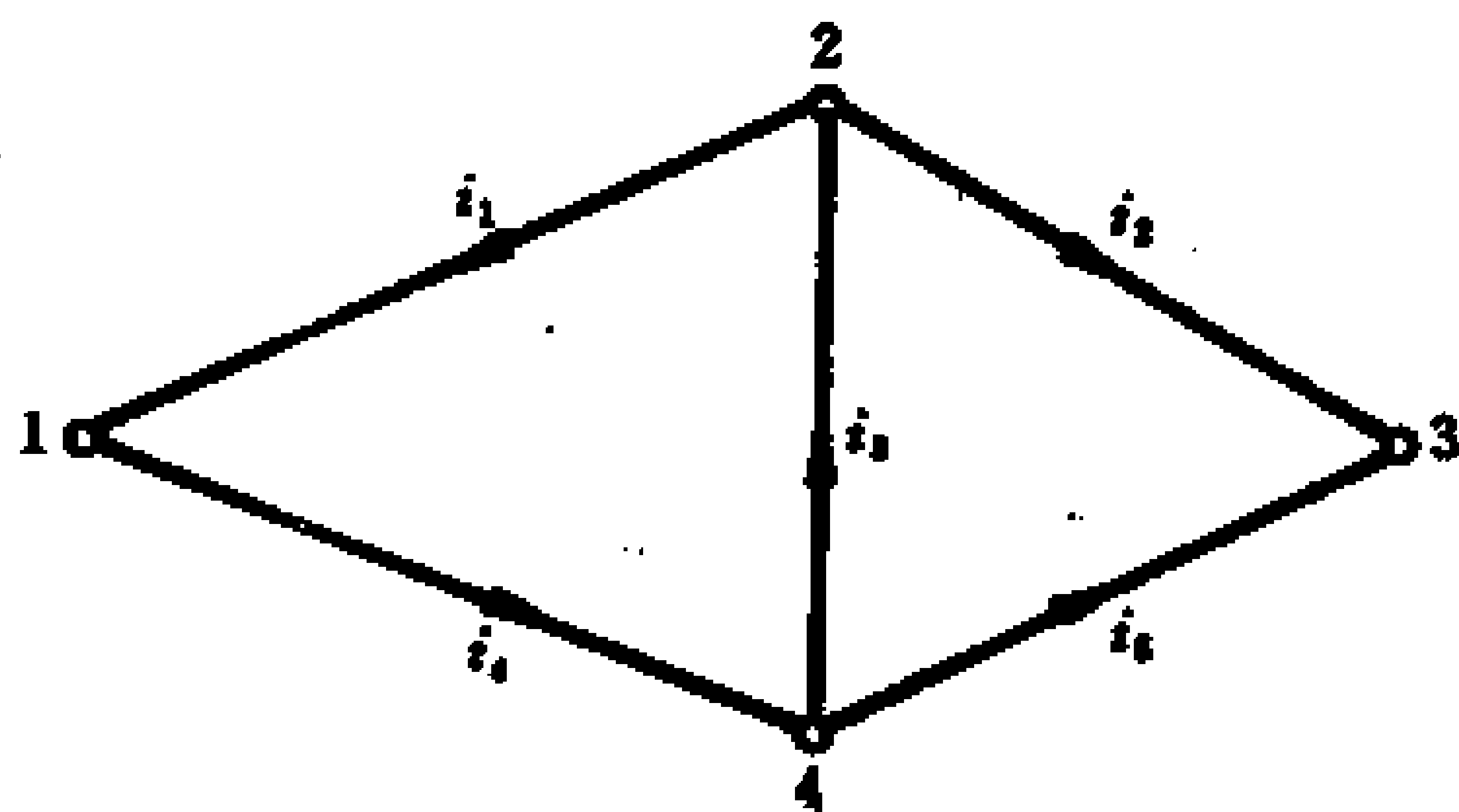


图 C.1-1

数 i_k 表示 e_k 上支路电流的大小，弧的方向作为支路电流的方向。

设 A 为电网络的图 N 的关联矩阵，定义

$$I_e = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_q \end{pmatrix}$$

为电流列阵，MI_e 是 $(P-1)\times 1$ 矩阵，MI_e 的第 k 行是 A 的第 k 行与 I_e 的对应元素乘积之和，而 M 的第 k 行是 N 的第 k 个顶点的关联集。因此，MI_e 的第 k 行是 N 中与第 k 个顶点关联的所有分支电流的和。于是基尔霍夫电流定律可以表示成

$$MI_e = 0 \tag{C.1-1}$$

例如，对图 C.1-1 所示的电网络的图 N，我们有

$$\begin{matrix} & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -i_1+i_4 \\ i_1+i_2-i_3 \\ -i_2-i_5 \end{pmatrix} = 0$$

如果用支路电压 v_k 作为弧 e_k 的权，弧的方向指向负极，那么可以得到相应的基尔霍夫电压定律的表达式。

设 B 为电网络的图 N 的圈矩阵，定义

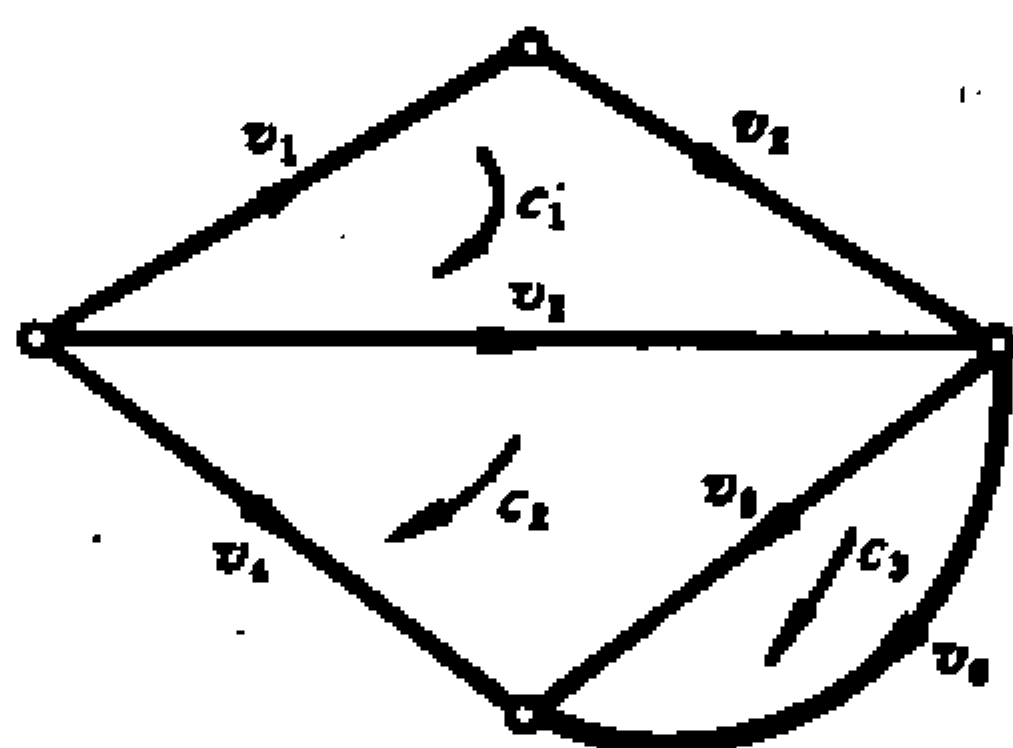
$$V_e = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_q \end{pmatrix}$$

为电压列阵，基尔霍夫电压定律可以写成

$$BV_e = 0 \qquad (C.1\text{-}2)$$

例如，图C.1-2所示的电网络的图 N，取圈 C_1、C_2 和 C_3，则有圈矩阵

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



图C.1-2

由式(C.1-2)，有

$$BV_e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 + v_2 - v_3 \\ v_3 - v_4 + v_5 \\ - v_5 + v_6 \end{bmatrix} = 0$$

因为连通的 (p,q) 图的关联矩阵的秩是 $p-1$，圈矩阵的秩是 $q-p+1$，故由式(C.1-1)和式(C.1-2)知，有 $p-1$ 个线

性无关的基尔霍夫电流方程，有 $q-p+1$ 个线性无关的基尔霍夫电压方程。

我们知道，割集矩阵和关联矩阵有如下的关系：

$$Q = DM, D \text{ 为非奇异矩阵}$$

于是式(C.1-1)可改写成

$$QI_e = 0 \tag{C.1-3}$$

取电网络的图 N 的一棵生成树 T，把 N 的关联矩阵 M 按列分块：

$$M = [M_{11}\ M_{12}]$$

其中 M_{11} 的列对应连枝，M_{12} 的列对应树枝；把电流列阵分块：

$$I_e = \begin{bmatrix} I_c \\ I_t \end{bmatrix}$$

其中 I_c 对应连枝电流，I_t 对应树枝电流，由式(C.1-1)，有

$$[M_{11} M_{12}] \begin{bmatrix} I_c \\ I_t \end{bmatrix} = 0$$

由上式可知

$$M_{11}I_c + M_{12}I_t = 0$$

$$M_{12}I_t = -M_{11}I_c$$

由于 M_{12} 是非奇异的，所以

$$I_t = -M_{12}^{-1}M_{11}I_c \tag{C.1-4}$$

这样，$p-1$ 个树枝电流可以用 $q-p+1$ 个连枝电流来表达。由式(C.1-4)，电流的列阵可以写成

$$I_e = \begin{bmatrix} I_c \\ I_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -M_{12}^{-1}M_{11} \end{bmatrix} I_c$$

(其中 I 为单位矩阵)，上式可即写成 M

或 $$I_e = [I \quad -(M_{12}^{-1}M_{11})^T]^T I_c$$

即

$$I_e = B_f^T I_c \qquad (C.1\text{-}5)$$

式(C.1-5)表明，q 个支路电流可以用 $q-p+1$ 个连枝电流来表达。

类似地，在式(C.1-2)中，把基本圈矩阵按列分块，则有

$$[I \quad B_{f_{12}}]\begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix} = 0 \qquad (C.1\text{-}6)$$

其中单位矩阵 E 的列对应连枝，$B_{f_{12}}$的列对应树枝；V_c 对应连枝电压，V_t 对应树枝电压。由式(C.1-6)，有

$$V_c + B_{f_{12}} V_t = 0$$

即

$$V_c = -B_{f_{12}} V_t \qquad (C.1\text{-}7)$$

这表明 $q-p+1$ 个连枝电压可以用 $p-1$ 个树枝电压来表达。由式(C.1-7)，电压列阵可以表示成

$$V_e = \begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{f_{12}} V_t \\ V_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{f_{12}} \\ I \end{bmatrix} V_t$$

即

$$V_e = B_{f_t}^T V_t$$

这就是说，q 个支路电压可以用 $p-1$ 个树枝电压来表达。

综上所述，无论是支路电流，或者是支路电压，并不全部都是独立的。基尔霍夫定律的约束使得 q 个支路电流可以用 $q-p+1$ 个适当选择的独立的电流变量来表示。同样，q 个支路电压可以用 $p-1$ 个适当选择的独立的电压变量来表示。下面两节要介绍的节点变换和网孔变换就是以这个思想为基础的。

C.2 节点变换

当一个系统满足基尔霍夫电压定律时，支路电压是线性相关的。设 B_f 是赋权有向图 N 关于生成树 T 的基本圈矩阵，把电压列阵分块：

$$Ve = \begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix}$$

其中 V_c 是由对应生成树 T 的连枝的支路电压组成，V_t 由对应于 T 的树枝的支路电压所组成。由基尔霍夫定律，有

$$B_f V_e = [I \ B_{f_{12}}] \begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix} = 0$$

即

$$V_c = - B_{f_{12}} V_t$$

于是

$$V_e = \begin{bmatrix} - B_{f_{12}} \\ I \end{bmatrix} V_t \qquad (C.2\text{-}1)$$

把 $B_{f_{12}} = -(M_{12}^{-1} M_{11})^T$ 代入式(C.2-1)，得

$$V_e = \begin{bmatrix} (M_{12}^{-1} M_{11})^T \\ I \end{bmatrix} V_t \qquad (C.2\text{-}2)$$

式(C.2-2)可以化成

$$V_e = \begin{bmatrix} M_{11}^T (M_{12}^{-1})^T \\ M_{12}^T (M_{12}^{-1})^T \end{bmatrix} V_t = \begin{bmatrix} M_{11}^T \\ M_{12}^T \end{bmatrix} (M_{12}^{-1})^T V_t$$

令

$$N(V) = (M_{12}^{-1})^T V_t \qquad (C.2\text{-}3)$$

则有

$$V_e = M^T N(V) \qquad (C.2\text{-}4)$$

式(C.2-4)称为**节点变换**。容易看出，不论 $N(V)$ 是怎样的 $p-1$ 个函数组成的列阵，因为恒有 $BM^T=0$，所以

$$BV_e = BM^T N(V) = 0$$

这就是说，基尔霍夫电压定律总是满足的，当 $N(V)$ 选定后，V_e 可由式(C.2-4)确定。

由基尔霍夫电流定律有

$$MI_e = 0$$

上式与式(C.2-4)是节点法的两个基本关系式。

把式(C.2-4)两端的矩阵转置，有

$$V_e^T = [v_{n_1} v_{n_2} \cdots v_{n_{p-1}}] M \qquad (C.2\text{-}5)$$

其中

$$N(V)^T = [v_{n_1} v_{n_2} \cdots v_{n_{p-1}}] \qquad (C.2\text{-}6)$$

由式(C.2-5)可以看出，v_{n_i} 将乘到矩阵 M 的第 i 行上去，因此，v_{n_i} 可以看成是加到对应矩阵 M 的第 i 行的那个顶点上的权，M 的各行中没有表示参考点的行，而 v_{n_i} 则表示从 M 的第 i 行所对应的顶点到参考点的电压，我们称 v_{n_i} 为**节点电压**。

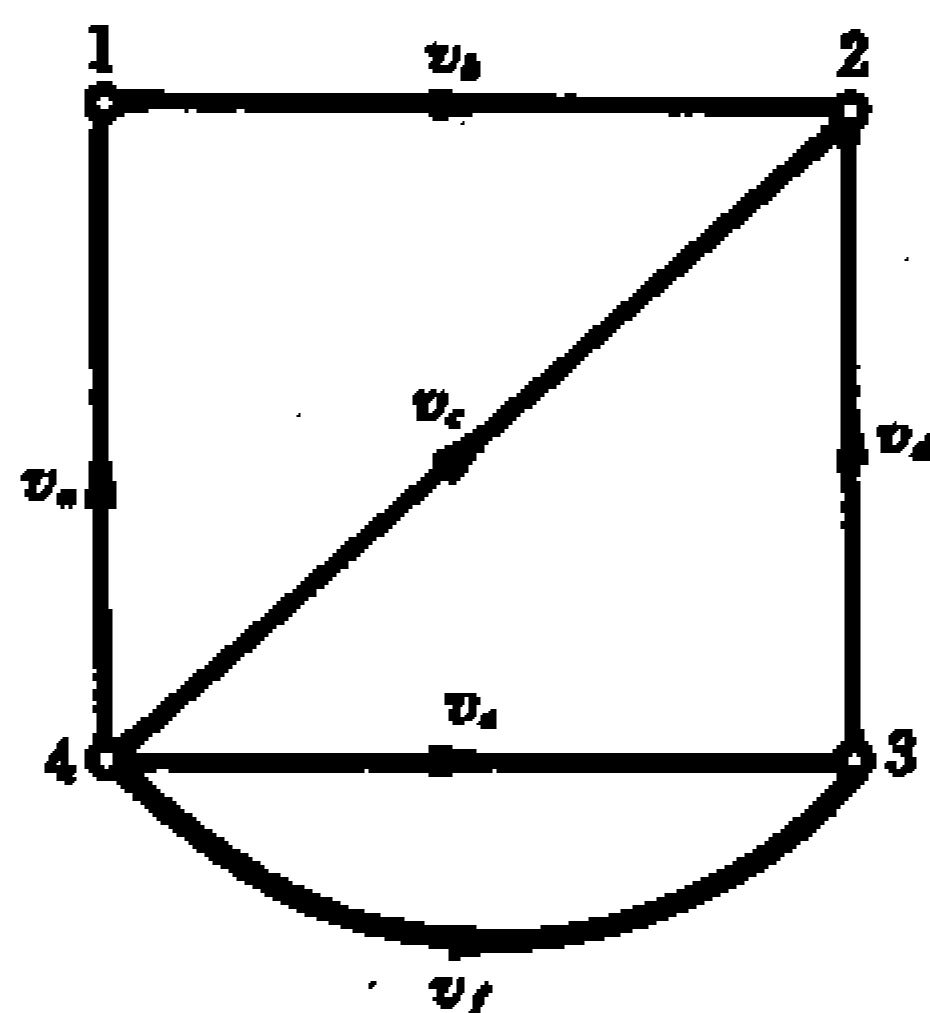


图 C.2-1

例如，取图 C.2-1 所示的电网络 N（取顶点 4 为参考点）

N 的关联矩阵是

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$N(V) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

则

$$V_e = M^T N(V) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \\ v_e \\ v_f \end{array} \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_1 - v_2 \\ -v_2 \\ -v_2 + v_3 \\ -v_3 \\ -v_3 \end{bmatrix}$$

如果我们用割集矩阵 Q 代替关联矩阵 M，那么式(C. 2-2)变成

$$V_e = \begin{bmatrix} Q_{11}^T (Q_{12}^T)^{-1} \\ I \end{bmatrix} V_t = \begin{bmatrix} Q_{11}^T \\ Q_{12}^T \end{bmatrix} (Q_{12}^{-1})^T V_t = Q^T N(V) \tag{C. 2-7}$$

其中

$$N(V) = (Q_{12}^{-1})^T V_t \tag{C. 2-8}$$

如果 Q 是关于某生成树的基本割集矩阵，$N(V)$ 的元素表示生成树的树枝的支路电压，则式(C. 2-7) 为称**广义节点变换**。

从讨论中可以看到，如果我们选定对应于割集矩阵 Q(或关联矩阵)的 $p-1$ 个线性无关割集，且由式(C. 2-7)将支路

电压表示为这些电压的函数，则系统自动满足基尔霍夫电压定律。

要写出电网络的方程，还需要根据支路的具体内容，利用支路电流与支路电压的关系。对于线性定常网络，通常采用图 C. 2-2 所示的一般支路，其中 i_{hk} 和 v_{hk} 分别为独立电流源与独立电压源的电流和电压。

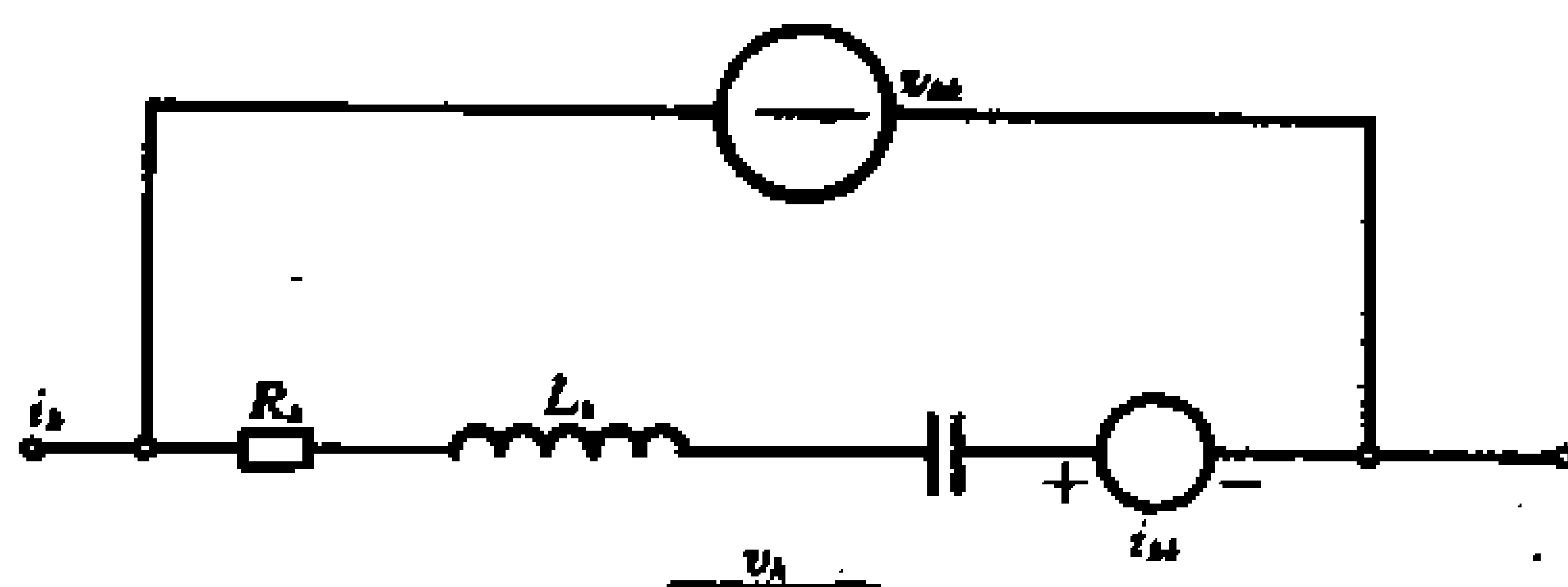


图 C. 2-2

若用拉氏变换，并设零值初始条件，则有

$$v_k(h) = (hL_k + R_k + \frac{1}{nC_k})\{i_k(h) - i_{hk}(h)\} + v_{hk}(h) \tag{C. 2-9}$$

为了简单起见，略去电流和电压括号内的 h 简写作 v_k、i_k 等。

令

$$Z_k = hL_k + R_k + \frac{1}{hC_k}$$

Z_k 为支路 k 的运算阻抗，于是式(C. 2-9)可简写成

$$v_k = Z_k\{i_k - i_{hk}\} + v_{hk}(k = 1,2,\cdots,q) \quad \text{(C. 2-10)}$$

或

$$i_k = Y_k v_k + i_{hk} - Y_k v_{hk}(h = 1,2\cdots,q) \quad \text{(C. 2-11)}$$

式中 $Y_k = \frac{1}{Z_k}$，即支路 k 的运算导纳。

如果各支路的电感之间不存在互感，则支路电压列矢量

和支路电流列矢量之间的关系可写成

$$V_e = Z(I_e - I_h) + V_h$$

式中 Z 为支路阻抗矩阵，Z 是一个对角矩阵，其主对角线上的元素是各支路的运算阻抗：

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & & & \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_q \end{pmatrix}$$

而支路电压列矢量 $V_e = (v_{e_1} v_{e_2}, \cdots v_{e_q})^T$，电压源列矢量 $V_h = [v_{e_1} v_{e_2}, \cdots v_{h_q}]^T$。

如令 $Y = Z^{-1}$，则

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & & & \\ & Y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_q \end{pmatrix}$$

将有

$$I_e = YV_e - I_h - YV_h$$

把式(C.2-4)代入上式，有

$$I_e = YM^T N(V) + I_h - YV_h$$

由 $MI_e = 0$，有

$$MYM^T N(V) + MI_h - MYV_h = 0$$

$$MYM^T (V) = - MI_h + MYV_h$$

令 $Y_n \triangleq MYM^T$（符号"$\triangleq$"表示"按定义等于"）为节点导纳矩阵，则上式可写为

$$Y_n N(V) = - MI_h + MYV_h$$

这就是所要求的节点方程。

如令 $I_n \triangleq -MI_s + MYV_s$，则节点方程为

$$Y_n N(V) = I_n \qquad (C.2\text{-}12)$$

$N(V)$解出后，V_e 和 I_e 就不难求出。

我们举一个例子。

写出图 C.2-3 所示的电网络的节点方程。

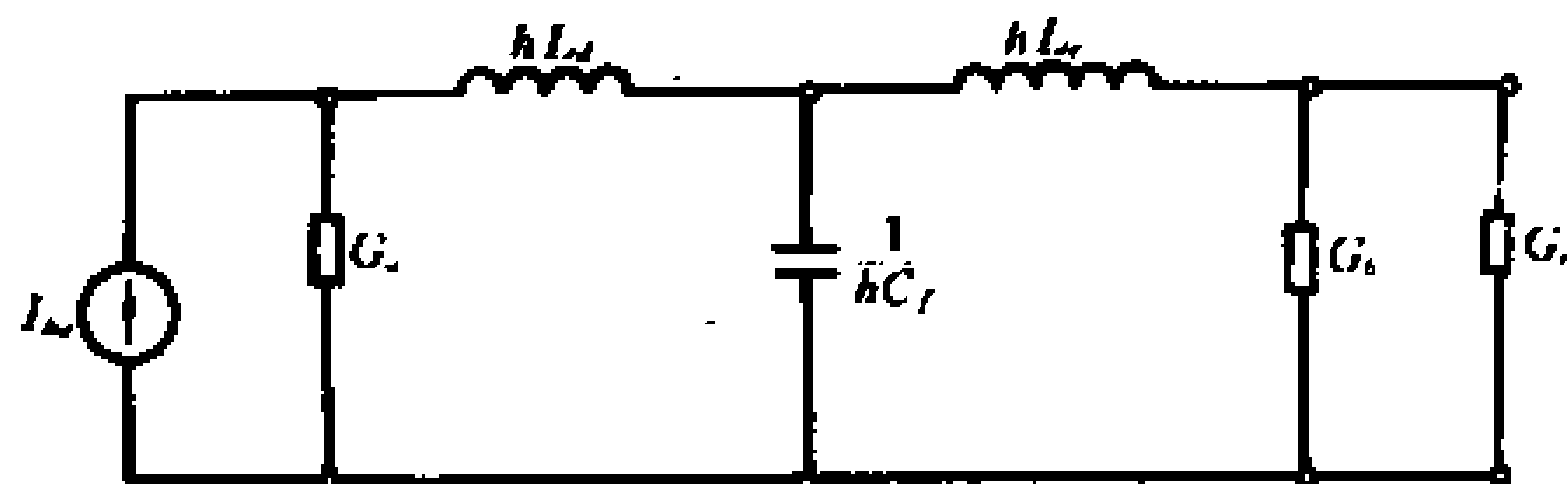


图 C.2-3

电网络的图 N 如图 C.2-4 所示。

以节点 4 为参考点，关联矩阵 M 是

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

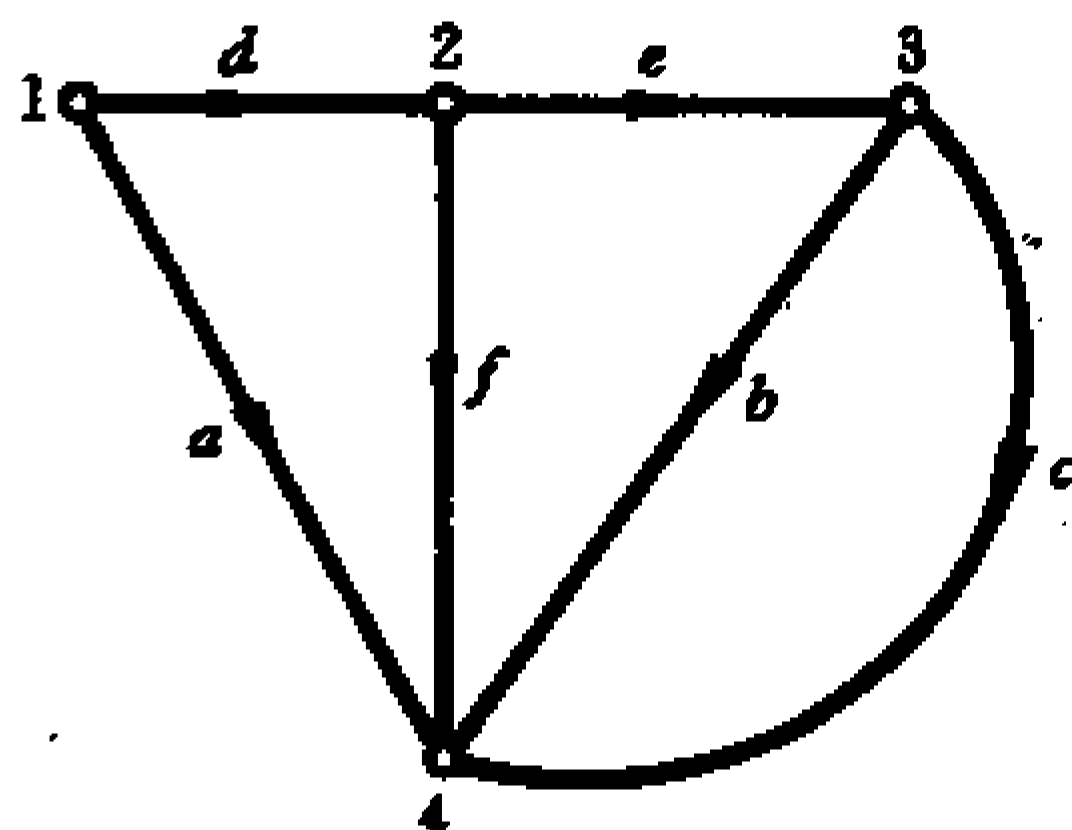


图 C.2-4

支路导纳矩阵是

$$Y = \begin{bmatrix} G_a & & \cdots & & & 0 \\ 0 & G_b & & & & \vdots \\ \vdots & & G_c & & & \\ & & & hL_d & & \\ & & & & hL_e & \\ 0 & & \cdots & & & \frac{1}{hC_f} \end{bmatrix}$$

电流源列矢量 $I_h=[-I_{h_a},0,0,0,0,0]^T$，电压源列矢量 $V_h=0$。节点导纳矩阵为

$$Y_n = AYA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} G_a & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & G_b & & & & \vdots \\ \vdots & & G_c & & & \vdots \\ \vdots & & & hL_d & & \vdots \\ \vdots & & & & hL_e & \\ 0 & \cdots & & & & \dfrac{1}{hC_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_a + hL_d & -hL_d & 0 \\ -hL_d & hL_d + hL_e + \dfrac{1}{hC_f} & -hL_e \\ 0 & -hL_e & G_b + G_c + hL_e \end{bmatrix}$$

$$MI_h = \begin{bmatrix} -I_{h_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是节点方程是

$$\begin{bmatrix} G_a + hL_d & -hL_d & 0 \\ -hL_d & hL_d + hL_e + \dfrac{1}{hC_f} & -hL_e \\ 0 & -hL_e & G_b + G_c + hL_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{h_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C.3 网孔变换

当一个系统满足基尔霍夫定律时，各支路电流间不是互相独立的，所以各支路电流可以表为选定的一组线性无关的支路电流的函数，网孔变换就是方法之一。

把电流列阵分块：

$$Ie = \begin{bmatrix} I_c \\ I_t \end{bmatrix}$$

其中 I_c 是对应某生成树 T 的连枝的所有支路电流的列矩阵，I_t 对应 T 的树枝的所有支路电流的列矩阵。I_c 中的元数为 $q-p+1$，I_t 中的元数为 $p-1$。再把关联矩阵 M 分块：

$$M = [M_{11}\ M_{12}]$$

其中 M_{11}的列对应于 T 的连枝，M_{12}的列对应 T 的树枝。

我们有

$$MI_e = [M_{11}M_{12}]\begin{bmatrix} I_c \\ I_t \end{bmatrix} = 0$$

或

$$I_t = -M_{12}^{-1}M_{11}I_c$$

于是

$$Ie = \begin{bmatrix} I \\ -M_{12}^{-1}M_{11} \end{bmatrix} I_c \qquad \text{(C.3-1)}$$

由式(13.2-4)，知

$$B_f = [I \quad -(M_{12}^{-1}M_{11})^T]$$

故

$$I_e = B_f^T I_c \qquad \text{(C.3-2)}$$

因为任何圈矩阵 B 可表示为

$$B = CB_f$$

其中 C 为 $q-p+1$ 阶非奇异矩阵，即

$$B = [B_{11}B_{12}] = C[I\ B_{f_{12}}]$$

这里 $B_{11}=C$ 是非奇异的，所以

$$B_f = C^{-1}B = B_{11}^{-1}B$$

于是由式(C. 3-2)得

$$I_e = B^T(B_{11}^{-1})^T I_c$$

或

$$I_e = B^T P(I) \qquad \text{(C. 3-3)}$$

其中

$$P(I) = (B_{11}^{-1})^T I_c \qquad \text{(C. 3-4)}$$

式(C. 3-3)称为**网孔变换**。

把式(C. 3-3)代入式(C. 1-1)，得

$$MI_e = MB^T P(I) = 0$$

因为 MB^T 恒为零，故不论 $P(I)$ 为怎样的 $q-p+1$ 个函数组成的列矩阵，基尔霍夫电流定律都满足，将式(C. 3-3)两边转置，得

$$I_e^T = (i_{m_1} j_{m_2} \cdots i_{m_{q-p+1}})B$$

因此，当 $P(I)$ 一但确定，由网孔变换即可完全确定 I_e。

由式(C. 3-3)可以看出，元素 i_{m_r} 将乘到 B 的第 r 行的每个元素上去，$r=1,2\cdots,q-p+1$。于是 i_{m_r} 可以看成是加到对应于圈矩阵 B 的第 r 行的圈上的权，$P(I)$ 可以看作所谓圈电流的列矩阵。

例如，在图 C. 3-1 所示的电网络的图中，取圈 C_1,C_2,C_3。

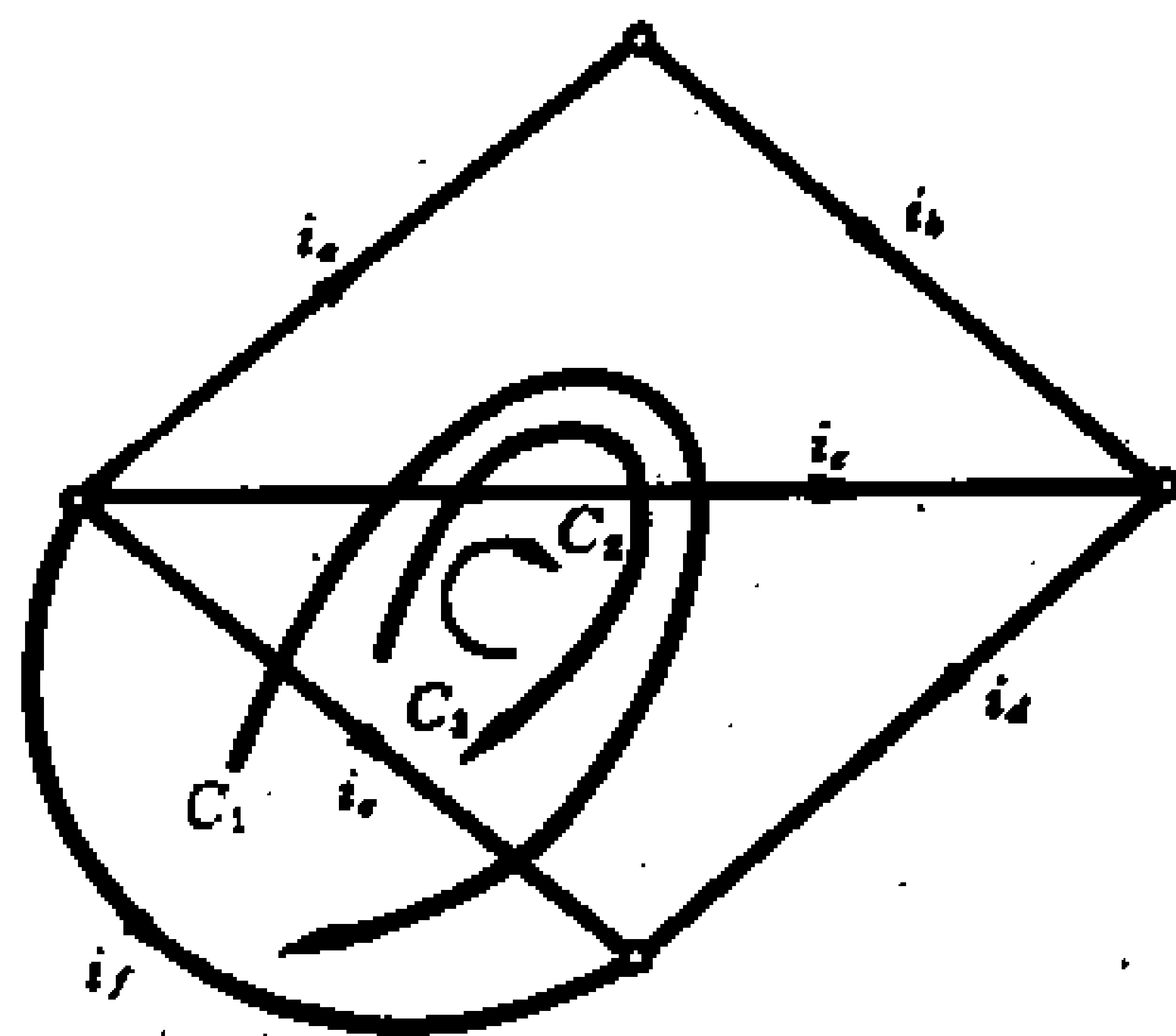


图 C. 3-1

圈矩阵 B 为

$$B = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

取

$$P(I) = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

则由式(C. 3-3)，有

$$I_e = B^T P(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{array} \begin{bmatrix} i_1 + i_3 \\ i_1 + i_3 \\ i_2 \\ i_1 + i_2 + i_3 \\ -i_2 - i_3 \\ -i_1 \end{bmatrix}$$

可以看到，若我们选定对应于圈矩阵的行的 $q-p+1$ 个线性无关圈，且由式(C.3-3)将支路电流表示为圈电流的函数，则系统自动满足基尔霍夫电流定律。

要写出电网络的圈方程，仍可采用图 C.2-2 的一般支路，在考虑到具有互感和受控制的情况下，支路电压列阵是

$$V_e = Z(I_e - I_h) + V_h$$

其中 Z 是支路阻抗矩阵，主对角线上的元素为支路阻抗，非主对角线上的元素则考虑到互感及受控源等。若设圈电流列矢量为 $I_r(r=q-p+1)$，圈矩阵为 B_r，则有

$$I_e = B_r^T I_r$$

$$B_r V_e = 0$$

根据以上诸式，化简后，得

$$B_r Z B_r^T I_r = B_r Z I_h - B_r V_h$$

若以 $Z_r \triangleq B_r Z B_r^T$（$Z_r$ 称为圈阻抗矩阵）代入上式，则有

$$Z_r I_r = B_r Z I_h - B_r V_h$$

这是一组 $q-p+1$ 个独立的方程，解出 I_r，得

$$I_r = Z_r^{-1} B_r Z I_h - Z^{-1} B_r V_h$$

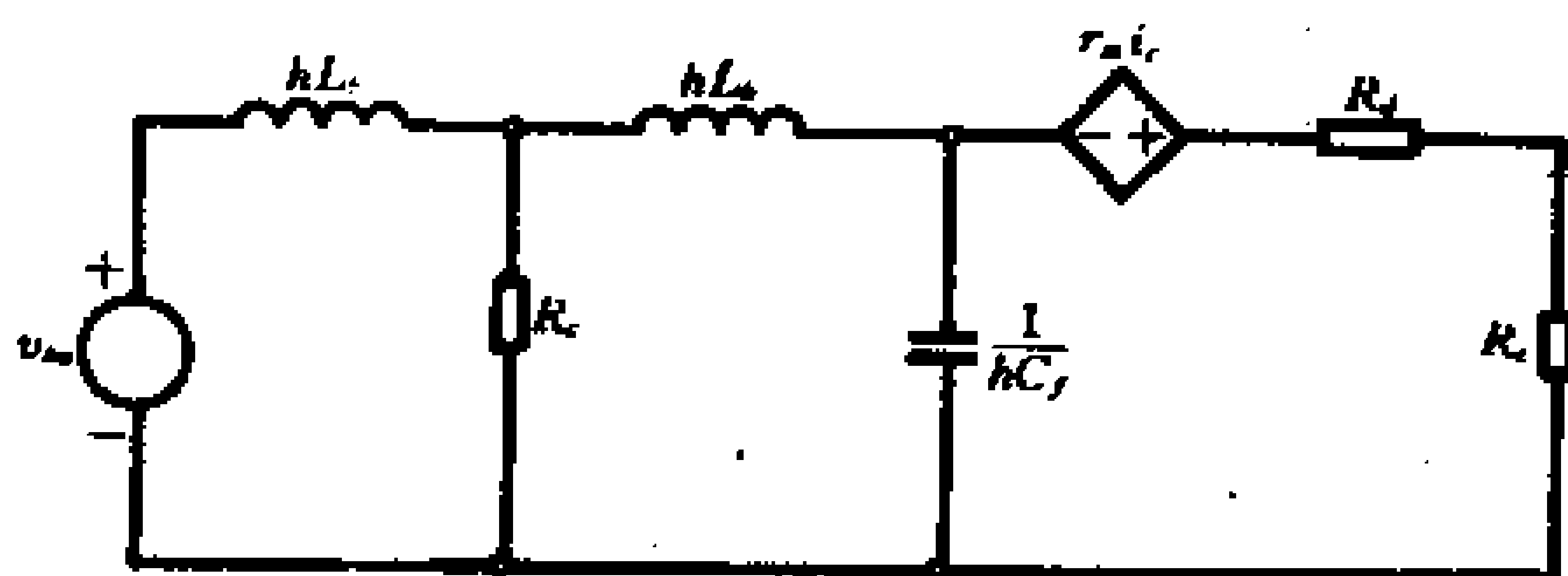
I_r 求出后，不难求出 I_e 和 V_e。

例如，图 C.3-2(*a*) 所示的电网络，电网络的图如图 C.3-2(*b*)所示。

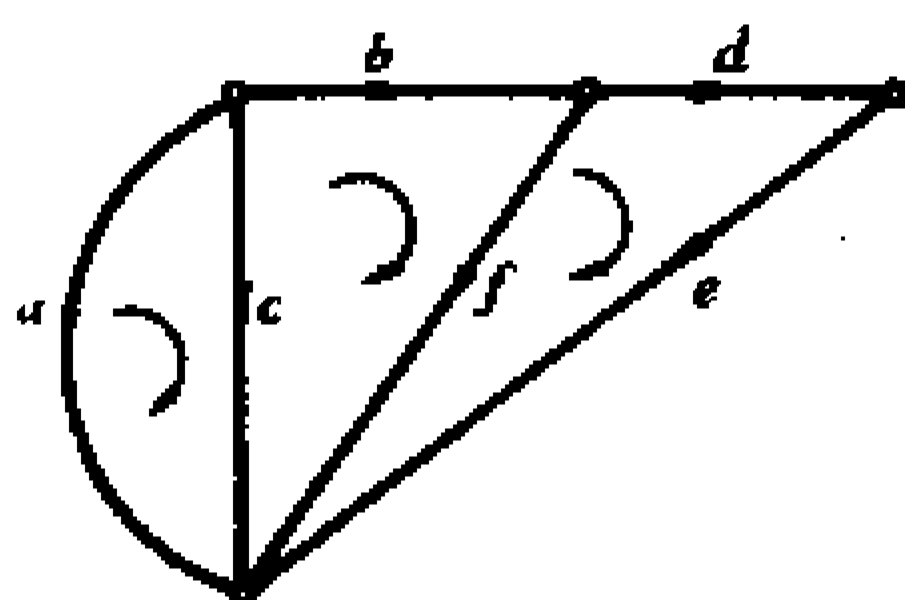
圈矩阵 B_r 是

$$B_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

支路阻抗矩阵和圈阻抗矩阵分别是



(a)



(b)

图 C. 3-2

$$Z=\begin{pmatrix} hl_a & hP_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ hP_{12} & hl_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_m & R_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{hC_f} \end{pmatrix}$$

$$Z_r=B_rZB_r^T=\begin{pmatrix} hl_a+R_c & hP_{12}-R_c & 0 \\ hP_{12}-R_c & hL_b+R_c+\dfrac{1}{hC_f} & -\dfrac{1}{hC_f} \\ -r_m & r_m-\dfrac{1}{hC_f} & R_d+R_e+\dfrac{1}{hC_f} \end{pmatrix}$$

$$B_r V_h = \begin{bmatrix} -v_{ha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故得圈方程为

$$\begin{bmatrix} hL_a + R_c & hP_{12} - R_c & 0 \\ hP_{12} - R_c & hL_b + R_c + \frac{1}{hC_f} & -\frac{1}{hC_f} \\ -r_m & r_m - \frac{1}{hC_f} & R_d + R_c + \frac{1}{hC_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c_1} \\ i_{c_2} \\ i_{c_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C.4 导纳矩阵行列式

对于一个电网络，由基尔霍夫电流定律（节点方程）

$$MI_e = 0 \qquad \text{(C. 4-1)}$$

作为系统方程，其中

$$I_e = f(J_1, J_2, \cdots J_r, v_1, v_2, \cdots, v_p) \qquad \text{(C. 4-2)}$$

$J_1, J_2, \cdots, J_r$ 是电流源，$v_1, v_2, \cdots, v_p$，是包括电压在内的支路电压。这时由式(C. 4-2)可知，支流电流是 $J_1, J_2, \cdots, J_r$ 和 v_1，$v_2, \cdots v_p$ 的函数。但是式(C. 4-1)并不能表示一个电网络，这是因为电网络还需要满足基尔霍夫电压定律。下面我们来举一个例子，说明一个系统满足基尔霍夫电流定律，但是不能说明它满足基尔霍夫电压定律。

如图 C. 4-1(a)所示的电网络，它对应的电网络的图如图 C. 4-1(b)所示，其中 G_c 表示由 $i_c = G_c v_c^3$ 刻划的一个非线性电阻。

关联矩阵 M 是

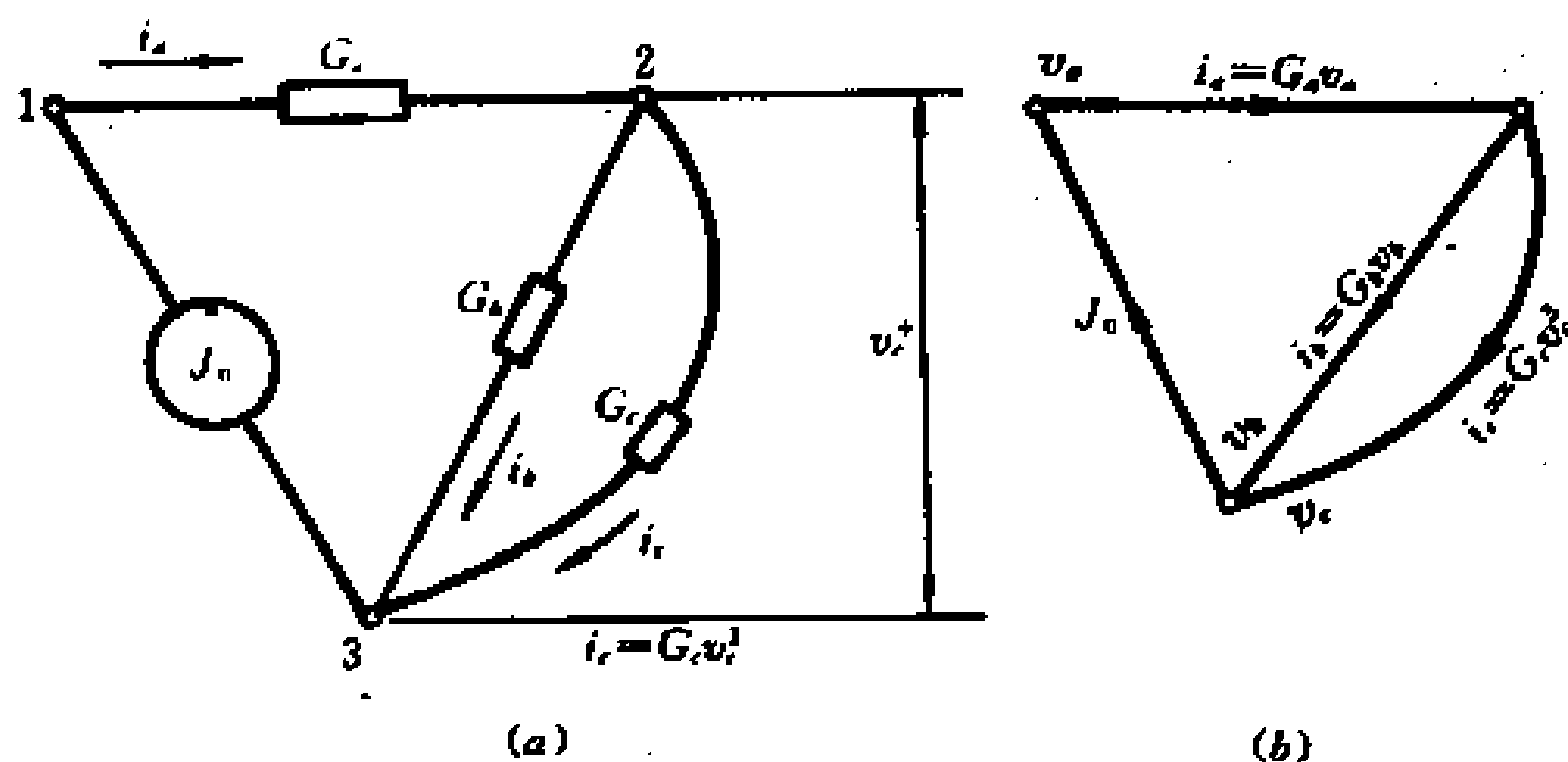


图 C. 4-1

$$
M = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} J_o & G_a & G_b & G_c \end{matrix}}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}
$$

电流列阵 I_e 是

$$
I_e = \begin{pmatrix} J_o \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_o \\ G_a v_a \\ G_b v_b \\ G_c v_c^3 \end{pmatrix}
$$

其中 v_a，v_b 和 v_c 分别是 G_a，G_b 和 G_c 的支路电压。于是

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_o \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_o + i_a \\ -i_a + i_b + i_c \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -J_o + G_a v_a \\ -G_a v_a + G_b v_b + G_c v_c^3 \end{pmatrix} = 0
$$

表明该系统满足基尔霍夫电流定律，但是不说明它满足基尔霍夫电压定律。

为了使系统满足基尔霍夫电压定律，需要用节点变换。在上面的例子中，取

$$M_1 = \begin{matrix} & G_a & G_b & G_c \\ 1 & \left(1 \right. & 0 & \left. 0 \right) \\ 2 & \left(-1 \right. & 1 & \left. 1 \right) \end{matrix}$$

这是在网络中把电流源 J_a 去掉后的网络的图的关联矩阵，节点变换是

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = M_1^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

把上式代入 $MI_e = 0$ 中，有

$$MI_e = \begin{bmatrix} -J_a + G_a(v_1 - v_2) \\ -G_a(v_1 - v_2) + G_b v_2 + G_c v_2^3 \end{bmatrix} = 0$$

这就是图 C. 4-1(a)所示的电网络所需要满足的方程。

当我们用广义基尔霍夫电流定律

$$QI_e = 0$$

时，前述步骤仍然成立，其中 Q 为割集矩阵。

类似地，也可以用基尔霍夫电压定律

$$BV_e = 0$$

作为系统方程，其中

$$V_e = f(E_1, E_2, \cdots, E_s, i_1, i_2, \cdots, i_p) \qquad \text{(C. 4-3)}$$

$E_1, E_2, \cdots E_s$ 是电压源，$i_1, i_2, \cdots, i_p$ 是包括电流源的支路电流。只有对 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 按照满足基尔霍夫电流定律的要求进行变换，这些方程才足以表示一个电网络。前面介绍的网孔变换就是满足要求的一种较简单方法。

如果电网络的每个元件 y_k 都可以表示为

$$y_k v_k = i_k \tag{C. 4-4}$$

其中 i_k 和 v_k 是元件 y_k 上的支路电流和支路电压，那么分析还可以更简单些。在这一节我们来介绍每个元件都满足式(C. 4-4)的电网络的拓朴分析法。

为了方便起见，当一条弧 k 有权 i_k 和 v_k(如图 C. 4-2 所示)。且 i_k 和 v_k 满足式(C. 4-4)，我们可以用 y_k 作为弧 k 的权。弧 k 加上权 y_k 和弧 k 加上权 i_k 及 v_k 是等价的(如图 C. 4-2 所示)。由式(C. 4-4)给出的关系可以用来表示初始条件为零的线性集中参数，非时变元件。这样的元件可以是电阻、电感、电容或者两端网络。

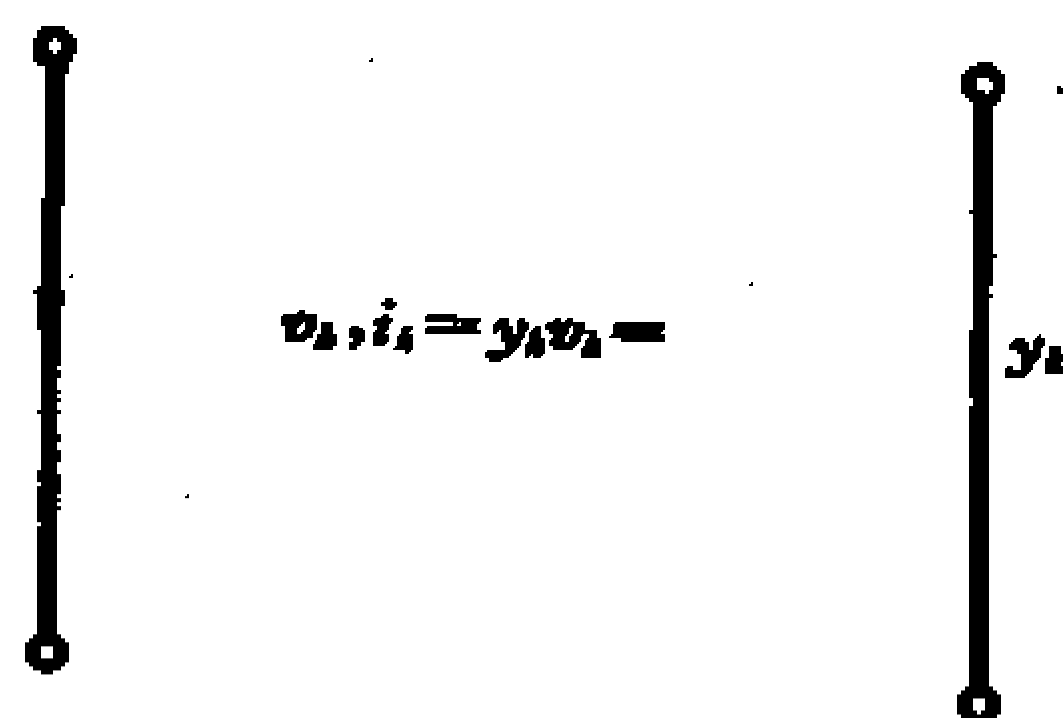


图 C. 4-2

一个电网络对应一个每条弧有权 y_k(导纳)的图。对每条弧可得一个方程，因此，可得一方程组

$$\begin{aligned} y_1 v_1 &= i_1 \\ y_2 v_2 &= i_2 \\ &\vdots \\ y_p v_p &= i_p \end{aligned}$$

它可以用矩阵形式表出：

$$\begin{bmatrix} y_1 & & & \\ & y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{bmatrix} \tag{C. 4-5}$$

或写成

$$Y_e V_e = I_e \tag{C. 4-6}$$

设 M 是所给的图的关联矩阵，则有

$$MI_e = MY_eV_e = 0$$

把节点变换式 $V_e = M^T N(V)$ 中的 $N(V)$ 改写成 V_n，上式可写成

$$MY_eV_e = MY_eM^TV_n = 0 \tag{C. 4-7}$$

其中 MY_eM^T 称为电网络的**节点导纳矩阵**。

如果把能用一条弧来表示的元件称为**无源元件**，把某树上的所有树枝的导纳的乘积称为**树导纳乘积**，那么我们有下面的结论。

定理 C. 4. 1 设一个电网络由无源元件组成，则其节点导纳矩阵的行列式等于所有可能的生成树导纳乘积之和。

[证明] 在节点导纳矩阵 MY_eM^T 中，以 H 表示 MY_e，则

$$MY_eM^T = HM^T$$

由毕内一柯西定理，有

$$|HM^T| = \sum |H\text{ 的大子阵}| \times |M^T\text{ 的相应的大子阵}| \tag{C. 4-8}$$

因为 Y_e 是对角形矩阵，故

$$H = [H_1, H_2, \cdots, H_q] = [M_1, M_2 \cdots M_q]\begin{bmatrix} Y_1 & & & \\ & Y_2 & & \\ & & \vdots & \\ & & & Y_q \end{bmatrix}$$

$$= [M_1Y_1 \; M_2Y_2 \cdots M_qY_q]$$

所以 H 的任何大子阵 H_m 的行列式可表示为

$$|H_m| = |[H_{j_1} \; H_{j_2} \cdots H_{j_m}]| = |[Y_{j_1}M_{j_1} \; Y_{j_2}M_{j_2}, \cdots, Y_{j_m}M_{j_m}]|$$

$$= |[Y_{j_1}, Y_{j_2} \cdots Y_{j_m}]| \, |[M_{j_1} M_{j_2} \cdots M_{j_m}]|$$

用记号 $M(j_1 j_2 \cdots j_m)$ 表示 M 的由列 $j_1, j_2, \cdots, j_m$ 组成的子阵，那么式(C. 4-8)可表示成

$$|MY_e M^T| = \sum_{(j)} (Y_{j_1} Y_{j_2} \cdots Y_{j_m}) |M(j_1 j_2 \cdots j_m)| \, |M(j_1 j_2 \cdots j_m)^T| \tag{C. 4-9}$$

由行列式性质，知

$$|M(j_1 j_2 \cdots j_m)| = |M(j_1 j_2 \cdots j_m)|^T$$

于是

$$|MY_e M^T| = \sum_{(j)} (Y_{j_1} Y_{j_2} \cdots Y_{j_m}) |M(j_1 j_2 \cdots j_m)|^2 \tag{C. 4-10}$$

我们知道，关联矩阵 M 的大子阵为非奇异的充要条件是该大子阵的列所对应的边组成一棵生成树，且这些非奇异矩阵的行列式的值为 1 或 −1，在式(C. 4-10)中，M 的大子阵行列式以平方形式出现，对应的导纳(对应于主子阵列的弧的权)以乘积形式出现．所以

$$|MY_e M^T| = \sum \text{树导纳乘积} \tag{C. 4-11}$$

其中 $\sum$ 是对所有可能的生成树求和。∎

为了方便起见，用记号 Δ' 表示节点导纳矩阵的行列式，设 N 是由无源元件组成的网络，G 是 N 所对应的加权有向图。由式(C. 4-11)可以看出，改变 G 中弧的方向，对 Δ' 没有影响。直接从网络 N 来找所有的生成树要比从对应的加权有向图 G 来找更方便些。例如，图 C. 4-3 所示的网络的所有可能的生成树是

$$(G_a, hC_b), (G_a, \frac{1}{hL_c}), (G_a, hC_d), (hC_b, \frac{1}{hL_c}), (hC_b, hC_d)$$

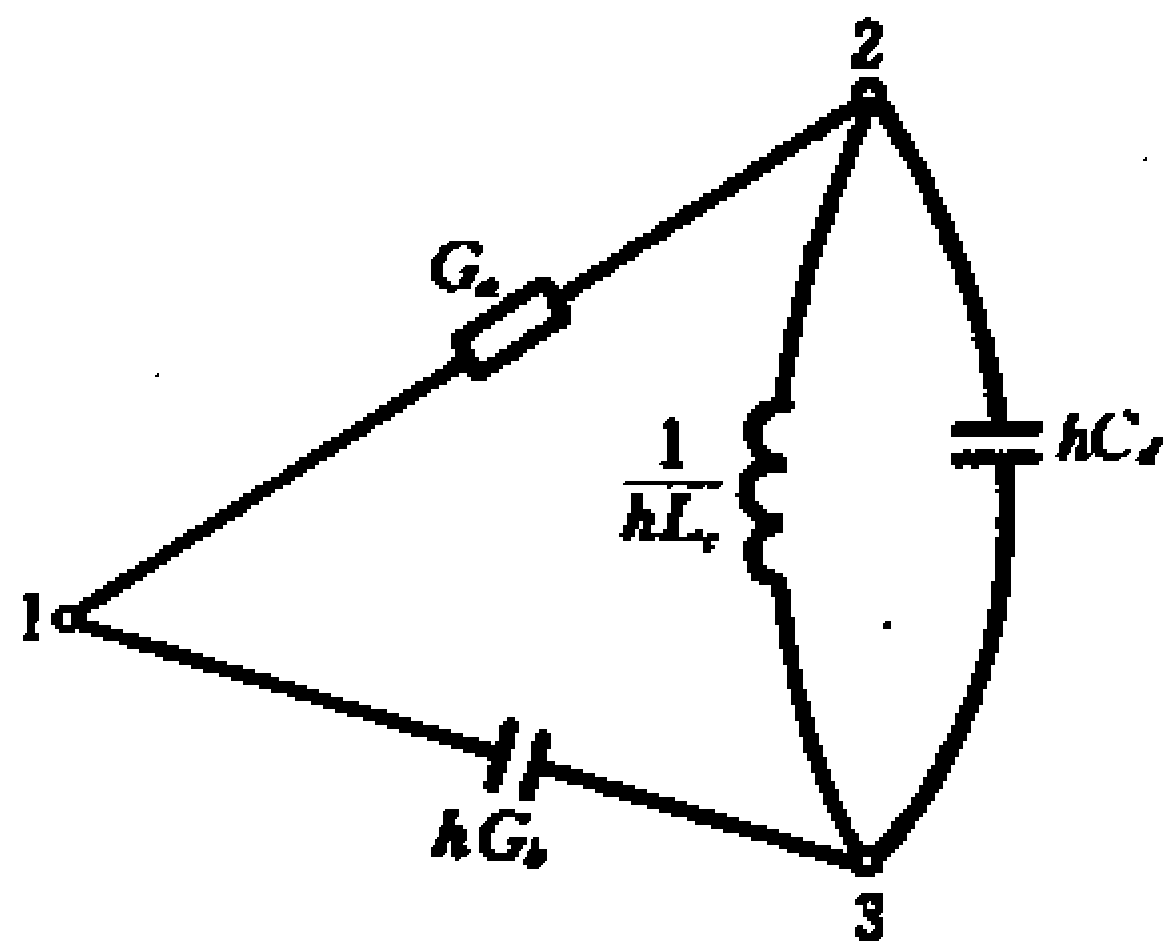


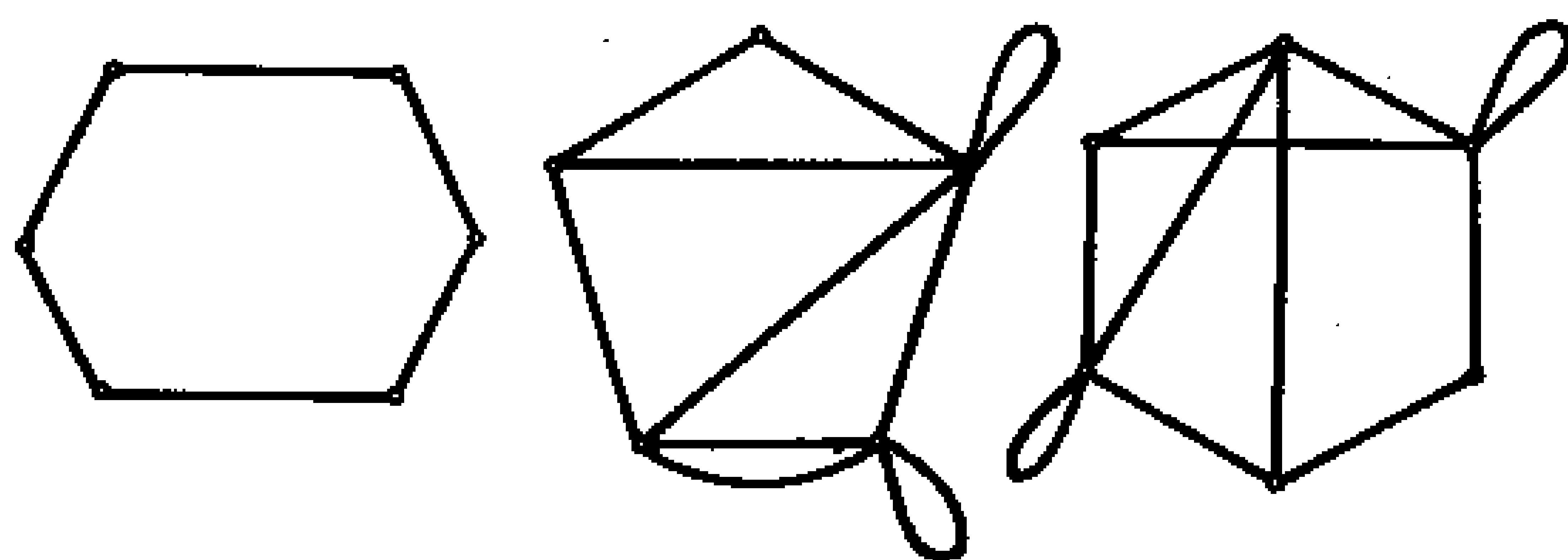
图 C. 4-3

所以

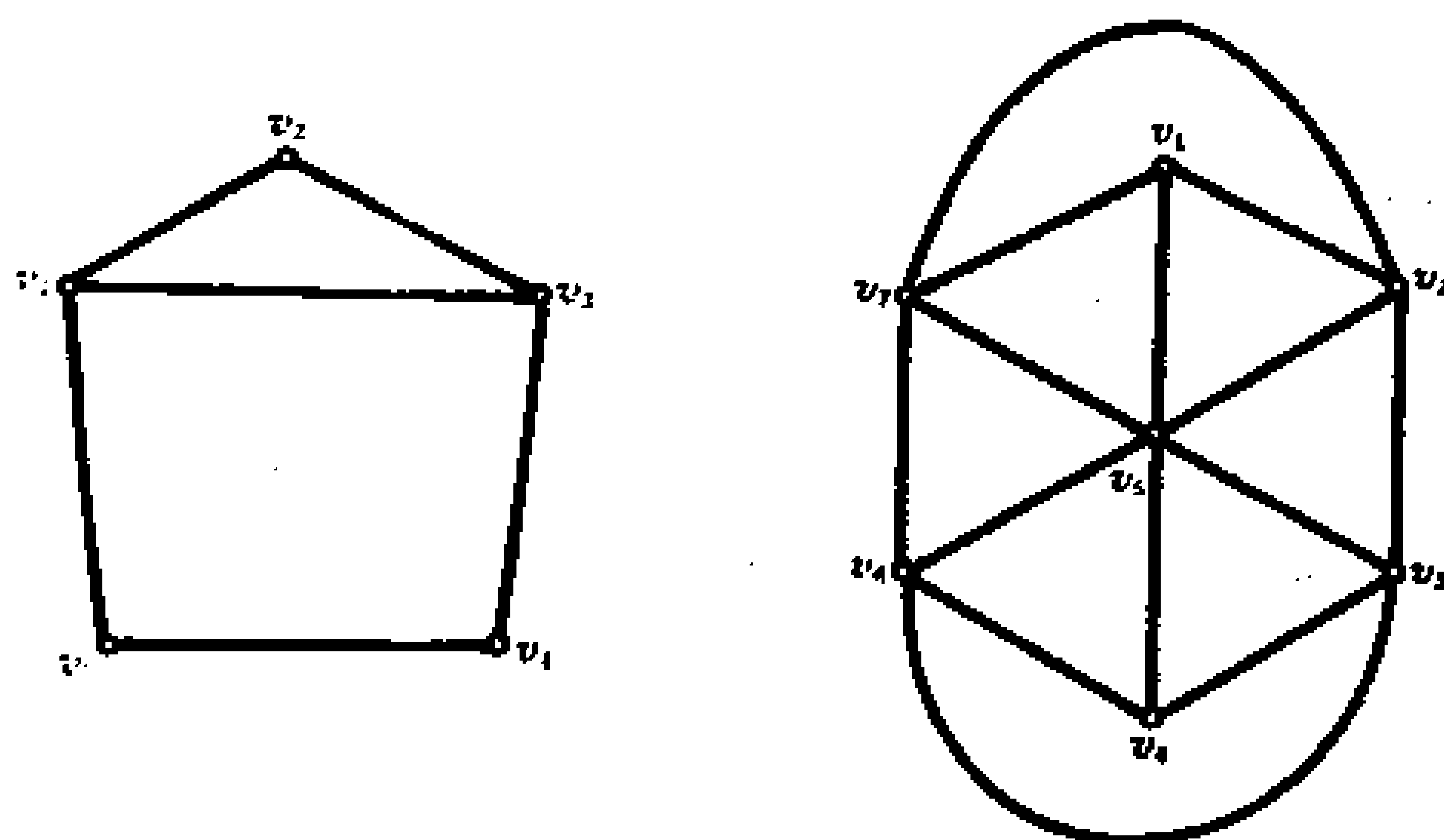
$$\Delta' = h^2 C_b C_d + G_a(C_b + C_d) + \frac{c_b}{L_c} + \frac{G_a}{hL_c}$$

习 题 解 答

习 题 一



题解 1-1 图



题解 1-2 图

1-3

(1) 对 G 的顶点数 n 用数学归纳法，$n=1$ 显然成立，在 n 阶连通图 G 中任取一个顶点 v，考虑 $G-v$ 的每一个分支的边数，再由 G 是连通的即可得出 G 的边数至少为 $n-1$。

(2) 用反证法　如果 G 中不含有圈，则 G 中必含有度为 1 的顶点 v，$G-v$ 必为无圈的连通图，再利用归纳法即可行出 G 的边数为 $n-1$ 矛盾。

(3) 用反证法　如果 G 的每个顶点的度均为偶数，则 G 的边数为 $\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}\deg(v)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2n=n$ 矛盾。

1-4

(1) $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{2}(i-1)!$

(2) $\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}\cdot i!$

(3) $\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}\cdot i!\ +1$

1-5　设 $e=v_1v_2$，G 的包含 e 的闭链为 $v_1v_2\cdots v_lv_1$。如果 $v_1,v_2,\cdots,v_l$ 彼此不同，则 $v_1v_2\cdots v_lv_1$ 就是含有 e 的圈。如果 $v_\alpha=v_\beta$，$\alpha<\beta$，且 $2\leqslant\alpha,\beta\leqslant l$，则从 $v_1v_2\cdots v_lv_1$ 中去掉 $v_{\alpha+1},\cdots,v_\beta$，得到的 $v_1v_2\cdots v_\alpha v_{\beta+1}\cdots v_lv_1$ 仍为闭链。如果 $v_1,v_2\cdots,v_\alpha,v_{\beta+1},\cdots,v_l$ 彼此不同，就得到了所要的圈，若不然，重复上面的过程，最终就可以得到包含 e 的圈。

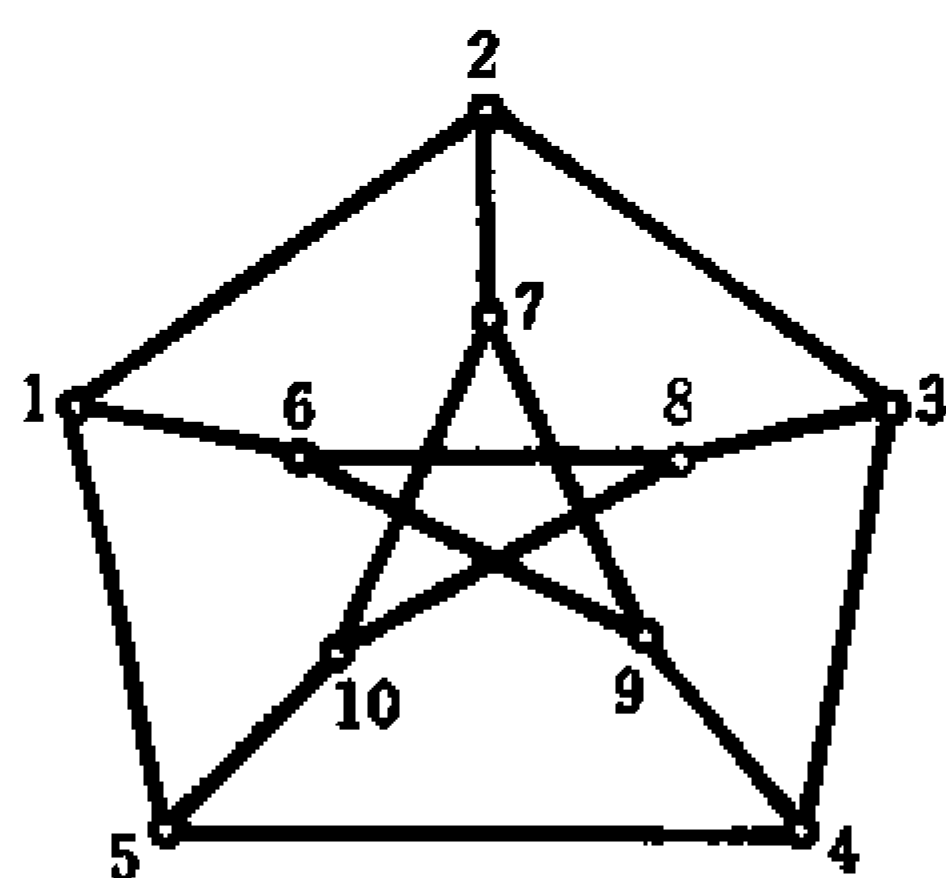
1-6　因为 G 中顶点的度均不小于 a，所以 G 中没有悬挂点。任取 G 中一顶点 v_0，设 v_1 与 v_0 邻接，因为 $\deg v_1\geqslant 2$，所以存在 $v_2\neq v_0$，v_2 与 v_1 邻接，如此继续下去可得到 G 中的一条链。因为 G 只有有限个顶点，所以链上必有一段构成圈。

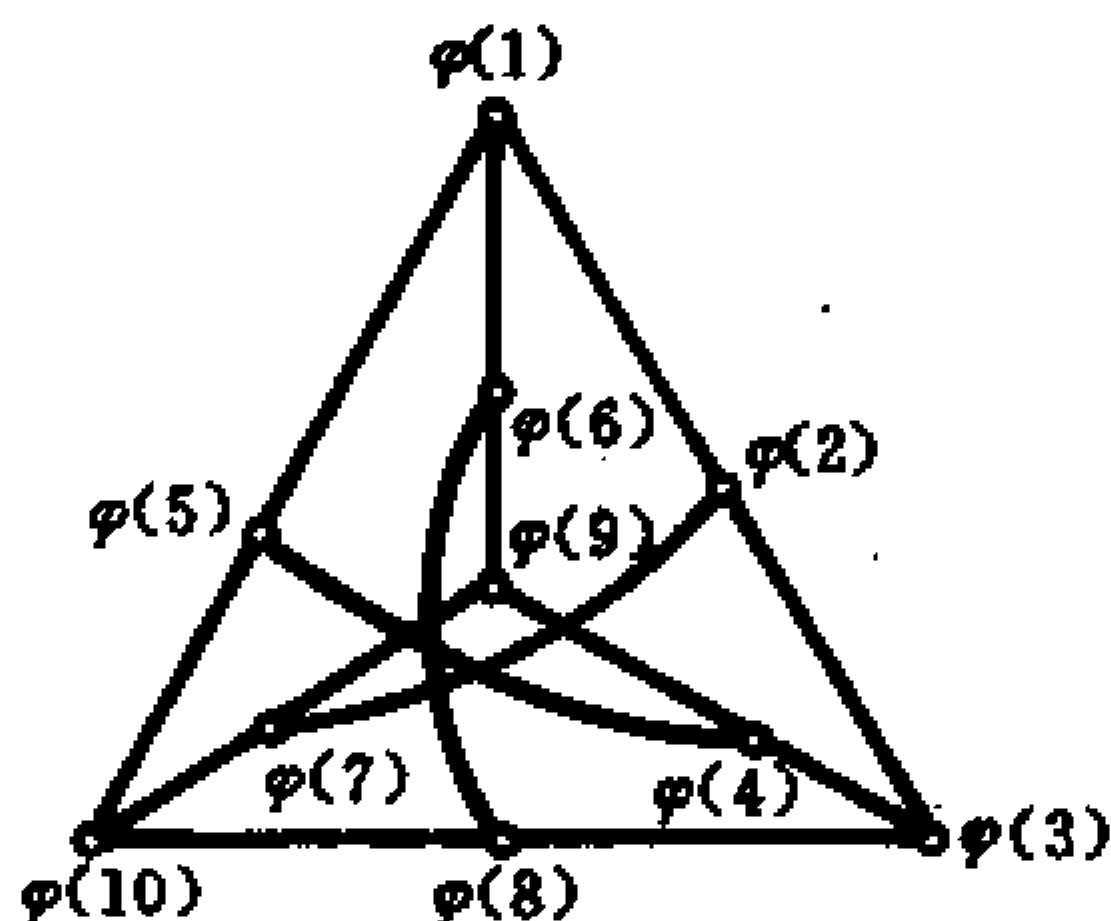
1-7　根据道路和度的定义，可得出。

1-8　考虑两个图的度，重边和环的关系。

1-9　令 φ 满足下面的关系(题解 1-9 图)。

1-10　因为完全图的任意两顶点均邻接，所以导出子图任任意两





题解 1-9 图

顶点也邻接。

1-11　因为把 G 中所有不邻接的顶点都加上边，就可以得到 n 阶完全图。

1-12

(a) 12341 是一条闭链，(b) 34231214 是一条链。(c) 图的所有边不构成链。(d)23452154 是一条链。

1-13　题解 1-13 图

1-14　p 阶完全图的每两个顶点恰有一条边，所以边数为 $q=\binom{p}{2}$。反之，如果图 G 的边数为 $\binom{p}{2}$，则 G 的每两个顶点必邻接。

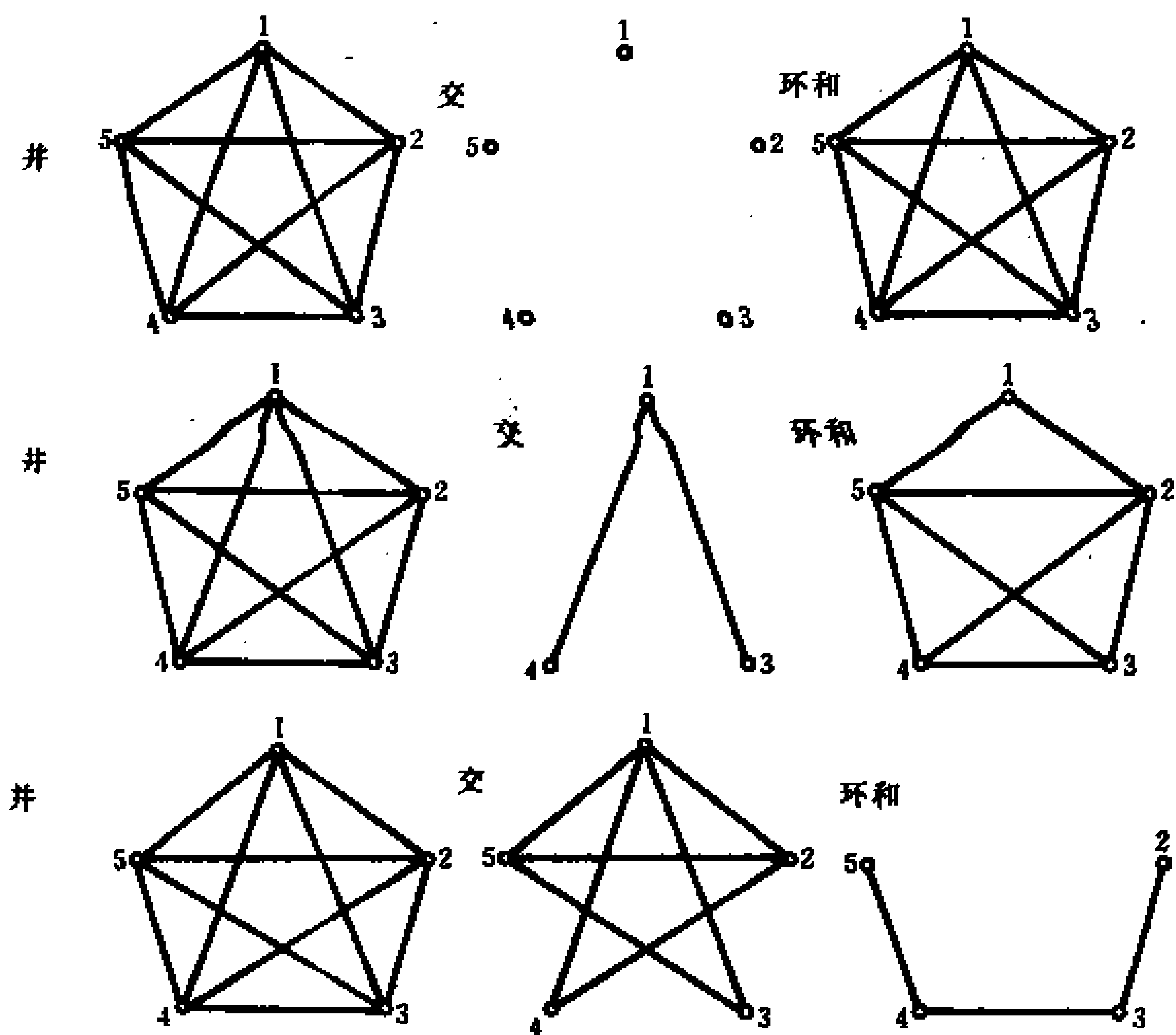
1-15　由完全二部图的定义即知 $|E(K_{m,n})|=mn$。设 G 是二部图，二分划为 X 和 Y，则 $|E(G)|\leqslant|X|\cdot|Y|\leqslant p^2/4$。

1-16　证法与习题 1-5 类似。

1-17　如果 G 不连通，则 G 至少有两个分支，不同分支中的顶点之间不邻接。反之，如果 G 的顶点集可以划分成 V_1 和 V_2，V_1 中的任一顶点与 V_2 的任一顶点都不邻接，则 G 不连通。

1-18　如果 G 不连通，V_1 和 V_2 是 G 的顶点集 $V(G)$ 的一个划分，使得 V_1 的顶点与 V_2 的顶点都不邻接，则

$$|E(G)|\leqslant\binom{|V_1|}{2}+\binom{|V_2|}{2}\leqslant\binom{p-1}{2}$$



题解 1-13 图

1-19　G 中任意一条边 e 至多联结 $G-e$ 的两个分支。

1-20　取 G 中两个不邻接的顶点 v_1 和 v_2，作一条 v_1 到 v_2 的道路，则此道路上必有三个顶点满足题目要求。

习　题　二

2-1　按定义 2.1.1 证明。

2-2　用反证法，设 P 是树 T 中最长道路，如果 P 的一个端点的度大于 1，则引出矛盾

2-3　考虑树的度的和。

2-4　分连通图和不连通两种情况来考虑。

2-5　由定理 2.3.1,G 有生成树,生成树的边数为 $p-1$,即生成树是 G 的子图,故有 $q \geqslant p-1$。

2-6　利用推论 2.1.1。

2-7　只需考虑 k 为奇数的情况。如果 e 是二部图 G 的一条割边,考虑 $G-e$ 的一个包含 $k-1$ 度顶点的分支,可以推出 $k=1$。

2-8　证明 G 无圈即可。

2-9　与 2-8 题类似可证

2-11　证明 G 连通无圈。

2-12　取 G 的一个度为 Δ 的顶点 v,则 $G-v$ 有 Δ 个分支,每个分支中必有 G 中的一个 1 度点。

习　题　三

3-1　G_1:1234264561531

　　G_2:不是欧拉图

　　G_3:149859127936923456781

3-2　考虑 K_n 中顶点的任一排列。

3-3　123681097541 是 G 的一个哈密顿圈。

3-4　用定理 3.3.2。

3-5　设 G 是二部图,其二分划为 (V_1,V_2),且 $|V_1|<|V_2|$,则有 $k(G-V_1)=|V_2|-|V_1|$,由定理 3.3.1 知,G 是非哈密顿图。

3-6　令 G^* 为连接 v 到 G 的每一个顶点所得到的 $p+1$ 个顶点的图,证明 G^* 是哈密顿图即可。

3-7　在 G 中加入一个新顶点 v,它和 G 中每一顶点邻接。记所得到的图为 G^*,G^* 的度序列为 $(d_1+1,d_2+1,\cdots,d_p+1,p)$。根据已知条件和定理 3.3.4,证明 G^* 含有哈密顿圈,从而得出所要求的结论。

3-8　由 G 和 G^c 的互补性及度序列的单调性知,若 $\deg_G(v_i)=d_i$,

则 $\deg_G(v_l)=d'_{p-l-1}$。若存在 $m<\frac{p+1}{2}$，满足 $d_m<m$ 和 $d_{p-m+1}<p-m$，则可推出矛盾。故不存在这样的 m，再由习题 3-7 知 G 有哈密顿道路。

3-9　设 $P=v_1v_2\cdots v_{l+1}$ 是 G 中最长道路，$l<2\delta$。由于 P 是 G 中的最长道路，故与 v_1, v_{l+1} 相邻的顶点均在 P 上。由于 G 是简单图，从而令 $S=\{v_i \mid v_1v_{i+1}\in E(G)\}$，$T=\{v_i \mid v_{l+1}v_i\in E(G)\}$，则 $|S|=\deg v_1\geqslant\delta$，$|T|=\deg v_{l+1}\geqslant\delta$，按定义 $v_{l+1}\notin S\cup T$，故 $|S\cup T|\leqslant l<2\delta$，所以有 $S\cap T\neq\varnothing$。设 $v_i\in S\cap T$，于是得到 G 中的一个长为 $l+1$ 的圈 $C=v_1v_2\cdots v_iv_{l+1}v_lv_{l-1}\cdots v_{i+1}v_1$。由于 $p>2\delta$，$l+1\leqslant2\delta$，故在 C 外恒存在一顶点 $v_0\in V(G)$。由于 G 是连通的，所以有一条 C 外的道路 P' 和 C 相连，不失一般性，不妨设和 v_1 相连，于是我们在 G 中找到一条路 $\overline{P}$：P' 加上 $v_1v_2\cdots v_iv_{l+1}v_l\cdots v_{i+1}$ 道路。显然，$\overline{P}$ 的长度大于 l，这与 P 是 G 中最长路的假设矛盾。

习　题　四

4-1　与生成树不交的任何边集都不可能是割集。

4-2　$E(S\times\overline{S})$ 为割集当且仅当 $G-E(S\times\overline{S})$ 的分支数为 2，当且仅当 $G[S]$ 和 $G[\overline{S}]$ 均连通。

4-3　K_p 中包含边 e 的割集数目为 2^{p-2}；K_p 中不包含边 e 的割集数为 $2^{p-2}-1$。

4-4　同时包含 e_1 和 e_2 的割集数目为 2^{p-3}。

4-5　设 C 是 G 中的一个圈，S 是 G 中的一个割集。$G-S$ 的分支为 G_1 和 G_2。$E(C)\cap E(G_1)$ 的导出子图为若干道路的不交并，而每一条道路的两个端点都关联于 C 的在 S 中的两条边。

习　题　五

5-1　$\{c_1, c_2, c_3\}$ 是关于生成树 $T=\{a, c, e\}$ 的基本圈组。

5-2　取生成树 $T=\{a, b, c, f\}$，G 关于 T 的基本圈组为 $C_1=\{a, c,$

$e\}$,$C_2=\{b,c,d\}$,$C_3=\{a,c,f,h\}$,$C_4=\{b,c,f,g\}$. C_1,C_2,C_3 和 C_4 的各种可能的环和是

$$B_1 = C_1 \oplus C_2 = \{a,b,d,e\}$$
$$B_2 = C_1 \oplus C_3 = \{e,f,h\}$$
$$B_3 = C_1 \oplus C_4 = \{a,b,e,f,g\}$$
$$B_4 = C_2 \oplus C_3 = \{a,b,d,f,h\}$$
$$B_5 = C_2 \oplus C_4 = \{d,f,g\}$$
$$B_6 = C_3 \oplus C_4 = \{a,b,g,h\}$$
$$B_7 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 = \{b,c,d,e,f,h\}$$
$$B_8 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 = \{a,c,d,e,f,g\}$$
$$B_9 = C_1 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{b,c,e,g,h\}$$
$$B_{10} = C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{a,c,d,g,h\}$$
$$B_{11} = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{d,e,g,h\}$$

5-3

$$C_1 = \{a,c,b\}, C_2 = \{c,d,e\}, C_3 = \{c,f,g\},$$
$$C_4 = \{a,b,d,e\}, C_5 = \{a,b,f,g\}$$
$$C_6 = \{d,e,f,g\}.$$

5-4

a)：$\{a,d,f\}$,$\{a,b,e\}$,$\{b,c,f\}$,$\{c,d,e,g\}$,
$\{g\}$,$\{b,d,e,f\}$,$\{a,b,c,d\}$,$\{a,c,e,f,g\}$,
$\{a,c,e,f\}$,$\{a,b,c,d,g\}$,$\{b,d,e,f,g\}$
$\{c,d,e\}$,$\{b,c,f,g\}$,$\{a,b,e,g\}$,$\{a,d,f,g\}$.

b)：$\{a,b\}$,$\{a,c,d,f\}$,$\{b,c,e,g\}$,$\{d,e\}$,
$\{f,g\}$,$\{b,c,d,f\}$,$\{a,c,e,g\}$,$\{a,b,d,e\}$.
$\{a,b,d,e,f,g\}$,$\{a,c,e,f\}$,$\{b,c,d,g\}$,
$\{d,e,f,g\}$,$\{b,c,e,f\}$,$\{a,c,d,g\}$,
$\{a,b,f,g\}$.

5-5 G 中线性无关关联集的数目等于 G 的各个分支中线性无关关联集的数目之和。

5-6 写出关联集：

$$S(1)=\{a,d,f\},S(2)=\{a,b,d\},$$

$$S(3)=\{b,c,d\},S(4)=\{c,e,f,g\},S(5)=\{g\}$$

然后作出 $S(1),S(2),S(3),S(4),S(5)$所有可能的环和。

习 题 六

6-1 G_1 的完全关联矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & u & i \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

G_2 的完全关联矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

6-2 基本圈组是

$$C_1=\{a,c,f\},C_2=\{b,c,d\}$$

$$C_3=\{d,g,e\},C_4=\{f,g,h\}$$

$$B_f = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6-3　首先标定 K_4 的顶点和边，取定 K_4 的一棵生成树 T，求出 K_4 关于 T 的基本圈及基本圈的各种可能的线性组合；求出 K_4 关于 T 的基本割集及其所有可能的线性组合。

6-4　只给出 G 关于 $T=\{a,b,c,d,e\}$ 的基本圈矩阵和基本割集矩阵。

关于 T 的基本圈为

$$C_1=\{a,b,c,d,e,f\}$$
$$C_2=\{a,b,c,g\}$$
$$C_3=\{b,c,d,h\}$$
$$C_4=\{c,d,e,i\}$$

基本割集为

$$S_1=\{a,f,g\}$$
$$S_2=\{b,f,g,h\}$$
$$S_3=\{c,f,g,h,i\}$$
$$S_4=\{d,f,g,i\}$$
$$S_5=\{e,f,i\}$$

$$B_f = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
Q_f = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{matrix}
$$

$$
Q_f = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

6-5　求出关联集：

$S(1)=\{e,f,i\}, S(2)=\{a,f,g\}, S(3)=\{a,b,h\},$

$S(4)=\{b,c,i\}, S(5)=\{c,d,g\}, S(6)=\{d,e,h\}$

作出它们所有可能的环和。

6-6

$$
M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [M_{11} M_{12}]
$$

$$
M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

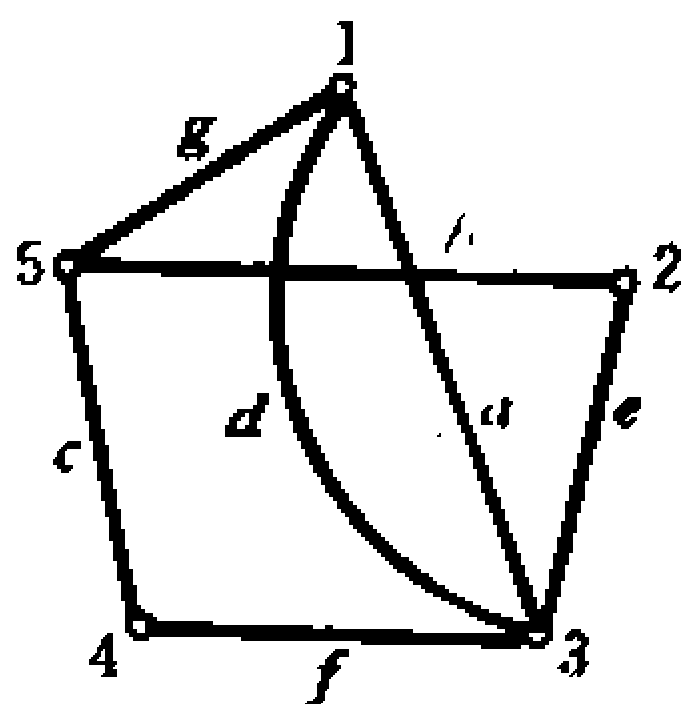
$$
B_f = [(I \quad A_{11}^T (A_{12}^T)^{-1})]
$$

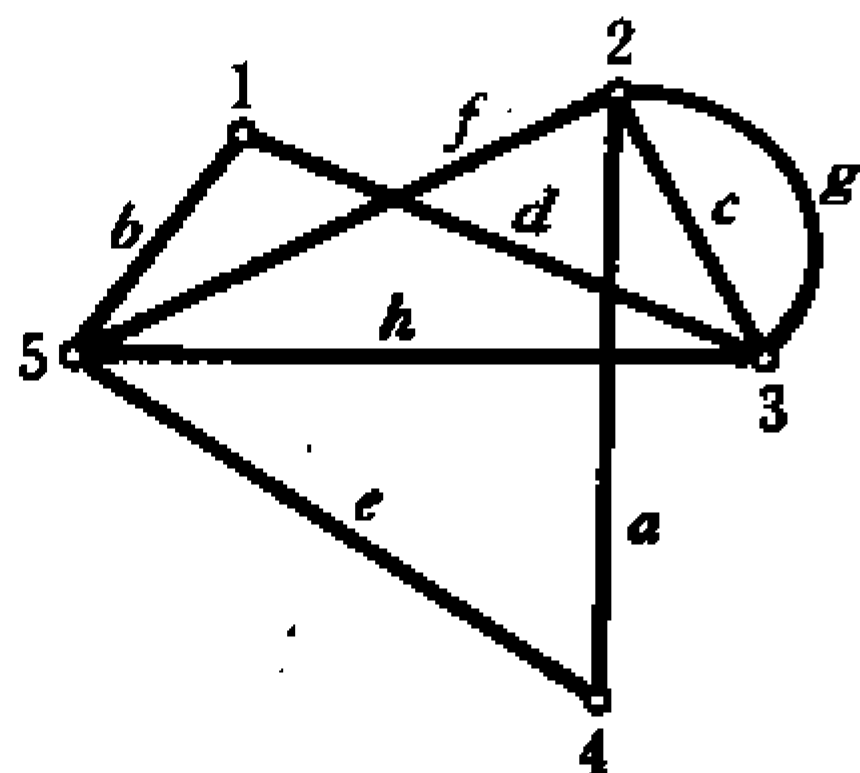
$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
Q_f = [Q_{f_{11}} \; I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

6-7　完全关联矩阵的每一列均有两个 1。

6-8　$T=\{b,c,d,e\}$





题解 6-7 图

$$Q_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

6-9 (1),(2),(4),(5)正确;(3),(6)不正确。

6-11 因为图 G 的完全圈矩阵的所有行向量，就是 G 的圈空间的所有非零元素，根据定理 5.2.3，完全圈矩阵 B_e 的所有行向量组成的向量组的秩是 $q-p+1$

6-12 证明与定理 6.2.2 类似。

6-13 如 G 有 p 个顶点，$p-1$ 条边，以 M 为关联矩阵，则 G 为树 $\Leftrightarrow G$ 连通 $\Leftrightarrow M$ 非奇异

6-14 (1) 如 v_i 是 G 的一个割点，则从邻接矩阵 A 上去掉 v_i 所对应的行和列后，得到矩阵 A_1，可以通过对行和列的若干相同对换而变成分块对角矩阵。

(2) 如 (v_i, v_j) 是一条割边，则适当调整 A 的行和列可把 A 变成形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & I_1 \\ I'_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中 A_1, A_2 为对称矩阵，I_1 形如

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

6-15 (1) C_1 等于 G 的邻接矩阵 A 的 主对角线上诸元素之和。

(2) A 的非零二阶主子式与 G 的边一一对应。

(3) A 的非零三阶主子式必为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

6-16 用反证法，考虑 G 的最小多项式和长为 d 的道路。

习 题 七

7-1 $\{v_1,v_3\}$，$v_4\}$是两个顶点割；$\{v_4\}$，是 G_2 的割点。

7-2 $k(G)=k$. $\lambda(G)=2$；$k(G)=x(G)=1$

7-3 所有长为 $n(\geqslant 3)$的圈 C，都满足

$$K(C_n) = \lambda(C_n) = 2$$

7-4 若 G 中任意两顶点都至少由两条不相交道路连接，显然对任意 $e\in E(G)$，$G-e$ 是连续的，故 G 为 2-连通的。

反之，若 G 是 2-连通的，则 G 无割边。把 G 分解成块，块与块之间以 G 中的割点互相连接。设 u，v 是 G 中任意两顶点。分两种情况：

(1) u，v 同属于 G 的某一块，则由定理 7.2.4 知结论成立。

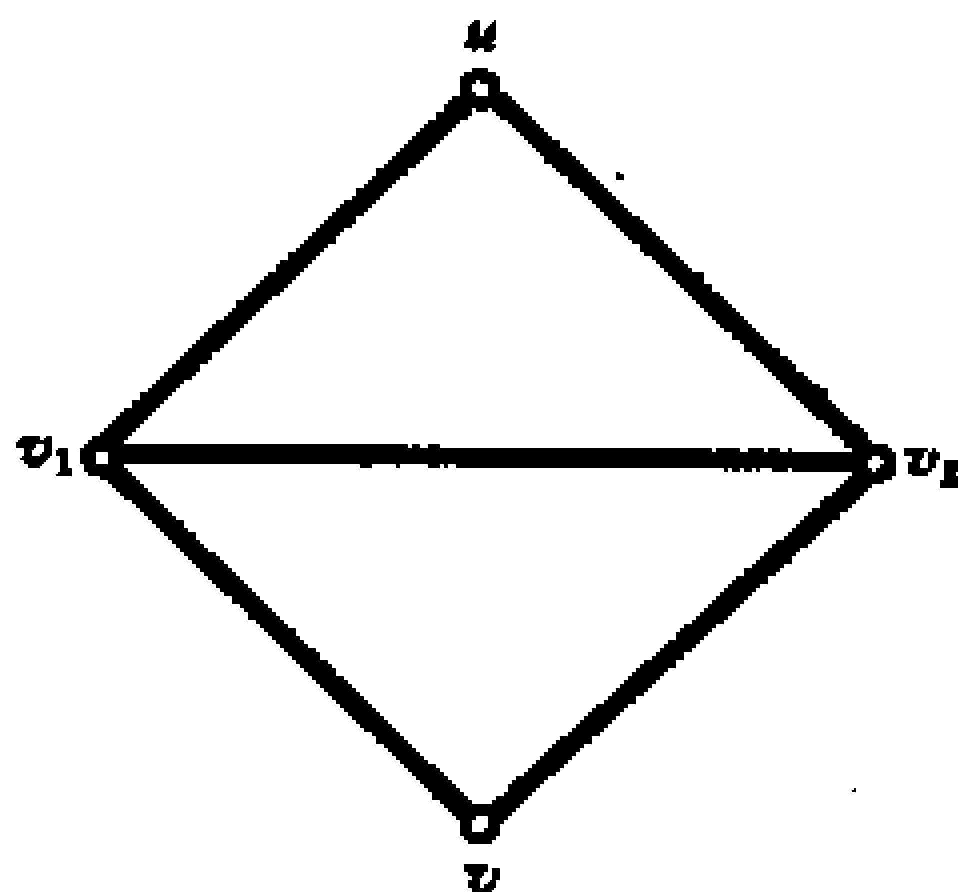
(2) u，v 不属于同一块，为方便起见，令 $u\in B_1$，B_2，$\cdots B_n$，$v\in B$，其中块 B_i 和 B_{i+1}以割点 v_i 相互连接。由于 G 是 2-连通的，故 $|V(B_i)|\geqslant 3$，$i=1,2,\cdots n$，于是由定理 7.2.4 知，在 B_1 中存在两条由 u 到 v_1 的不相交的道路 P_{11}，P_{12}；在 B_i 中存在两条由 V_{i-1}到 V_i 的不相交的道路 P_{i1}，$P_{i2}(i=1,2,\cdots,n-1)$。于是我们找到了两条由 u 到 v 的边不相交的道路：$P_{11}\cup P_{21}\cup\cdots\cup P_{n1}$和 $P_{21}\cup P_{22}\cup\cdots\cup P_{n2}$。

7-5 G 是不可分的当且仅当 G 为没有割点的非平凡图，当且仅当 G 是 2-连通的。

7-6 从连通图 G 中任意去掉一条边得到的图至多具有两个支。

7-7 当连通图 G 只有一个割点时，结论是显然的。当 G 的割点数 $\geqslant 2$ 时，考虑 G 中以割点为端点的最长道路 P。若 B 是 G 中含 P 的端点但不含 P 的边的块，则 B 一定是仅含一个割点的块，否则就和 P 是最长道路矛盾。由于 P 有两个端点，故 G 中至少存在两个仅含一个割点的块。

7-8 如图它是 2-连通的，uv_1v_2v 是一条 (u,v) 道路 P，图中没有和 P 内部不相交的 (u,v) 道路。



题解 7-8 图

7-9 由 $k \leqslant K' \leqslant \delta$，对 G 中任一顶点 v，有 $\deg G(v) \geqslant \delta \geqslant k' \geqslant k$。再由

$$2q = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geqslant kv$$

知，$q \geqslant \frac{1}{2}kv$

7-10 设 $e \in E'$，则按定义 $k((G-E') \cup e) = 1$；若 e 是 $(G-E') \cup e$ 的割边，则 $k(G-E') = 2$，若 e 不是 $(G-E') \cup e$ 的割边，则 $k(G-E') = 1$，故结论成立。

习 题 八

8-1 如果树 T 有两个不同的完美匹配 M_1 与 M_2，则由 $(M_1-M_2) \cup (M_2-M_1)$ 导出的子图含有圈。

8-2 必要性。若树 G 有完美匹配，根据定理 8.3.1，$O(G-v) \leqslant 1$ 且 $|V(G)|$ 为偶数，所以 $O(G-v)=1$。

充分性。对每一个 $v \in V(G)$，因 $O(G-v)=1$，故 $G-v$ 有唯一奇分

支 $C(v)$，设 v 与 $C(v)$ 关联的边是 $e(v)$，则 $e(v)$ 被 v 唯一确定。命 M 是一切 $e(v)$ 的集合，可证明 M 是一个完美匹配。

8-3 必要性。设二部图 G 有完美匹配，则对任意 $V_0 \subseteq V(G)$，由定理 8.3.1，有 $|N(v_0)| \geqslant O(G-N(V_0)) \geqslant |V_0|$。

充分性，设 G 是以 (A,B) 为划分的二部图，由于对任意 $V_0 \subseteq V(G)$，$|N(V_0)| \geqslant |V_0|$，易见 $|A|=|B|$，且对任意 $V_0 \subseteq A$，有 $|N(V_0)| \geqslant |V_0|$，由这个条件对 $|A|$ 作归纳，就可以证明 G 有完美匹配。

8-4 设 K_{2n} 的顶点为 $v_0, v_1, \cdots, v_{2n-1}$，对任意一个 $i \in \{1,2,\cdots,2n-1\}$，令 F_i 是边 $v_0v_i, v_{i-k}v_{i+k}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 的集合，其中下标理解为模 $2n-1$ 的同余。则可以证明，F_i 是一个 1-因子，且 $K_{2n}=F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{2n-1}$。

设 G 是 k-正则二部图，则 G 有完美匹配 M_1，而 $G-M_1$ 是 $(k-1)$-正则二部图，有完美匹配 M_2，继续这个步骤，得 $G=M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$。

8-5 构造一个图 G：

顶点□和⊡，它们的集合分别为 X 和 Y；如果□和⊡有公共边相邻，则□和⊡邻接。于是得到一个以 (X,Y) 为二分划的二部图，且 $|X|=|Y|+2$，故 G 不可能存在完美匹配。由 G 的边的定义知，□⊡恰表示 G 中的一条边，故由 G 中不存在完美匹配知，原图不可能用□⊡恰好遮盖。

习 题 九

9-1 对任意两种颜色，总有一条边其两端点为这两种颜色的顶点。

9-2 若 $\chi(G) \geqslant 6$。令 G_1 是 G 中着 1,2,3 色的顶点在 G 中的导出子图，G_2 是 G 中着 $4,5,\cdots,\chi(G)$ 色的顶点在 G 中的导出子图。由于二部图的色数为 2，故 G_1, G_2 均不是二部图，所以 G_1, G_2 中均含有奇圈且没有公共顶点，与假设矛盾。

9-3 1-色图是空图，故 1-临界图只能是 K_1；2 色图是二部图，故 2-

临界图只能是 K_2;3-临界图恒含有奇圈,且奇圈至少一定要 3 种颜色才能正常着色,故 3-临界图只能是 k-奇圈($k\geqslant3$)。

9-4　取 G 的 $\chi(G)$-临界子图 G_1 作为 H,由于 $\chi(G)\leqslant1+\delta(G)$,故 $\chi(G)\leqslant1+\max\delta(H)$。

9-5 设 $e=uv$,如果 u,v 着色相同,那么 $G-e$ 和 $G\cdot e$ 有相同的 k-着色,因此,$f(G\cdot e,t)$ 是使 u,v 有相同颜色的 $G-e$ 的 k-着色的数目。

如果 u,v 着色不同,那么 $G-e$ 和 G 有相同的 k-着色。因此,$f(G,t)$是使 u,v 着不同颜色的 $G-e$ 的 k-着色的数目。由此可知,$f(G-e,t)=f(G,t)+f(G\cdot e,t)$。

9-6　当 $p=1$ 时,$f(K_1,t)=t$,命题成立,若 $p<m$ 时,命题成立,今证 $p=m$ 时命成立。由推论 2.1.4 知,存在 $e\in E(G)$,且 e 的一个端点的度为 1,于是 $G-e$ 由一个孤立点和一个 $m-1$ 阶的树组成;$G\cdot e$ 显然是一个 $m-1$ 阶的树,由习题 9-5 的公式和归纳假设,$f(G,t)=f(G-e,t)-f(G\cdot e,t)=t^2(t-1)^{m-2}-t(t-1)^{m-2}=t(t-1)^{m-1}$.

9-7　对圈的长 n 用归纳法,若 G 是长为 n 的圈,则 $G-e$ 是 n 阶树,$G\cdot e$ 是长为 $n-1$ 的圈。由习题 9-5 的公式和归纳法,即知命题成立。

习　题　十

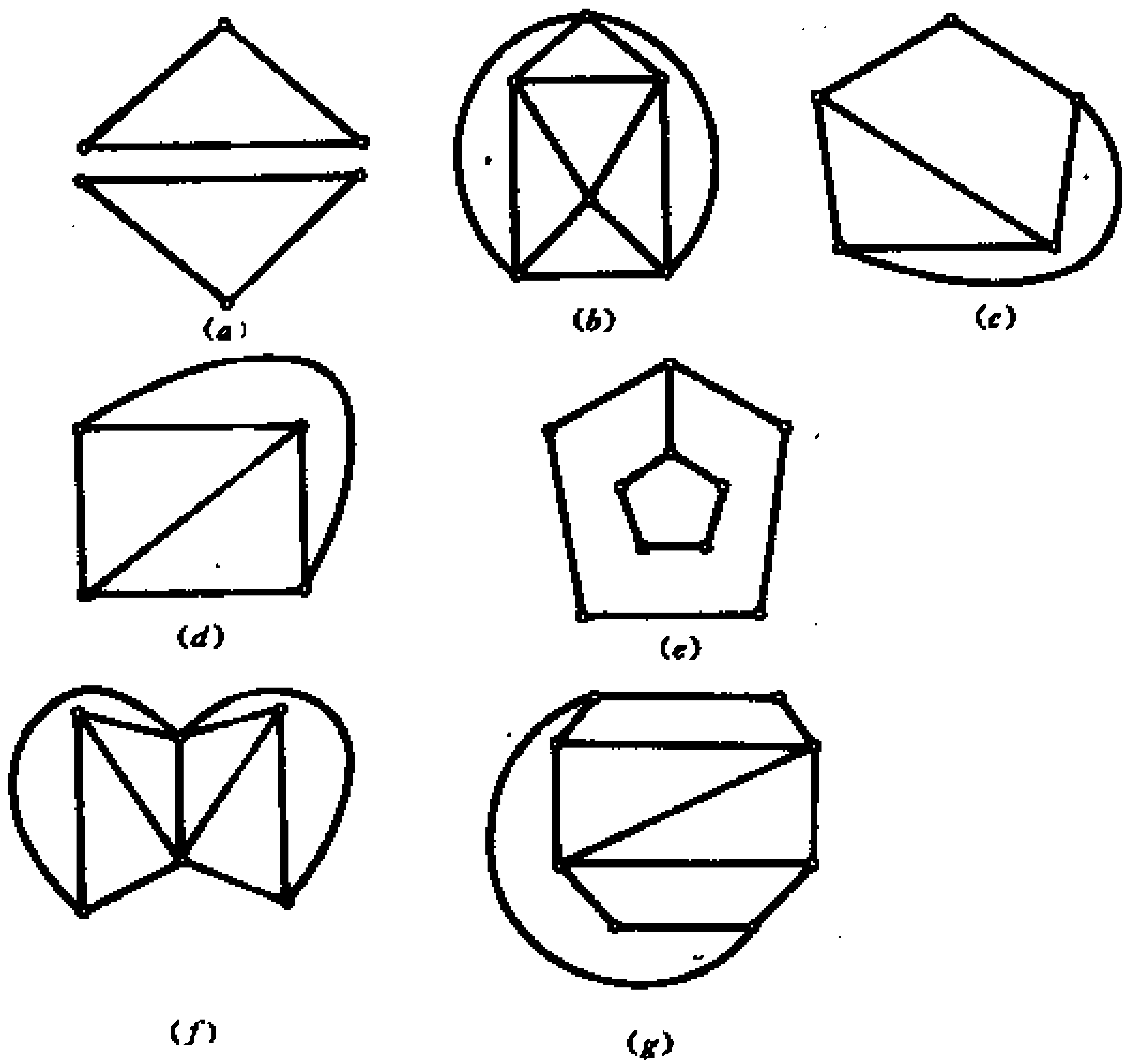
10-1　图(d)(题 10-1 图)所示的图为平面图,而(a),(b),(c),(e),(f),(g),(h)均为可平面图,其平面嵌入题解 10-1 图所示。

10-2　相应的最大平图为题解 10-2 图所示。

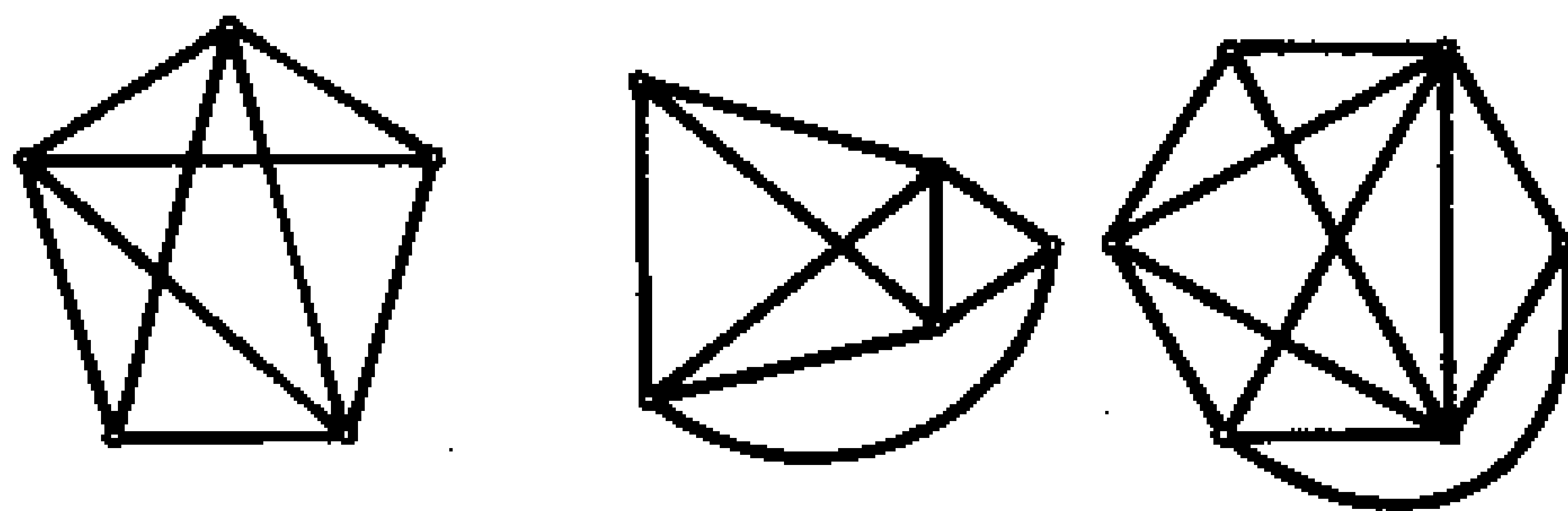
10-3　不一定。例如题解图 10-3 所示的图 G 中,$p=7,q=10<3p-6$,但它含有与 $K_{3,3}$同胚的子图。因而不是平面图。

10-4　证法 I:由 K_5 的对称性,只需求 K_5 的某一边 e,给出 K_5-e 的一个平面嵌入即可　对 $K_{3,3}$也是一样。

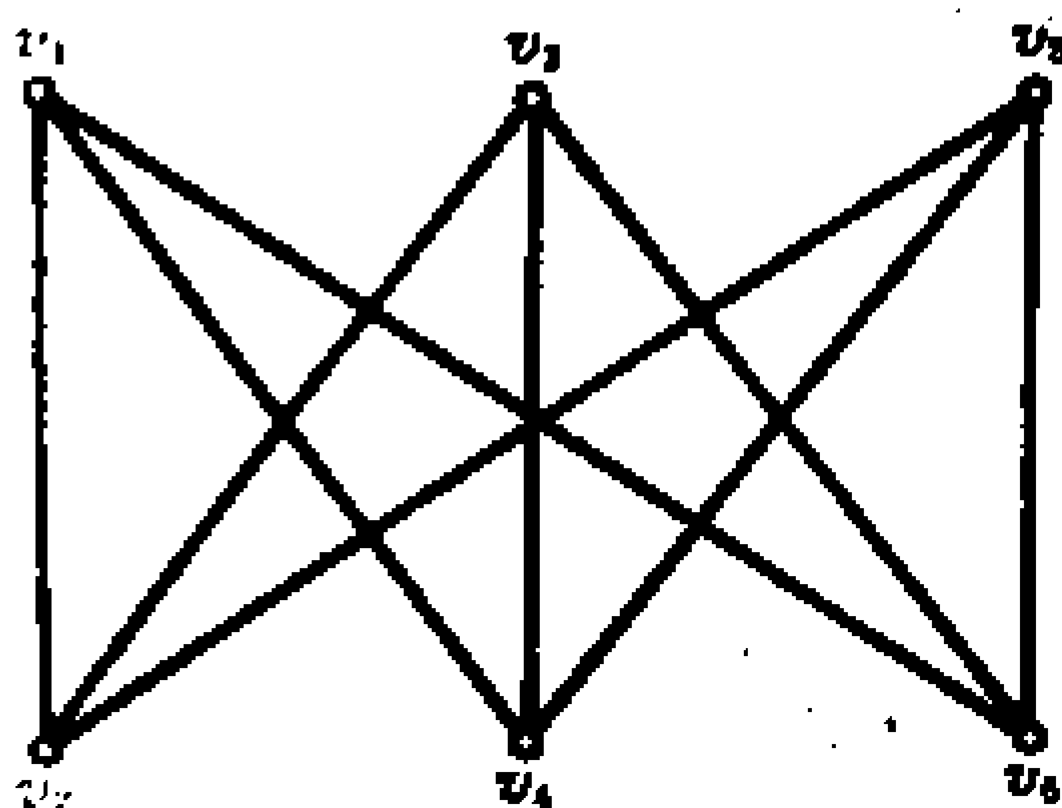
证法 II:假设 K_5-e 不可平面的。由库拉图斯基定理,K_5-e 含有一个同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$的子图 H。由于 K_5 和 $K_{3,3}$都没有 2 度顶点,所以 H 是 K_5 或 $K_{3,3}$经过一系列细分而得。但这是不是可能的,因为 $p(H)\leqslant p$



题解 10-1 图



题解 10-2 图



$K_{3,3}$

题解 10-3 图

$(K_5\text{-}e)=5<p(K_{3,3}),q(H)\leqslant q(K_5\text{-}e)<q(M_5)$。对于 $K_{3,3}\text{-}e$ 可用同样方法证明。

10-5　假设 $\overline{G}$ 是可平面的，$q'=q(\overline{G})$。则 $q,q'\leqslant 3p-6$，从而 $q+q'=\frac{1}{2}p(p-1)\leqslant 6p-12$，$p^2-13p+24\leqslant 0$。但是，当 $p\geqslant 11$ 时，$p^2-13p+24>0$，矛盾。

10-6　若 G 是自对偶的，则 $p=f$，另一方面，G 每去掉一条非割边恰减少一个面，所以去掉 $f-1$ 条边后，G 变成一棵生成树。根据定理 2.1.2，$p-1=q-(f-1)=q-p+1$，从而 $q=2p-2$。

10-7　设 G 是一个平面欧拉图，G^* 是它的对偶图。用定理 10.5.2，G 也是 G^* 的对偶。设 $C=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n}\}$ 是 G^* 的一个圈，$e'_{i_1},e'_{i_2},\cdots,e'_{i_n}$ 是 G 中和 $e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n}$ 对应的边。由定理 10.5.2，$C'=\{e'_{i_1},e'_{i_2},\cdots,e'_{i_n}\}$ 是 G 的一个割集，从而是 G 的一个断集。C' 可以表成若干个关联集的环和，而欧拉图的每个关联集中的边数都是偶数，因此 n 必为偶数，从而 C 为偶圈。由 C 的任意性，G^* 是二部图。

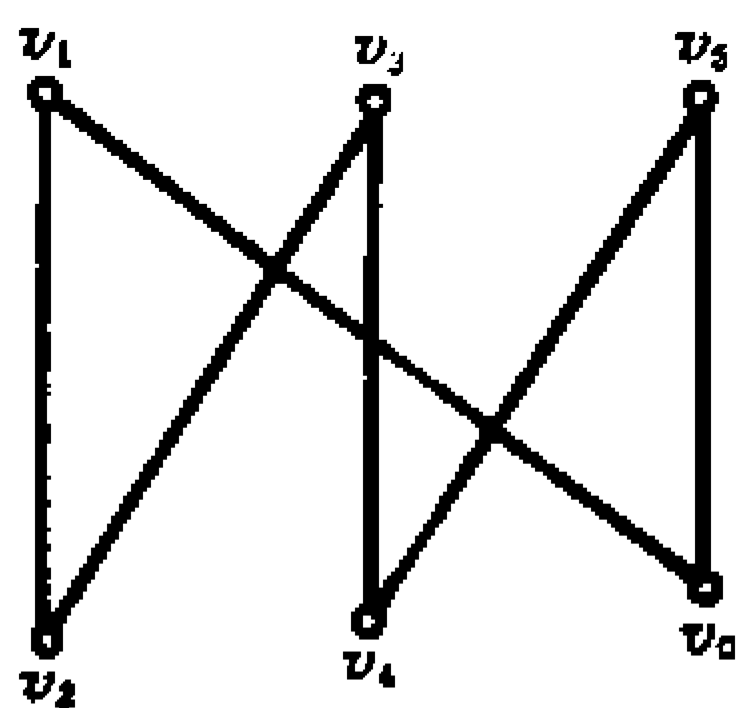
10-8　I　$G=K_{3,3}$

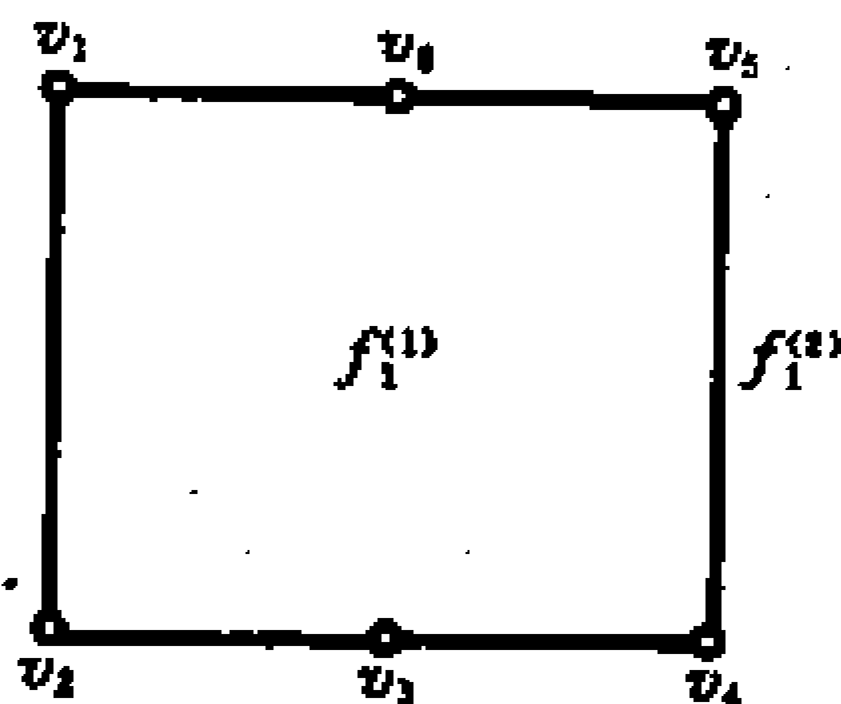
$1^{(1)}$。取圈 G_1 及 G_1 的一个平面嵌 $\tilde{G}_1$（题解 10.8 I $_1$ 图。）

$1^{(2)}$ G 中 G_1 的片是：

$$B_1^{(1)}=\{(v_2,v_5)\}$$

$$B_1^{(2)}=\{(v_3,v_6)\}$$





题解 10-8 Ⅰ$_1$ 图

$$B_1^{(3)} = \{(v_1, v_4)\}$$

对 $B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, B_1^{(3)}$，有

$$F(B_1^{(1)}, \tilde{G}_1) = F(B_1^{(2)}, \tilde{G}_1) = F(B_1^{(3)}, \tilde{G}_1)$$
$$= \{f_1^{(1)}, f_1^{(2)}\}$$

取片 $B_1^{(1)}$ 和面 $f_1^{(1)}$。

$1^{(3)}$取 $P_1 = v_2v_5$。令 $G_2 = G_1 \cup P_1$，在面 $f_1^{(1)}$ 中画出 P_1，得 G_2 的平面嵌入 $\tilde{G}_2$(题解 10-8I_2 图)。

$2^{(1)}$取 G_2 和 $\tilde{G}_2$。

$2^{(2)}$ G_2 的片是 $B_1^{(2)}, B_1^{(3)}$，有

$$F(B_1^{(2)}, \tilde{G}_2) = F(B_1^{(3)}, \tilde{G}_2) = \{f_2^{(3)}\}$$

取片 $B_1^{(2)}$ 和面 $f_2^{(3)}$.

$2^{(3)}$取 $P_2 = v_3v_6$，令 $G_3 = G_2 \cup P_2$，在面 $f_2^{(3)}$ 中画出 P_2，得 G_3 的平面嵌入(题解 10-8I_3 图。)

$3^{(1)}$取 G_3 和 $\tilde{G}_3$。

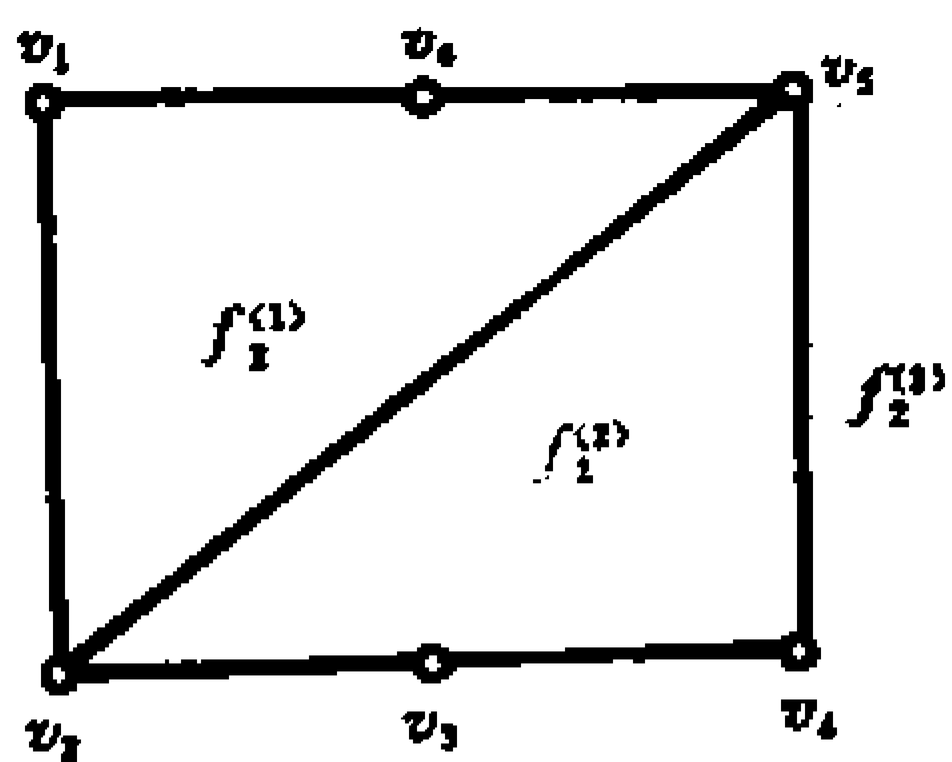
$3^{(2)}$ G 中 G_3 的片是 $B_1^{(3)}$、对 $B_1^{(3)}$，有

$$F(B_1^{(3)}, \tilde{G}_3) = \varnothing$$

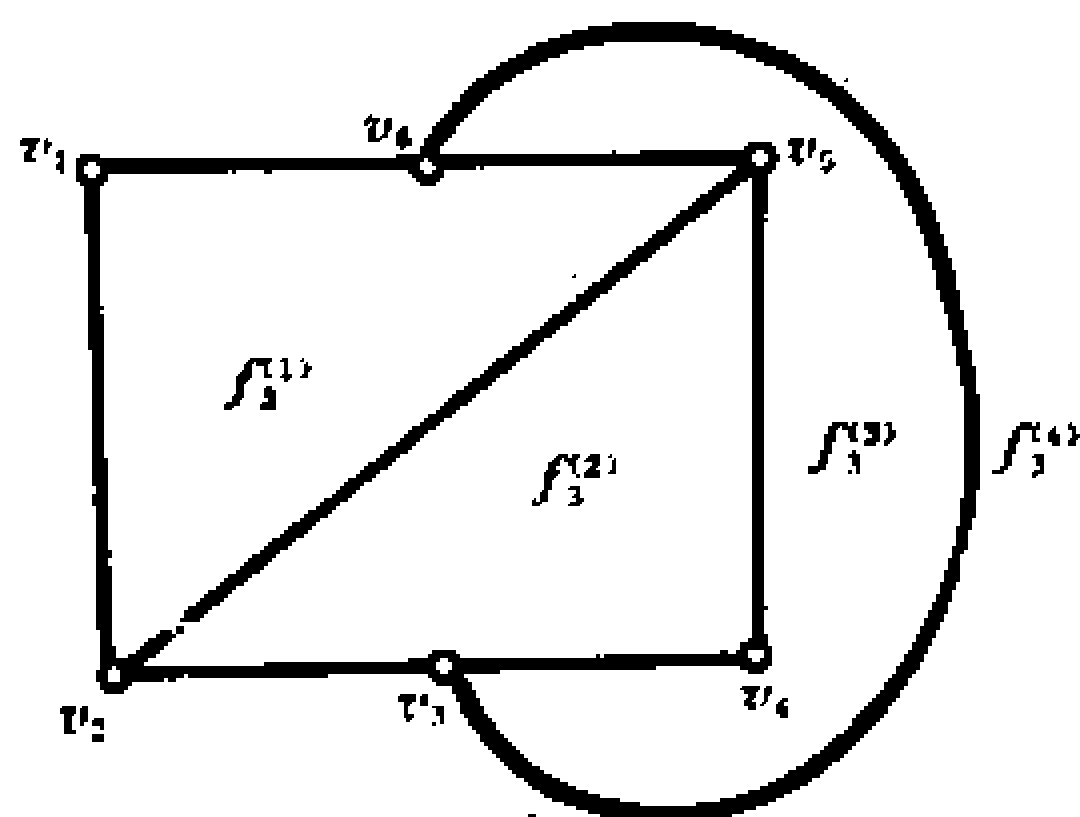
于是在 $B_1^{(3)}$ 是不可画的。因而 G 是不可平面的。

Ⅱ $G = K_5$。

$1^{(1)}$取一圈 G_1 及其平面嵌入(题解 10.8 Ⅱ$_1$ 图)



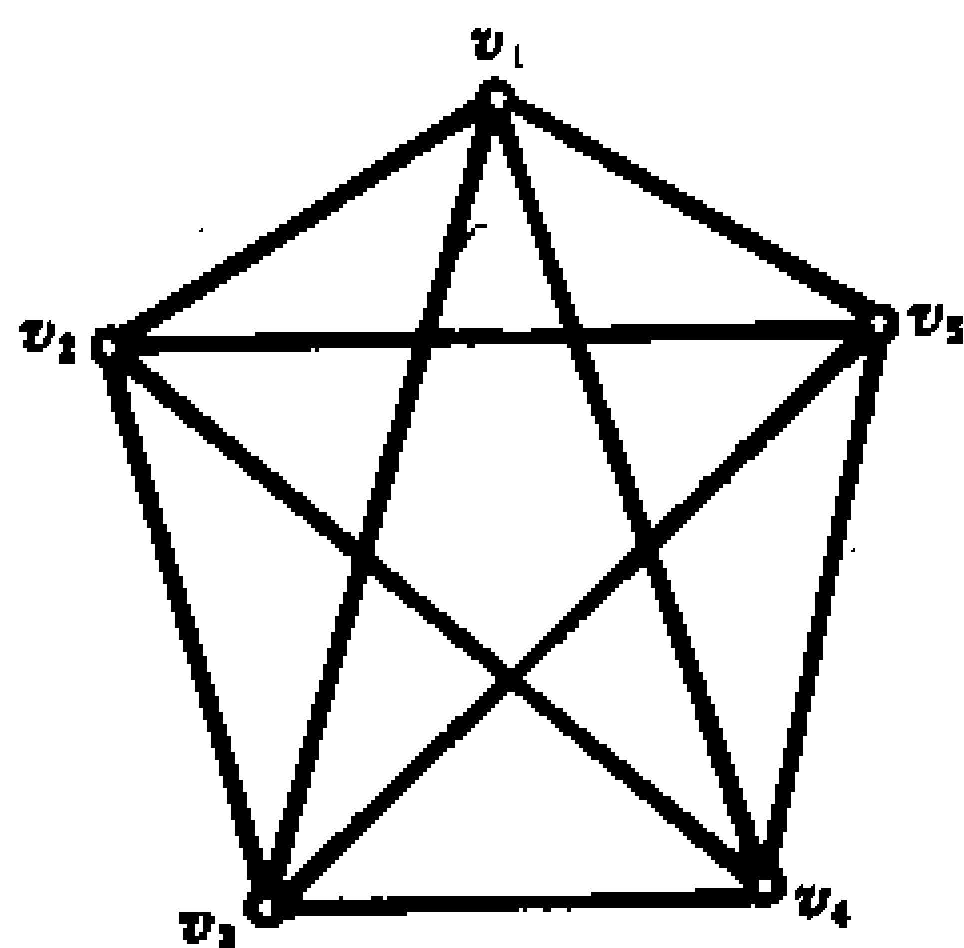
$\tilde{G}_2$



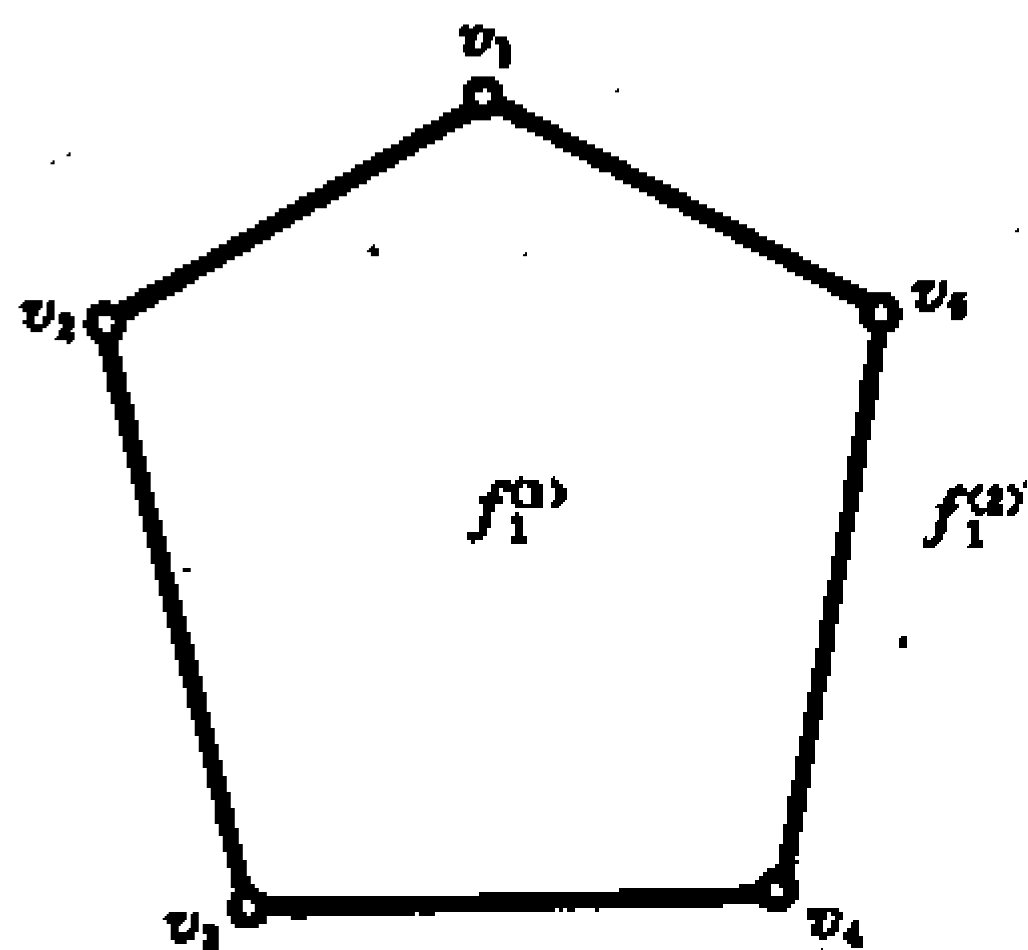
$\tilde{G}_3$

题解 10-8 Ⅰ$_2$ 图

题解 10-8 Ⅰ$_3$ 图



K_5



$G_1 = \tilde{G}_1$

题解 10-8 Ⅱ$_1$ 图

1$^{(2)}$ G 中 G_1 的片是

$$B_1^{(1)} = \{(v_1, v_3)\}$$

$$B_1^{(2)} = \{(v_1, v_4)\}$$

$$B_1^{(3)} = \{(v_2, v_4)\}$$

$$B_1^{(4)} = \{(v_2, v_5)\}$$

$$B_1^{(5)} = \{(v_3, v_5)\}$$

$$F(B_i^{(1)},\tilde{G}_1)=\{f_1^{(1)},f_1^{(2)}\}(i=1,2,3,4,5)$$

取片 $B_1^{(1)}$ 和面 $f_1^{(1)}$。

$1^{(3)}$取 $P_1=v_1,v_3$，令 $G_2=G_1\cup P_1$，在面 $f_1^{(1)}$ 中画出 P_1，得 $\tilde{G}_2$（题解 10-8 Ⅰ$_2$图）。

$2^{(1)}$取 G_2 和 $\tilde{G}_2$。

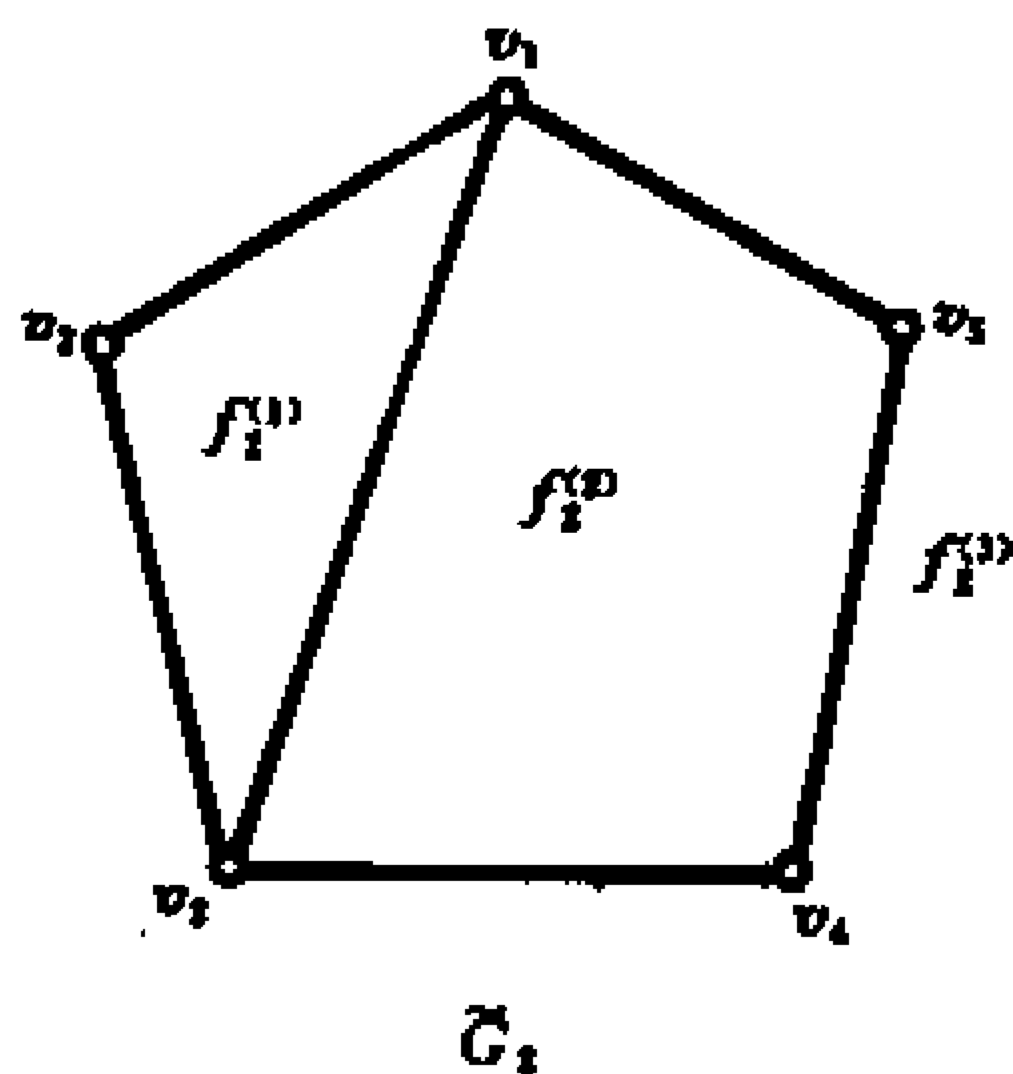
$2^{(2)}$ G 中 G_2 的片是 $B_1^{(1)},B_1^{(2)}B_1^{(4)},B_1^{(5)}$

$$F(B_1^{(3)},\tilde{G}_2)=F(B_1^{(4)},\tilde{G}_2)=\{f_2^{(3)}\}$$

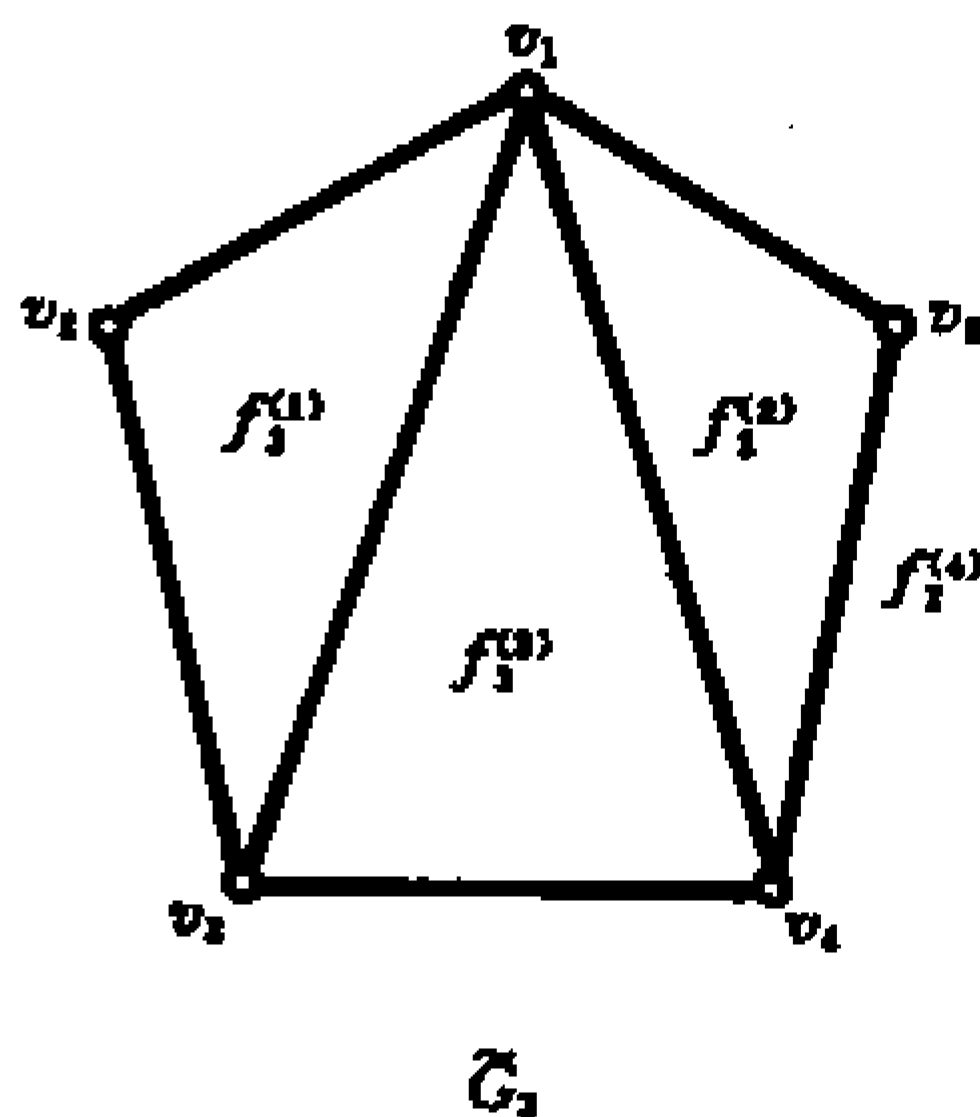
$$F(B_1^{(2)},\tilde{G}_2)=F(B_1^{(5)},\tilde{G}_2)=\{f_2^{(2)}\},f_2^{(3)}\}$$

取片 $B_1^{(2)}$ 和面 $f_2^{(2)}$。

$2^{(3)}$取 $P_2=v_1v_4$，令 $G_3=G_2\cup P_2$，在面 $f_2^{(2)}$ 画出 P_2，得 $\tilde{G}_3$（题解 10-8 Ⅰ$_3$图）。



题解 10-8 Ⅰ$_2$图



题解 10-8 Ⅰ$_3$图

$3^{(1)}$取 G_3 和 $\tilde{G}_3$。

$3^{(2)}G$ 中 G_3 的片是 $B_1^{(3)},B_1^{(4)},B_1^{(5)}$

$$F_1^{(3)},\tilde{G}_3)=F(B_1^{(4)},\tilde{G}_3)=F(B_1^{(5)},\tilde{G}_3)$$
$$=\{f_3^{(4)}\}$$

取片 $B_1^{(4)}$ 和面 $f_3^{(4)}$。

$3^{(3)}$取 $P_3=v_2v_5$，令 $G_4=G_3\cup P_3$，在面 $f_3^{(4)}$ 中画出 P_3 得 $\tilde{G}_4$（题解 10-

8Ⅰ$_4$图)。

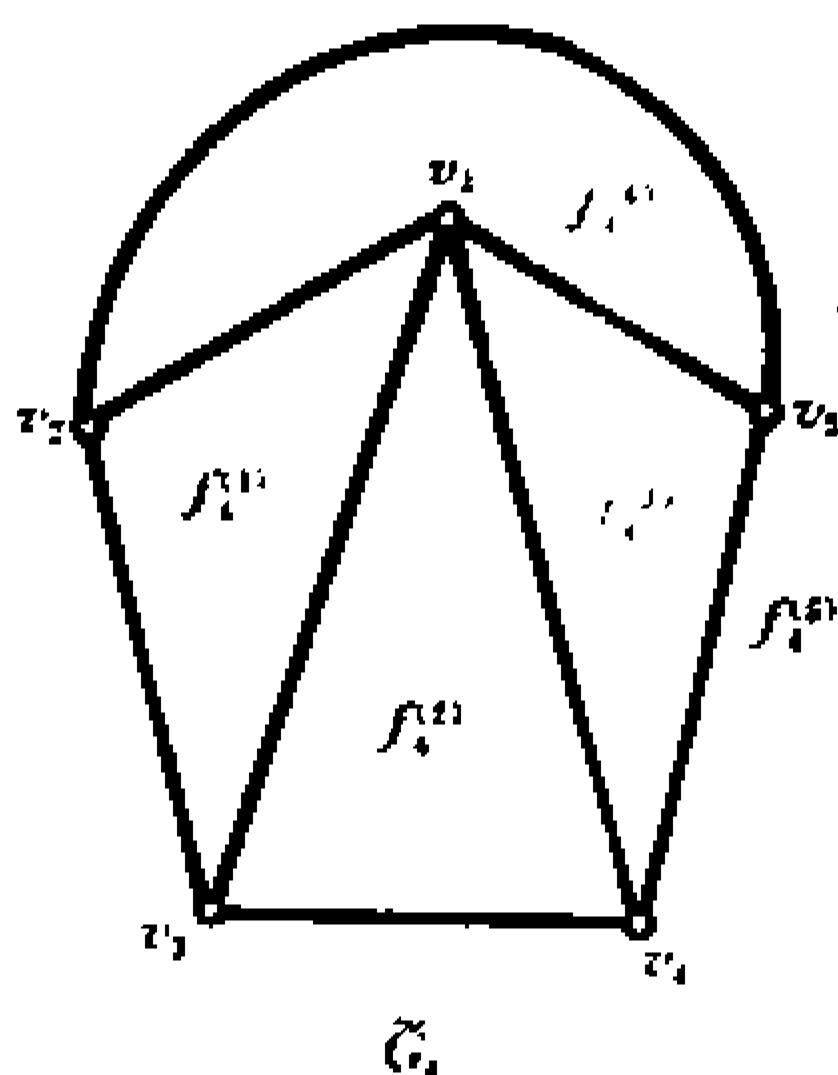
$4^{(1)}$取 G_4 和 $\tilde{G}_4$。

$4^{(2)}G$ 中 G_4 的片是 $B_1^{(3)},B_1^{(5)}$

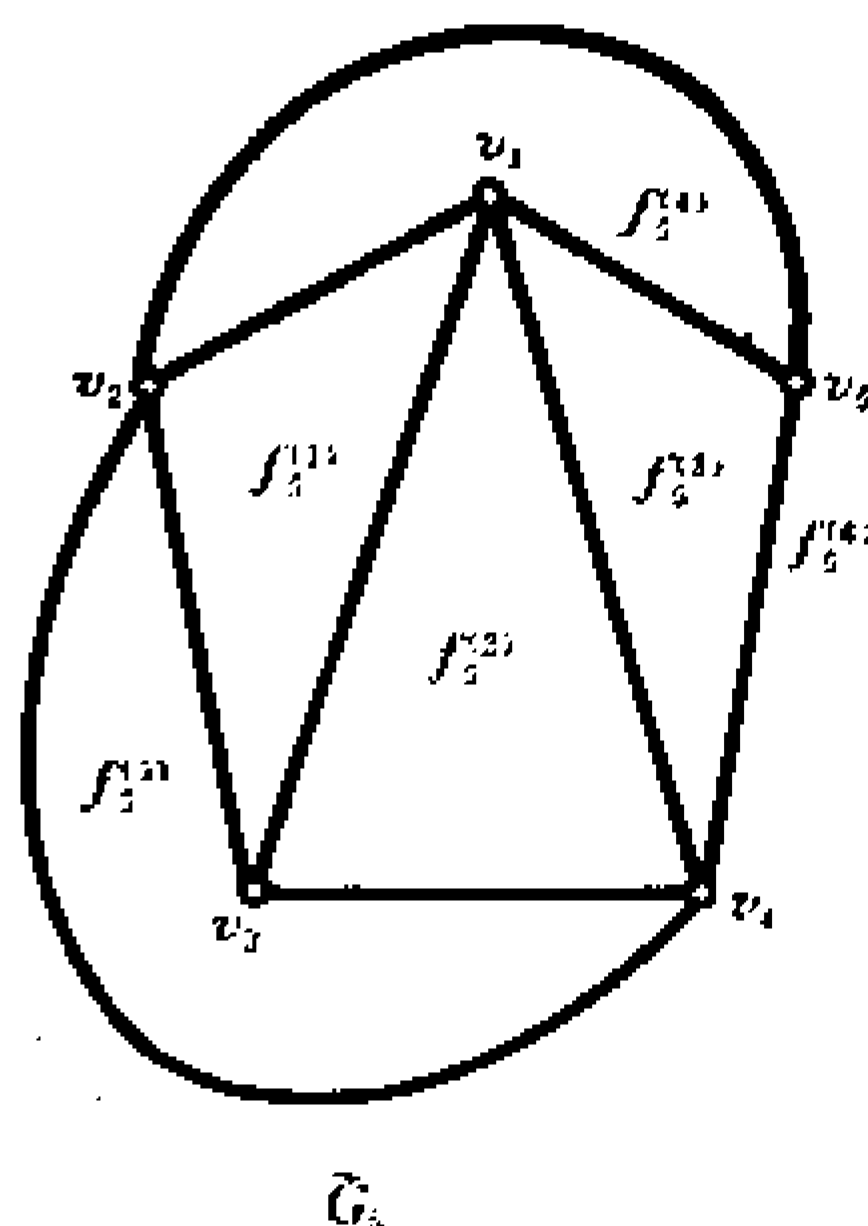
$$F(B_1^{(3)},\tilde{G}_4) = F(B_1^{(5)},\tilde{G}_4) = \{f_4^{(5)}\}$$

取 $B_1^{(3)}$ 和 $f_4^{(5)}$。

$4^{(3)}$取 $P_4=v_2v_4$。令 $G_5=G_4\cup P_4$。在面 $f_4^{(5)}$ 中画出 P_4 得 $\tilde{G}_5$(题解10-8Ⅰ$_5$图)。



题解10-8Ⅰ$_4$图



题解10-8Ⅰ$_5$图

$5^{(1)}$取 G_5 和 $\tilde{G}_5$。

$5^{(2)}G$ 中 G_5 的片是 $B_1^{(5)}$

$$F(B_1^{(5)},\tilde{G}_5) = \varnothing$$

于是片 $B_1^{(5)}$ 是不可画的，因而 G 是不可平面的。

10-9　对顶点个数 p 用归纳法，$p\leqslant 6$ 命题显然成立。设 $p\leqslant k$ 命题成立。令 G 是有 $k+1$ 个顶点的可平面图。由推论10.2.6知，G 中存在顶点 v_0，$\deg_G(v_0)\leqslant 5$。考虑 $G_1=G-v_0$，显然 G_1 仍是可平面图，且 $|V(G_1)|=k$，由归纳法假设，G_1 是6-可着色的。由于 $\deg_G(v_0)\leqslant 5$，故 v_0 在 G 中的邻点在上述着色中至少有一种颜色不出现，将 v_0 着以此种颜

色，于是在 G_1 的 6 着色基础上得到 G 的 6 着色。由归纳法，命题成立。

10-10　若 G 是平面连通欧拉图，显然 G 无割边，由习题 10-7，G 的对偶图 G^* 是二部图，故 G^* 是 2-可着色的，于是 G 是 2-可着色的。

反之，考虑 G 中任一顶点 v，若 $\deg_G(v)=k$，当 k 为奇数时，因 G 无割边，则围绕 v 的是 k(奇数)个区域，它不可能 2-面着色，故 $\deg_G(v)$ 必为偶数。又因 G 连通，故 G 是连通欧拉图。

习题十一

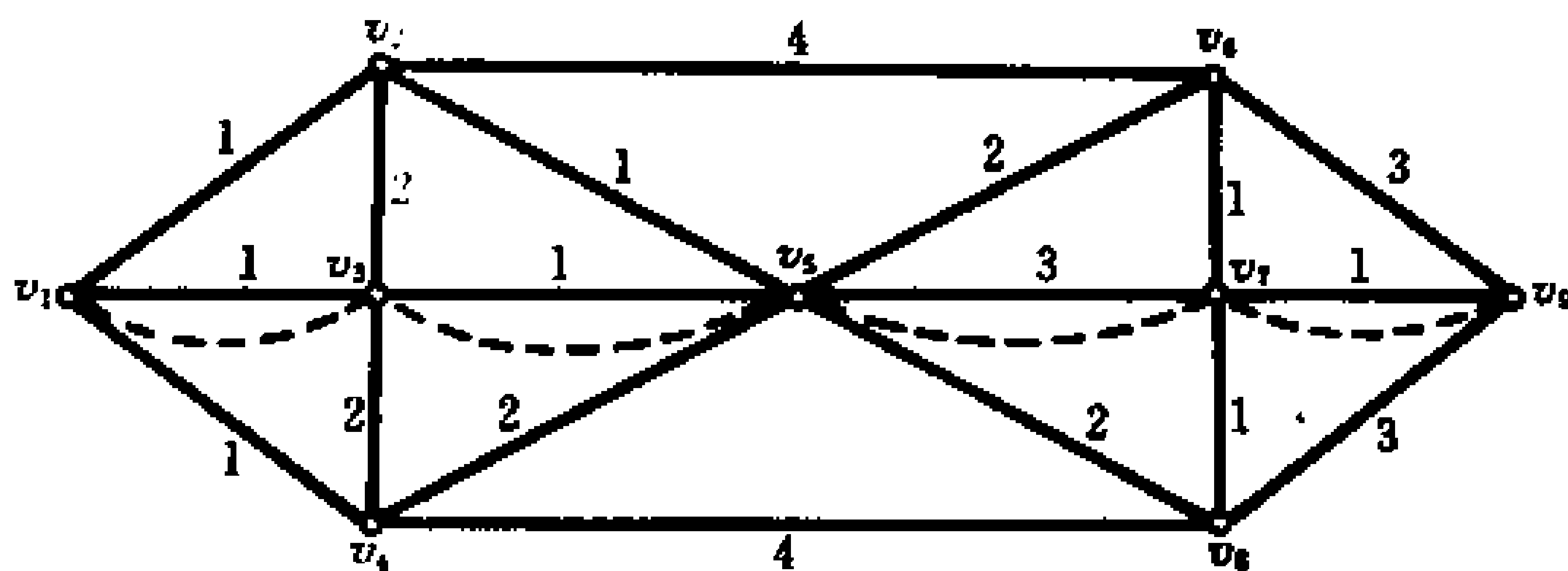
11-1　　$\{P_{12}\}=\{a,fb,gcb,gdhb,edcb,ehb\}$

$\{P_{34}\}=\{bc,bfg,bhd,bfed,ag,afc,afhd,aehc,aed\}$

11-2　11

11-3　15

11-4　由 v_1 到 v_9 的欧拉链 $v_1v_2v_3v_1v_4v_3v_5v_2v_6v_5v_4v_8v_5v_7v_6v_9v_7v_8v_9$ 和最短道路 $v_1v_3v_5v_7v_9$ 组成。



题解 11-4 图

11-5

a). $\{v_1v_2,v_3v_4,v_3v_7,v_1v_7,v_4v_5,v_5v_6\}$

b). $\{v_1v_2,v_1v_3,v_3v_{10},v_7v_{10},v_9v_{10},v_5v_9,$

$v_5v_6,v_4v_6,v_4,v_8\}$

11-7　　$\{P_aL,P_eT,MN,NL,P_eL\}$

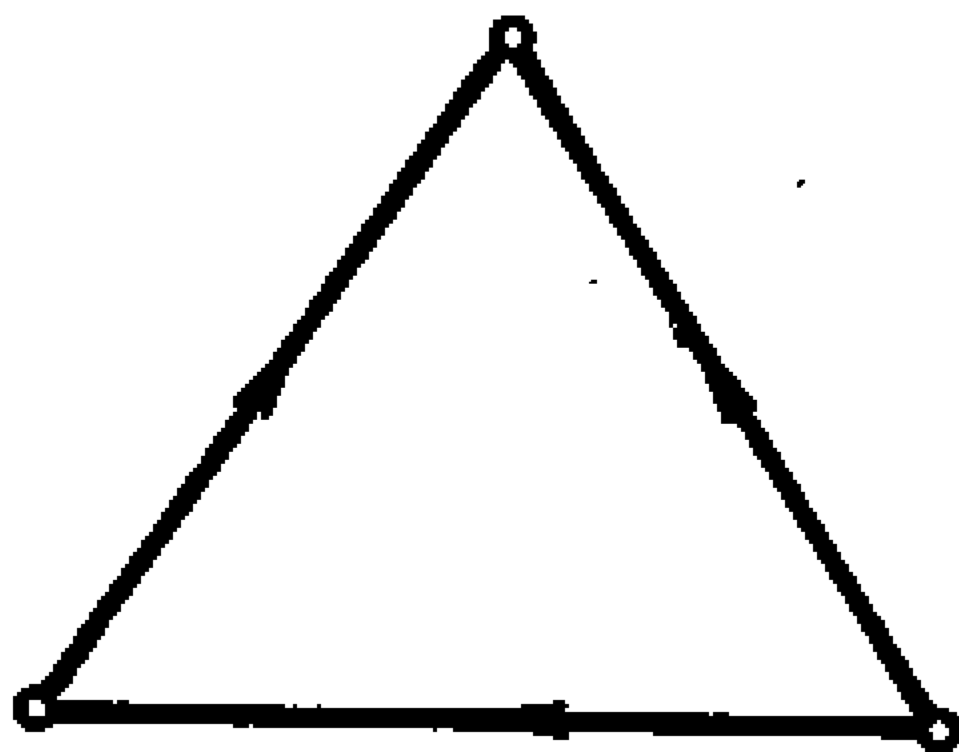
习题十二

12-1　由已知，$\deg^+(v)=\deg^-(v)=1$，对任意的 $v\in V(D)$，因此，从 C 的某一个顶点出发可得一有向闭链，从而 C 含有一个有向圈 C_1。若 $C'\neq C_1$，由 C 的连通性，存在 $e\in U(C)$，$e\notin U(C_1)$，且 e 的一个顶点 w 在 C_1 上，这时 $\deg^+(w)$ 或 $\deg^-(w)\geqslant 2$ 矛盾。

12-2　由 D 的连通性，对任意 $v\in V(D)$，$\deg^+_{(v)}=\deg^-_{(v)}>0$。因此从 D 的某一个顶点出发可得一有向闭链，从而 D 有一有向圈。

12-3　若 D 为有向欧拉图，则 D 显然连通，且 $\deg^+(v)=\deg^-(v)$，$v\in V(D)$。反之，由习题 12-2，D 有一有向圈。设 D_1 是 D 中最长的有向闭链，若 $D=D_1$，则 D 为有向欧拉图。否则由 D 的连通性，存在 $e\in U(D_1)$，$e\notin U(D_1)$ 且 e 的一个顶点在 D_1 上。这时在 $D'=D-D_1$ 的含 e 的连通分支中，仍有 $\deg^+_{D'}(v)=\deg^-_{D'}(v)>0$，$v\in V(D')$，于是 D' 中有一含 e 的有向圈 C。取 $D_2=D_1\cup C$，得到一个长大于 D_1 的有闪闭链，与 D_1 是 D 中最长的有向闭链的假设矛盾。

12-4　若 D 是有向欧拉图，由习题 12-3，$\deg^+(v)=\deg^-(v)$，且 D 连通。于是 $\deg(v)=2\deg^+(v)$，从而 D 的基础图是欧拉图，下图说明逆命题不成立。

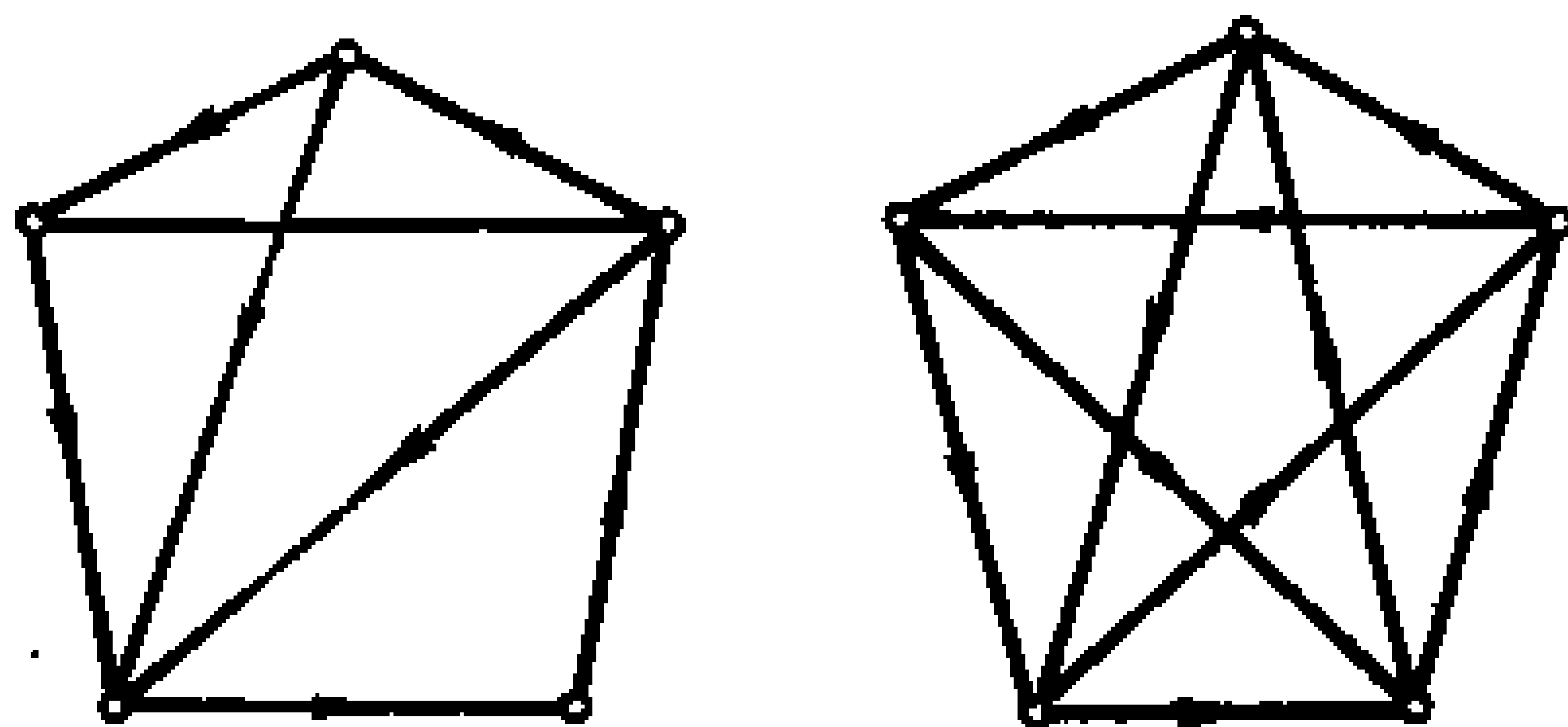


题解 12-4 图

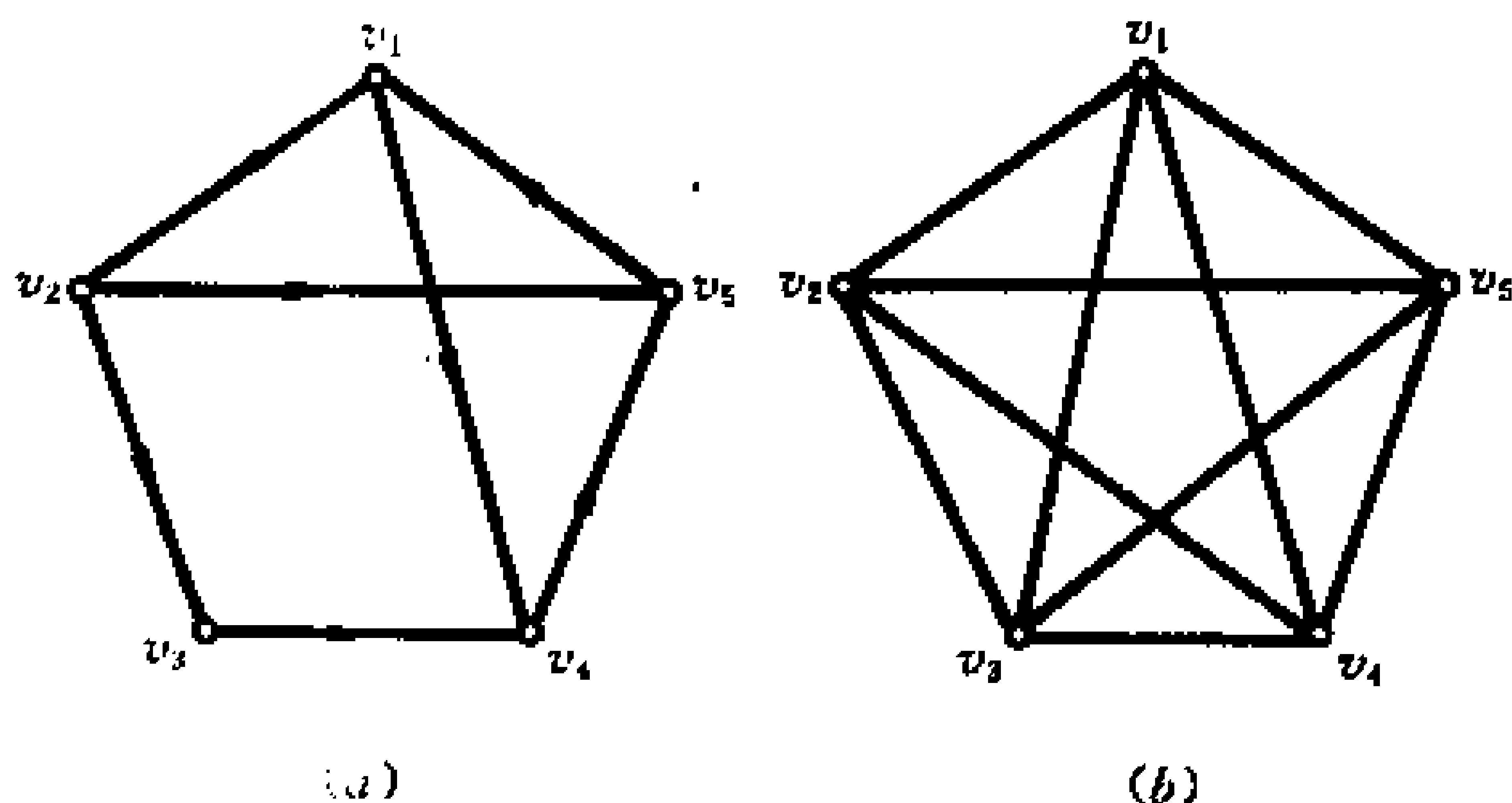
12-5　题解 12-5 图的 (a) 不是有向欧拉图。因为 $\deg^+(v_1)=1\neq 2=deg^-(v_1)$。$(b)$ 图的有向欧拉链是 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1v_3v_5v_2v_4v_1$。

12-6　(a) v_1[illegible]v_5v_1，$v_1v_2v_3v_4v_5v_1$，$v_1v_4v_5v_1$ 均为有向圈（题解 12-6(a)图）。

(b) $v_1v_5v_4v_3v_2v_1$，$v_1v_4v_3v_2v_1$，$v_1v_3v_2v_1$，$v_1v_5v_3v_2v_1$，$v_2v_5v_4v_3v_2$，$v_2v_5v_3v_2$ 均为有向圈（题解 12-6(b)图）。



题解 12-5 图



题解 12-6 图

12-7　用反证法。若最小入度大于零，则 D 中每一个顶点有一条入弧，且均可沿这条弧反向到达 D 的另一个顶点，且这个过程永远不会终止，另一方面，由于 D 不含有有向圈，且 D 为有限图，故上述过程不可能永远进行下去，矛盾。

12-8　不失一般性，假定 $\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^+$（否则可考虑把 D 似每一条弧反向所得到的图）。设 $P(u_0,v_0)$是 D 中最长的有向道路，若它的长小于 δ^+，则由 D 是严格的有向图，必存在以 v_0 为起点，终点不在 $P(u_0,v_0)$中的弧，从而 $P(u_0,v_0)$可继续延长，这与 $P(u_0,v_0)$是最长的假设矛盾。所以 $P(u_0,v_0)$的长不小于 $\delta^+=\max\{\delta^-,\delta^+\}$。

12-9　假设 $\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^+$，由习题 12-8 知，$D$ 中的最长有向道

路 $P(u_0,v_0)$ 的长 $\geqslant k$。由于 D 是严格的，从而应有 $\deg^+(v_0)\geqslant k$ 条以 v_0 为起点，终点不同的弧，再由 $P(u_0,v_0)$ 的最长性知，这些以 v_0 为起点的 $\deg^+(v_0)$ 条弧的终点均在 $P(u_0,v_0)$ 上，故 D 中恒含有长不小于 $k+1$ 的有向圈。

12-10　由定理 9.2.2 知，$\chi(G)\leqslant\Delta+1$，故 G 存在 $(\Delta+1)$—正常着色。设对 G 已用 $\Delta+1$ 种颜色进行了正常着色，对 G 中的边 uv，定向取为 (u,v) 的充要条件是 u 的着色 i 小于 v 的着色 j，显然在这种定向下，它的有向道路的长 $\leqslant(\Delta+1)-1=\Delta$。

12-11　设 S 是 $V(D)$ 的非空真子集，任取 $v_1\in S$，$v_2\notin S$，由于 D 是双向连通的，从而在 D 中存在 (v_1,v_2) 有向道路，所以 $(S,\overline{S})$ 非空，即 $|(S,\overline{S})|\geqslant 1$，于是 D 是 1-弧连通的。

反之，设 D 是 1-弧连通的，但不是双向连通的。不妨设存在 v_1,v_2，在 D 中不存在 (v_1,v_2) 有向道路。令 S 是 D 中存在 (v_1,v_2) 有向道路的所有顶点 v 的集合。显然，$v_2\in\overline{S}$，但 $(S,\overline{S})=\varnothing$，故 $|(S,\overline{S})|=0$，这与 D 是 1-弧连通的假设矛盾。因此 D 是双向连通的。

12-12　见题解 12-12 图。

12-13　见题解 12-13 图。

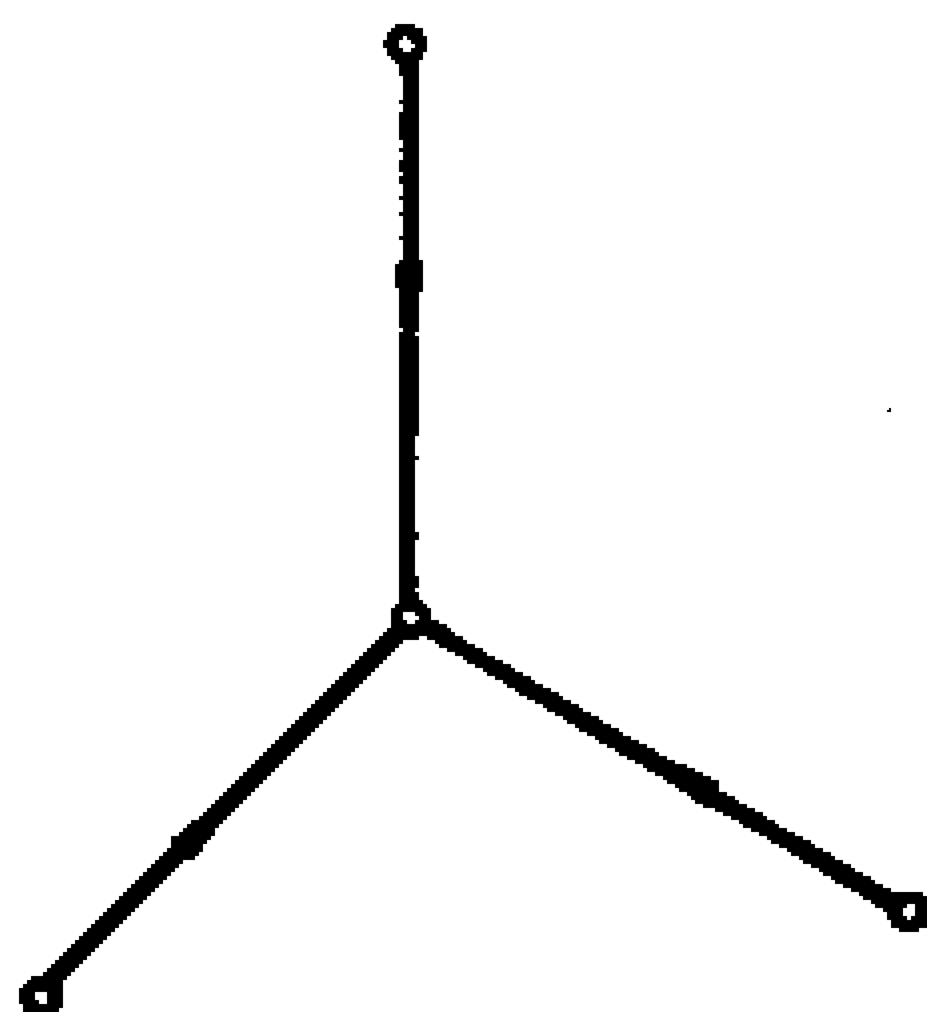
习题十三

13-1

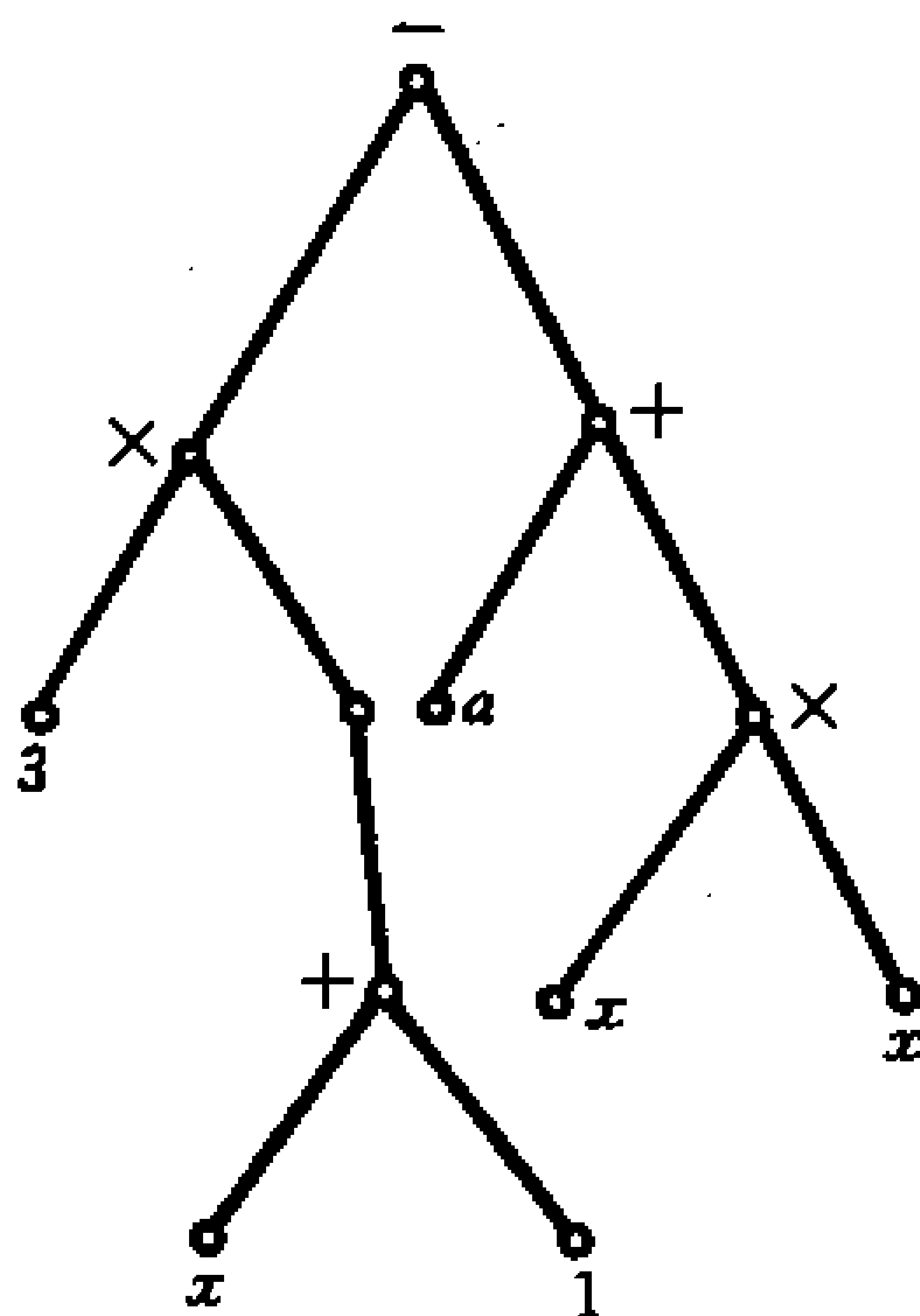
$$
M=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}
$$

顶点 5 是参考点。

取 D 的生成树 $T=\{a,b,c,d\}$，$C_1=\{4,e,1,a,2,b,4\}$，$C_2=\{3,f,4,b,2,c,3\}$，$C_3=\{4,g,5,d,2,b,4\}$ 为 D 关于 T 的基本圈。相应的基本圈



题解 12-12 图



题解 12-13 图

矩阵为

$$
\begin{array}{c}
 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} e & f & g & a & b & c & d \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

D 关于生成树 T 的基本割集为 $S_1=\{a,e\}$，$S_2=\{b,e,f,g\}$，$S_3=\{c,f\}$，$S_4=\{d,g\}$，相应的基本割集矩阵为

$$
\begin{array}{c}
 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} e & f & g & a & b & c & d \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

13-2　D 的所有环路为 C_1, C_2, C_3

$$C_4 = C_1 \oplus C_2 = \{e,a,c,f\}$$

$$C_5 = C_1 \oplus C_3 = \{e,a,d,g\}$$

$$C_6 = C_2 \oplus C_3 = \{f,g,d,c\}$$

$$C_7 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 = \{e,a,c,f,g,d,b\}$$

相应的完全圈矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e & f & g & a & b & c & d \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1
\end{bmatrix} \end{array}$$

D 的所有断集为 S_1,S_2,S_3,S_4，

$$S_5 = S_1 \oplus S_2 = \{a,b,f,g\}$$

$$S_6 = S_1 \oplus S_3 = \{a,e,c,f\}$$

$$S_7 = S_1 \oplus S_4 = \{a,e,d,g\}$$

$$S_8 = S_2 \oplus S_3 = \{b,e,g,c\}$$

$$S_9 = S_2 \oplus S_4 = \{b,e,f,d\}$$

$$S_{10} = S_3 \oplus S_4 = \{c,f,d,g\}$$

$$S_{11} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = \{a,b,g,c\}$$

$$S_{12} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_4 = \{a,b,f,d\}$$

$$S_{13} = S_1 \oplus S_3 \oplus S_4 = \{a,e,c,f,d,g\}$$

$$S_{14} = S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 = \{b,e,d,c\}$$

$$S_{15} = \{a,b,d,c\}$$

其中每个断集的方向与断集中第一个弧的方向一致，则完全割集矩阵为

	e	f	g	a	b	c	d
S_1	1	0	0	1	0	0	0
S_2	1	−1	1	0	1	0	0
S_3	0	−1	0	0	0	1	0
S_4	0	0	1	0	0	0	1
S_5	0	1	−1	1	−1	0	0
S_6	1	−1	0	1	0	1	0
S_7	1	0	1	1	0	0	1
S_8	1	0	1	0	1	−1	0
S_9	1	−1	0	0	1	0	−1
S_{10}	0	−1	1	0	0	1	1
S_{11}	0	0	−1	1	−1	1	0
S_{12}	0	1	0	1	−1	0	1
S_{13}	1	−1	1	1	0	1	1
S_{14}	1	0	0	0	1	−1	−1
S_{15}	0	0	0	1	−1	1	1

13-3　D 关于生成树的基本圈为

$$C_1=\{1,a,2,b,5,e,1\}$$

$$C_2=\{1,a,2,b,5,c,4,5,1\}$$

$$C_3=\{2,b,5,c,4,8,2\}$$

$$C_4=\{2,b,5,c,4,h,2\}$$

$$C_5=\{2,b,5,c,4,d,3,i,2\}$$

相应的基本圈矩阵为

	e	f	g	n	i	a	b	c	d
C_1	1	0	0	0	0	1	−1	0	0
C_2	0	1	0	0	0	−1	1	1	0
C_3	0	0	1	0	0	0	1	1	0
C_4	0	0	0	1	0	0	−1	−1	0
C_5	0	0	0	0	1	0	1	1	1

D 关于生成树 T 的基本割集为 $S_1=\{a,e,f\}$，$S_2=\{b,e,f,g,q,i\}$，$S_3=\{c,f,g,h,i\}$，$S_4=\{d,i\}$ 相应的基本割集矩阵为：

$$\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e & f & g & h & i & a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

13-7

(a)：192

(b)：60

习题十四

14-1 $$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{v\in S}\Big(\sum_{u\in V} f(v,u) - \sum_{u\in V} f(u,v)\Big) \\ &= \sum_{v\in S}\Big(\sum_{u\in S} f(v,u) + \sum_{u\in \bar{S}} f(v,u) - \sum_{u\in S} f(u,v) \\ &\quad - \sum_{u\in \bar{S}} f(u,v)\Big) \\ &= \sum_{v\in S}\sum_{u\in \bar{S}} f(v,u) - \sum_{v\in S}\sum_{u\in \bar{S}} f(u,v) \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

14-2 设 $(V_1,\bar{V}_1)$ 与 $(V_2,\bar{V}_2)$ 都是最小割，则有 $(V_1,\bar{V}_1)\leqslant c(V_1\cup V_2,\overline{V_1\cup V_2})$，$c(V_2,\bar{V}_2)\leqslant c(V_1\cap V_2,\overline{V_1\cap V_2})$。另一方面，易见 $c(V_1\cup V_2,\overline{V_1\cup V_2})\leqslant c(V_1,\bar{V}_1)+c(V_2,\bar{V}_2)-c(V_1\cap V_2,\overline{V_1\cap V_2})$，由此得 $c(V_1\cup V_2,\overline{V_1\cup V_2})=c(V_1,\bar{V}_1)$，所以 $(V_1\cup V_2,\overline{V_1\cup V_2})$ 是最小割。类似地，可得 $(V_1\cap V_2,\overline{V_1\cap V_2})$ 也是最小割。

14-3 命 $S=\{v\in N$：在 N 中存在有向 (x,v) 路$\}$，则 $(S,\bar{S})$ 是 N 中一个割，且 $c(S,\bar{S})=0$。

14-4

S	$(S,\bar{S})$	$C(S,\bar{S})$
$\{x\}$	xv_1, xv_2	6
$\{x, v_1\}$	xv_2, v_1y	7
$\{x, v_2\}$	xv_1, v_2v_1, v_2v_3	7
$\{x, v_3\}$	xv_1, xv_2, v_3v_1, v_3y	12
$\{x, v_1,$ [illegible]$\}$	x_1y, v_2v_3	5
$\{x, v_1,$ [illegible]$\}$	xv_2, v_1y, v_3y	12
$\{x, v_2,$ [illegible]$\}$	$xv_1, v_2v_1, v_3v_1, v_3y$	11
$\{x, v_1, v_2, v_3\}$	v_1y, v_3y	8

14-5 (a) 11, (b) 11

14-6 只有两种方案

14-7 仿照最大流最小割定理的证明方法。假设标记过程已停止，定义顶点子集 V_1: $x \in V_1$，若 $v_i \in V_1$，$c(i,j) > f(i,j)$ 或 $f(j,i) > 0$，则 $v_j \in V_1$。

名词索引

六划

七划

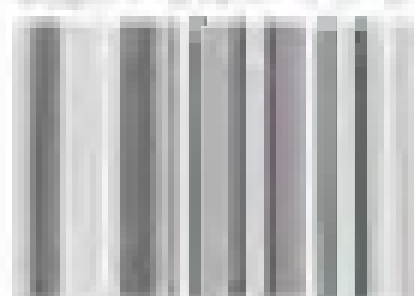
十二划

十三划以上

参考资料

1. 李慰萱．图论．湖南科学出版社，1980
2. 赖在杭．图论讲义．新疆大学，1979
3. Bondy，J. A. and Murty，U. S. R. Graph Theory with Applications，1976
4. Harary，F. Graph Theory，1969
5. Mayeda，W. Graph Theory，1972
6. Johnson D. E. and Johnson J. R. graph Theory with engineering Applications，1972
7. Berge C. Graph and Hypergraph，1973
8. Swamy，M. N. S. and Tnnlasiraman. K.，graphs，Networks，and Algorithms，1981

责任编辑：[illegible]
封面设计：[illegible]



ISBN [illegible]

定价：[illegible]